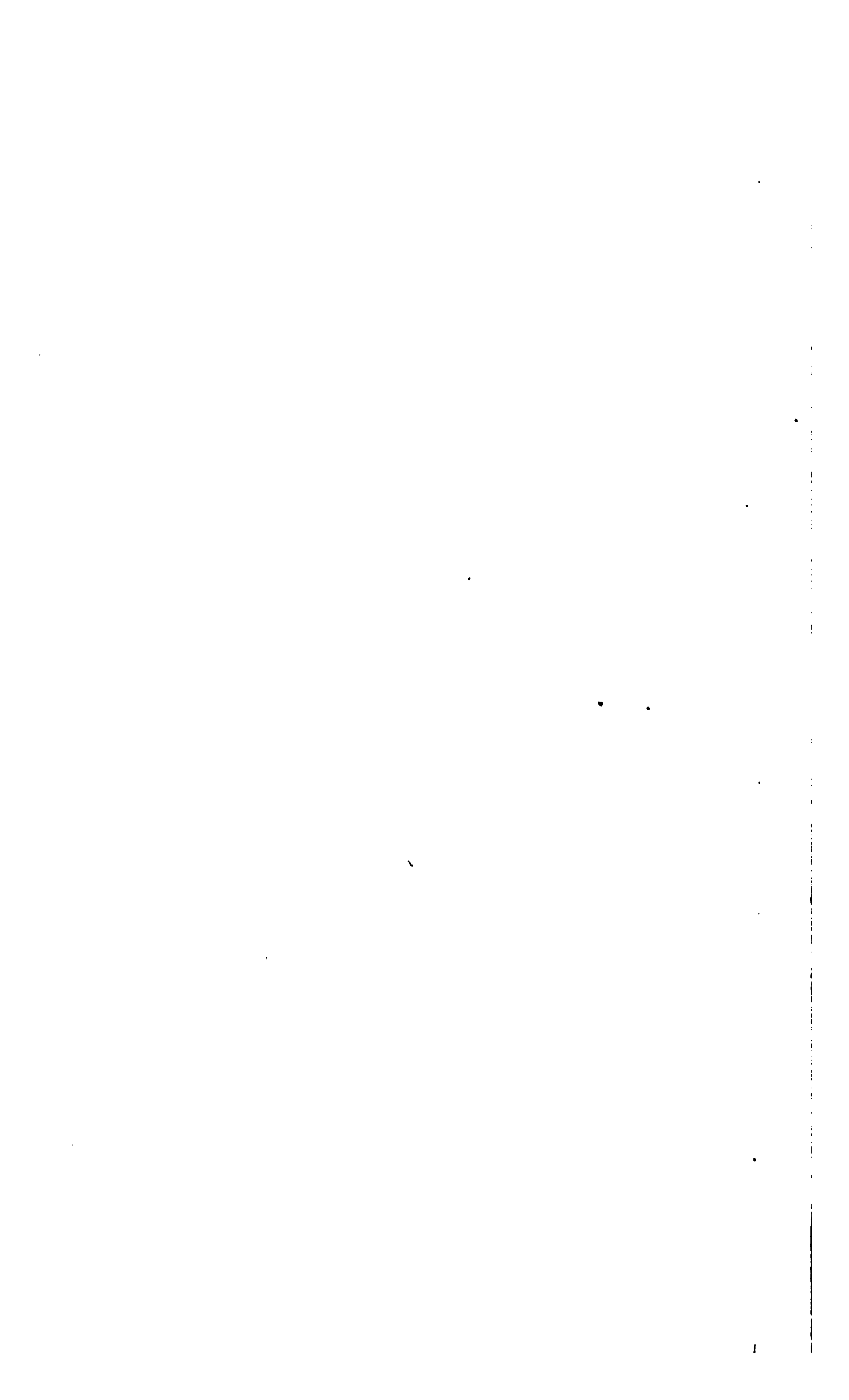
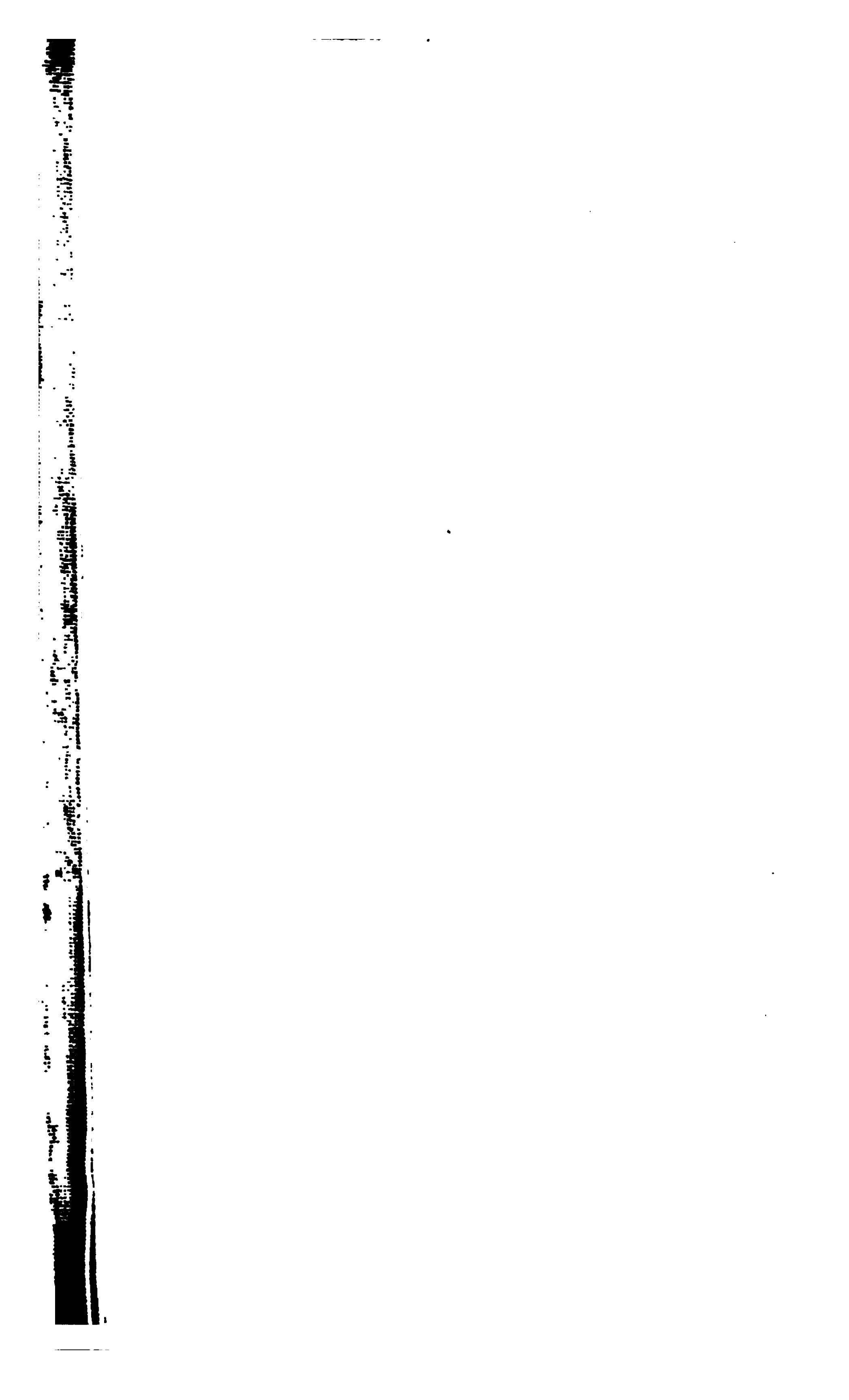
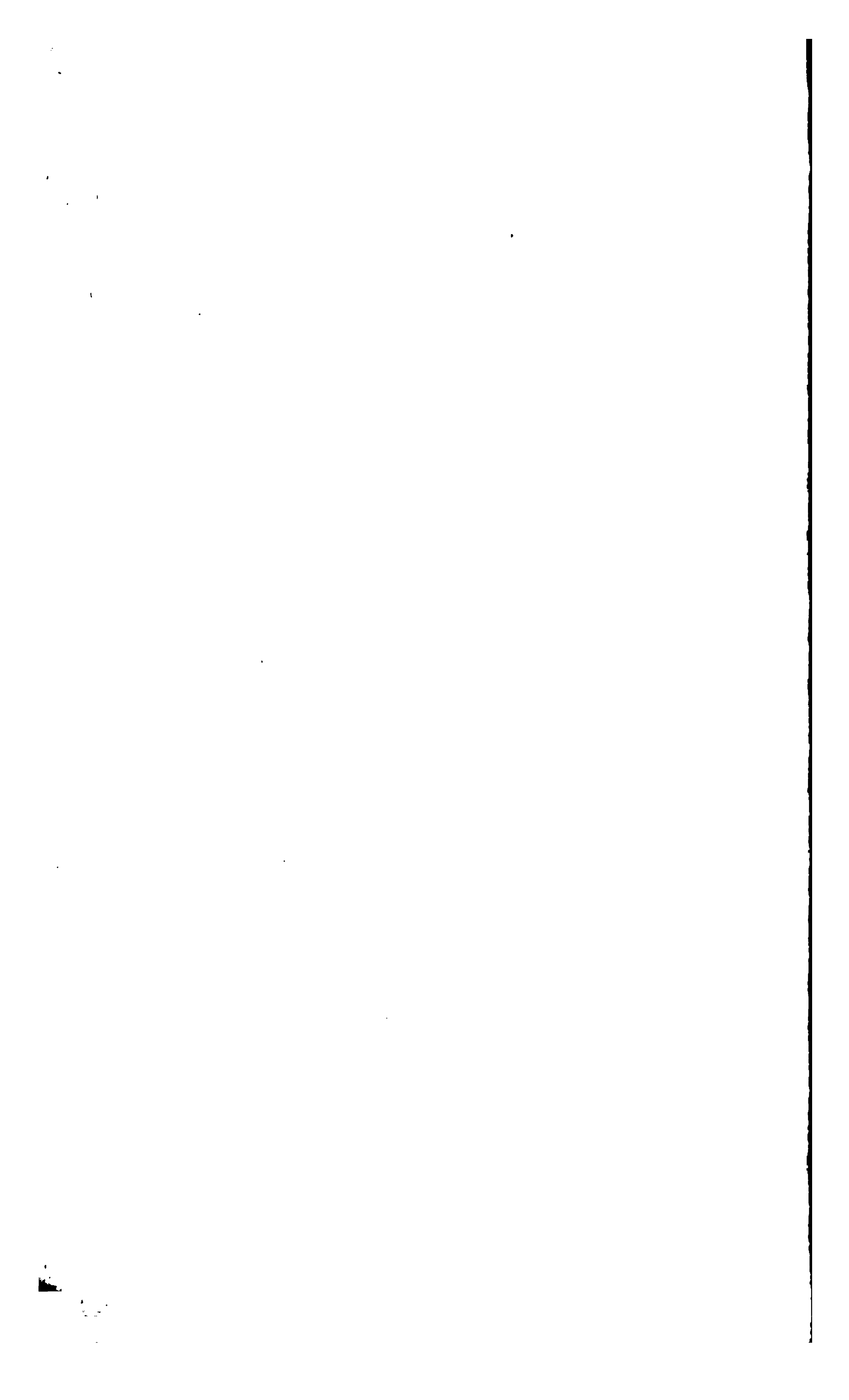








Arthur. E. Kiefer. stud. math.
Detroit
Mich.
Carlsruhe Nov 16th. 74

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

MIT BESONDERER

BERÜCKSICHTIGUNG DER NEUEREN METHODEN.

NACH

GEORGE SALMON

FREI BEARBEITET

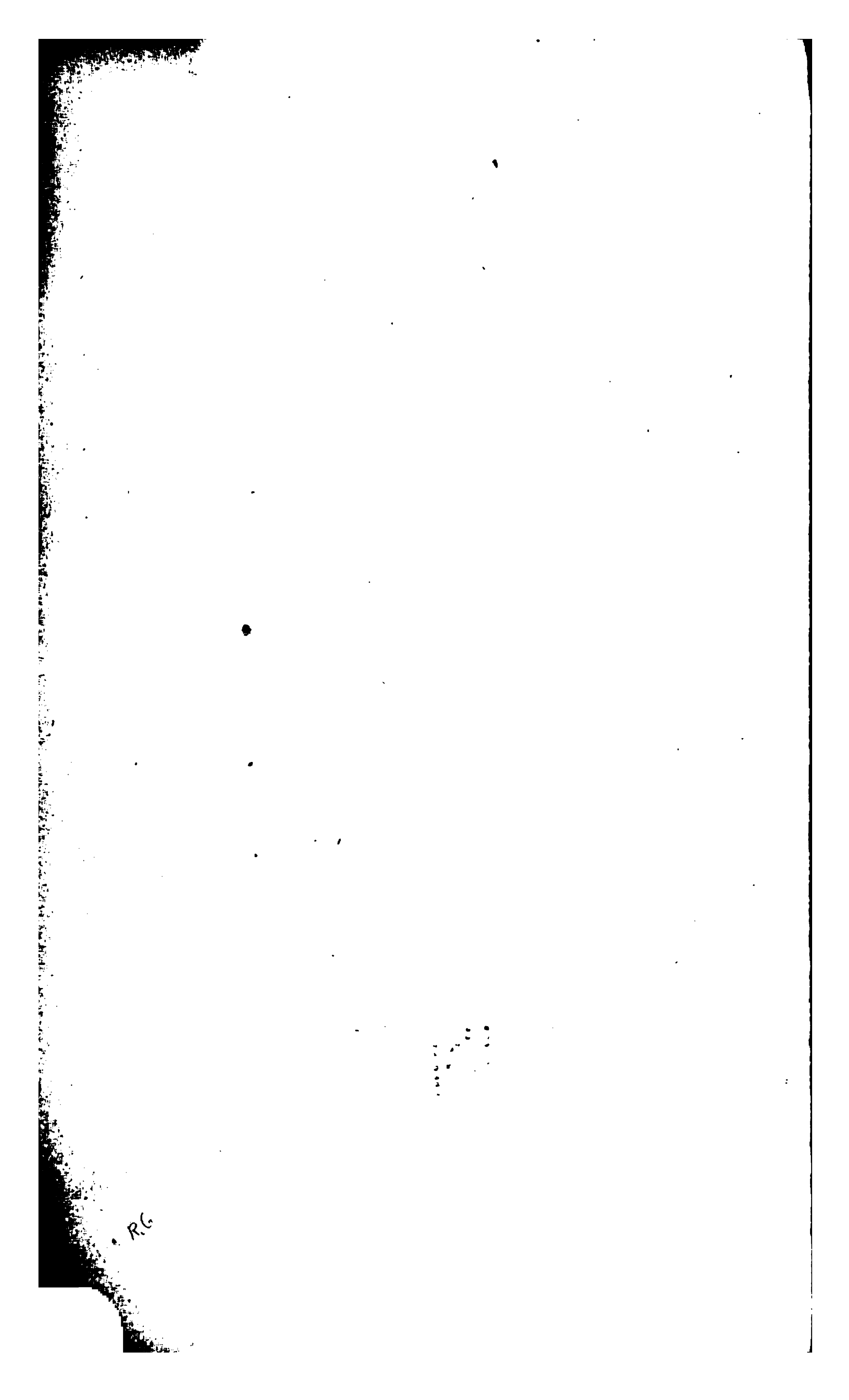
VON

DR. WILHELM FIEDLER,
ORD. PROFESSOR DER DESCR. GEOMETRIE AM POLYTECHNICUM ZU PRAG.

ZWEITE UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1866.



Vorrede.

Als ich die Bearbeitung von George Salmon's schon berühmtem Werke „A Treatise on Conic Sections“ unternahm, sah ich den Grund seines seltenen Erfolgs in der lichtvollen Darstellung derjenigen neueren Methoden, durch welche die analytische Geometrie über das Coordinatensystem des Cartesius hinausgeführt und dann immer mehr zu einer selbständigen Wissenschaft entwickelt worden ist. Dasselbe erschien mir als ein erster und zugleich ein wohlgelungener Versuch zur Lösung einer wichtigen und zeitgemässen, ja drängenden Aufgabe, nämlich der Aufgabe, in einem Buche von mässigem Umfange von den Elementen zu dem gegenwärtigen Standpunkt der wissenschaftlichen Arbeit hinzuführen. Nach meiner besonderen Auffassung dieser Aufgabe und des Verhältnisses deutscher Studirenden zu ihr wagte ich zugleich mit Billigung und unter freundschaftlicher Förderung des Verfassers eine Reihe von Veränderungen und Erweiterungen, insbesondere die Einführung des Systems der trimetrischen Liniencoordinaten und die des wichtigen Instruments der Determinanten; denn nur dadurch schien mir das Buch jenem Zwecke der Einführung in die gegenwärtige wissenschaftliche Situation der analytischen Geometrie ganz entsprechen zu können.

Diese Ueberzeugung ist seitdem in mir nur noch befestigt worden.

Beim Erscheinen dieser neuen Ausgabe ist es mir vor Allem Bedürfniss, meiner Dankbarkeit Ausdruck zu geben für die Theilnahme, welche so viele werthe Fachgenossen in Nähe und Ferne und insbesondere mehrere der hervorragendsten Gelehrten meinem Buche gewidmet haben. Möge sie mir und ihm auch in

a*

der Folge erhalten bleiben! Den ausführlichen inhaltreichen Briefen der Herren Möbius, Hesse und des seitdem leider schon der Wissenschaft entrissenen Joachimsthal danke ich das erste Gefühl der Sicherheit darüber, dass im Allgemeinen der eingeschlagene Weg der rechte sei und zugleich die mir ebenso werthvolle Kenntniss einiger von ihren abweichenden Wünschen. In gleicher Weise bin ich durch die ausdauernde Theilnahme der Herren Aronhold, Cayley und Cremona und durch die reichen brieflichen und literarischen Mittheilungen meines verehrten Freundes Clebsch gefördert worden. Durch die sorgfältige Beachtung der mir so bekannt gewordenen Wünsche und Rathschläge glaube ich am besten dem grösseren mathematischen Publikum zu dienen, welches diess Buch so freundlich aufgenommen hat, dass es nach kaum mehr als vier Jahren gänzlich vergriffen war. Die wesentlich veränderte zu einem guten Theil neugeschriebene IV. Auflage des Originals (1863) kam diesem Bestreben gleichfalls höchst wirksam zu Hilfe; denn in ihr hat der Autor durch stärkere Betonung des Princips der Dualität und durch Hinzufügung eines inhaltreichen Kapitels über die Invarianten und Covarianten sein Werk in demselben Sinne erweitert, wenn er auch den von mir eingeschlagenen Weg insofern nicht gegangen ist, als er die Determinanten und die Liniencoordinaten ausschliesst. Endlich haben seine freundschaftlichen Briefe mir einige werthvolle Notizen auch für diese neue Ausgabe zugebracht.

So ist dieselbe fast ein neues Buch zu nennen. In den ersten Kapiteln sind die pädagogisch glücklichen Veränderungen in der Anordnung des Stoffes befolgt, welche die IV. Auflage des Originals gab. In den Kapiteln V bis XIII sodann, in welchen sonst nur in Einzelheiten geändert ist, macht die vorliegende Ausgabe den nun wohl zeitgemässen Uebergang zu der Indicesbezeichnung, die durch die Determinantentheorie geradezu gefordert und deshalb in den deutschen wissenschaftlichen Arbeiten jetzt fast ausnahmslos benutzt wird. Die Unbequemlichkeit, die ein solcher Wechsel der Bezeichnungsweise für denjenigen mit sich bringt, der in eine andere eingewöhnt war, schätze ich nicht klein; den Gewinn der Consequenz und logischen Durch-

sichtigkeit derselben halte ich aber für gross genug, sie aufzuwiegen; die beiden Bände der Vorlesungen über die analytische Geometrie von Hesse (Leipzig, Teubner 1861 und 1864) haben der Methode der Indices sicher schon auch in weiteren Kreisen Freunde gewonnen.

Während sodann in der ersten Ausgabe die Determinanten erst im XV. Kapitel eingeführt wurden, erscheinen sie nun bereits im IV. gleichzeitig mit den trimetrischen Coordinatensystemen und dienen mit zur Begründung der das Princip der Dualität so rein ausprägenden Systeme der Verhältnisscoordinaten; die Anwendungen auf die Geometrie des Punktes und der geraden Linie erscheinen nun an dem ihnen zukommenden Orte, und es entspricht ganz der natürlichen Beziehung der Determinanten zu den homogenen und allgemeinen Gleichungen und ist hierdurch genügend vorbereitet, wenn sie später mit den allgemeinen Methoden in der Theorie der Kegelschnitte wieder auftreten.

In den Theilen des Buches aber, welche den letzteren gewidmet sind — der grösseren Hälfte desselben — sind tiefgehende Veränderungen in der Anordnung des Stoffes und bedeutende Erweiterungen des Materials vorgenommen worden, um die Vollständigkeit und Geschlossenheit der methodischen Entwickelung zu erhöhen. Das XIV. Kapitel der ersten Ausgabe ist einer natürlichen gruppenweisen Sonderung des Stoffes entsprechend in vier Kapitel (XV—XVIII) getrennt, es ist aber zugleich die vollständige Entwickelung der harmonischen und auf das Doppelverhältniss bezüglichen Eigenschaften, welche früher den 2. Abschnitt des Schlusskapitels (XVI Geometrische Methoden) bildete, an der gehörigen Stelle (Kap. XVI, XVII) denselben eingefügt und diesen Eigenschaften dadurch die ihrer Wichtigkeit entsprechende centrale Stellung gegeben worden. Durch diese Veränderung ist alles Folgende wesentlich bedingt. Denn nach dem Kap. XIX von der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades folgt das neue Kapitel XX von den Invarianten und Covarianten der binären Formen oder die rein analytische Theorie der Grundgebilde erster Stufe und hierdurch begründet und erweitert das Kapitel XXI von den Invarianten und Covarianten der ternären Formen oder der Sy-

steme von Kegelschnitten; hier ist auch der Transformation zweier Kegelschnitte auf das gemeinschaftliche System harmonischer Pole die gebührende Aufmerksamkeit zugewendet worden. Die Anwendungen der Invariantentheorie auf die Hauptaxentransformation, auf die Charaktere der individuellen Kegelschnitte, die Bestimmung der Brennpunkte, etc. sind aber im Kapitel XXII als Vorbereitungen zur analytischen Theorie der Metrik vereinigt und mit der Betrachtung der linearen Substitutionen unter dem Gesichtspunkt der geometrischen Verwandtschaften verbunden worden. Im Kapitel XXIII und XXIV schliessen sich daran die speciellen Methoden der reciproken Polaren und der Projection und am Schluss der Darstellung der ersteren ist auch auf andere geometrische Verwandtschaften einige Rücksicht genommen worden. Mit dem XXV. Kapitel von der Bestimmung der Kegelschnitte und der Methode der Charakteristiken schliesst sodann die Entwickelung; denn diess Kapitel führt am weitesten über die Theorie der Kegelschnitte hinaus zu der der höheren Curven. Auf den Zusammenhang, in welchem die analytische Begründung der Geometrie des Maasses (Art. 366 f.) in diesem Entwickelungsgange erscheint, glaube ich besonderes Gewicht legen zu dürfen; denn die analytische Untersuchung in allgemeinster Form giebt statt der analytischen Behandlung gewisser Theile der Geometrie ein vollständiges System der analytischen Geometrie erst dadurch, dass sie auch die Entwickelung dieser durch die Elemente längstbekannten und scheinbar endgültig erledigten metrischen Grundbegriffe als ihre Consequenzen und zugleich als Specialisirungen der wahrhaft allgemeinen Anschauungen nachweisst. Auch die grossen Principien der Dualität und Continuität erhalten von da aus neues Licht.

So enthalten nun die Kapitel IV, X, XV bis XXV die Entwickelung der allgemeinen Methoden, letztere in geschlossener Reihe an den Kegelschnitten im Allgemeinen, erstere beide, als Vorläufer, in den speciellen Fällen der geraden Linie, des Punktes und des Kreises; dagegen geben die Kapitel I bis III, V bis IX, XI bis XIII vollständig das, was von einem ausführlichen elementaren Cursus der analytischen Geometrie gefordert werden kann. Dabei glaube ich anführen zu müssen, dass die Art. 66, 70 bis 83, 293, 296 bis

301, 303, 313, 318, 319, 325, 330 bis 345, 357, 358, 362, 366 bis 380, 397 bis 401, 408, 416, 424 bis 433 nicht im Original enthalten sind.

Ich wünsche hoffen zu dürfen, dass ich dem Ziele einer in methodischer Hinsicht vollständigen analytischen Geometrie der Kegelschnitte um einen Schritt näher gekommen sei; denn ich habe der Vorbereitung dieser neuen Ausgabe durch länger als ein Jahr alle meine Musse gewidmet. Zugleich ist die Vergrösserung der pädagogischen Brauchbarkeit durch bedeutende Vermehrung der Aufgabensammlung, namentlich in der zweiten Hälfte (Kapitel XV f.) angestrebt worden; so dass nun die vorgetragenen Methoden durch über 800 geordnete Aufgaben erläutert erscheinen.

Endlich habe ich den Bedürfnissen weiteren Studiums durch die Verweisung auf die classischen Hauptwerke des Faches im Texte und die angehängten Quellen- und Literatur-Nachweisungen zu entsprechen gesucht; ich habe aus den Schätzen der wissenschaftlichen Zeitschriften wichtige und beachtenswerthe neuere Arbeiten sowohl als werthvolle ältere angeführt, die mit dem Texte methodisch oder nach dem behandelten Material in Verbindung stehen, und dabei der Pflicht genügt, die Quellen zu bezeichnen, aus welchen ich geschöpft habe.

Aber einer derselben, der ich mehrere werthvolle Bereicherungen dieser Arbeit verdanke, muss ich hier schliesslich besonders gedenken; es ist ein Manuscript nach seinen in Giessen (1863) gehaltenen Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene, welches mir Prof. Clebsch zur Benutzung anvertraut hat. Ich muss anführen, dass die Ableitung der beiden Systeme homogener Coordinaten in Art. 80, ein Theil der Entwickelungen der Art. 296, 325, 331, 332, 358 (auch Aufg. 4 dieses Artikels), 362, 375 und 379 diesem Manuscripte entnommen sind.

Damit empfehle ich von Neuem diese Arbeit der Beachtung des mathematischen Publikums und wünsche, dass sie ihren Theil beitrage zur Verbreitung und Entwickelung der analytischen Geometrie.

Prag im Mai 1866.

Dr. Wilhelm Fiedler.

Inhaltsverzeichniss.

I. Kapitel.

Der Punkt. (19 Aufg.)

II. Kapitel.

Die gerade Linie. (56 Aufg.)

III. Kapitel.

Aufgaben über die gerade Linie. (53 Aufg.)

IV. Kapitel.

Von der Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung der geraden Linie und den trimetrischen Coordinatensystemen. (27 Aufg.)

V. Kapitel.

Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen. (12 Aufg.)

VI. Kapitel.

Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung. (13 Aufg.)

X. Kapitel.

Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf die Gleichung des Kreises. (10 Aufg.)

XI. Kapitel.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades als Centralgleichung: Ellipse und Hyperbel. (49 Aufg.)

XII. Kapitel.

Die Parabel. (4 Aufg.)

XIII. Kapitel.

Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte. (88 Aufg., vergl. p. 589, Anm.)

XIV. Kapitel.

Die Methode des Unendlich-Kleinen. (14 Aufg.)

XV. Kapitel.

Vom Gebrauch der abkürzenden Symbolik in der Theorie der Kegelschnitte. (24 Aufg.)

XVI. Kapitel.

Von den projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte. (72 Aufg.)

XVII. Kapitel.

Von den speciellen Formen der homogenen Gleichung zweiten Grades. (46 Aufg.)

XVIII. Kapitel.

Von der Theorie der Enveloppen. (26 Aufg.)

XIX. Kapitel.

Von der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades. (33 Aufg.)

XX. Kapitel.

Von den Invarianten und Covarianten der Systeme erster Stufe oder binärer Formen. (20 Aufg.)

XXI. Kapitel.

Von den Invarianten und Covarianten der Systeme von Kegelschnitten oder von ternären Formen. (58 Aufg.)

XXII. Kapitel.

Von der analytischen Grundlage der metrischen Relationen und der Theorie der projectivischen Verwandtschaften. (39 Aufg.)

XXIII. Kapitel.

Von der Methode der reciproken Polaren. (57 Aufg.)

XXIV. Kapitel.

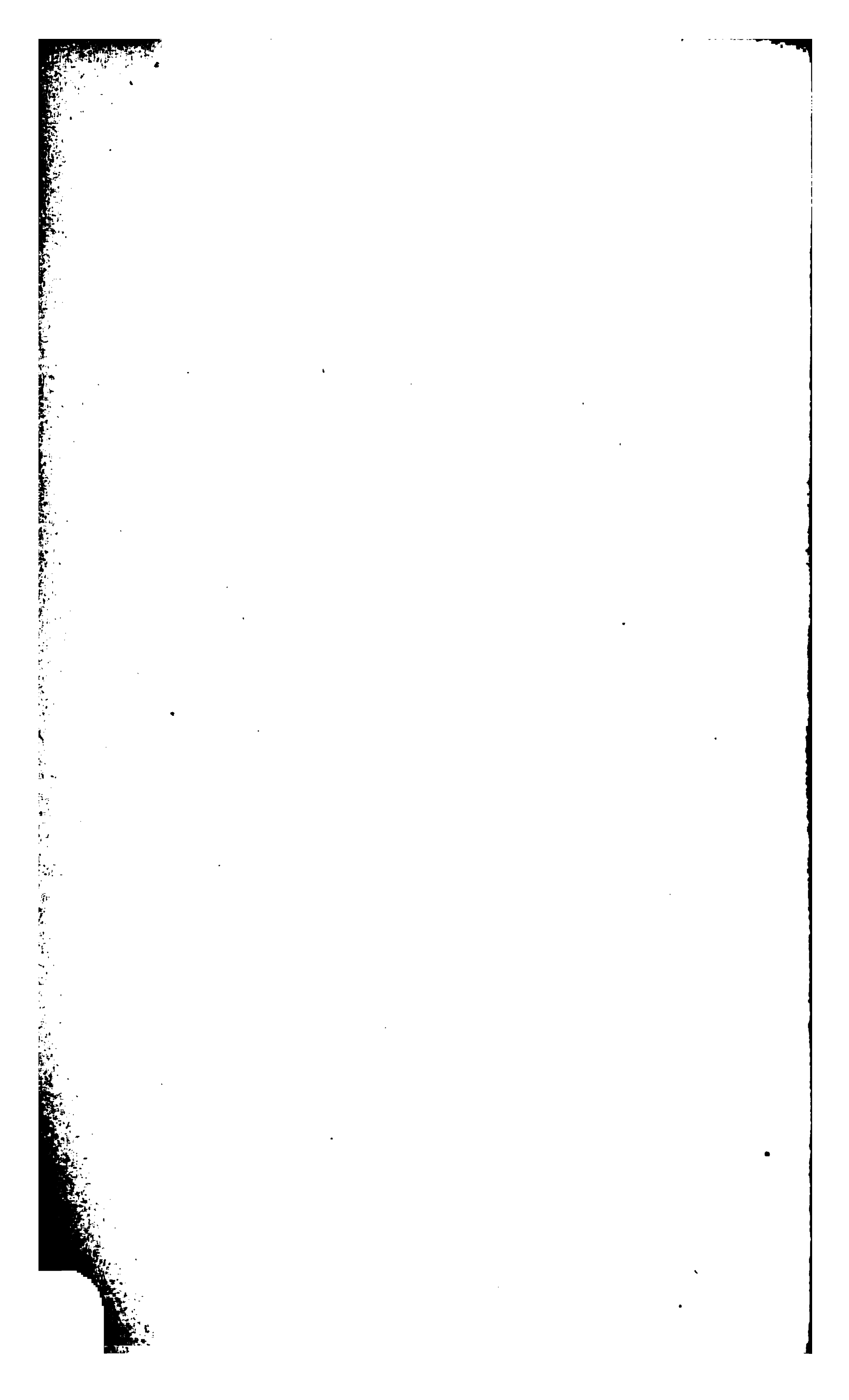
Von der Methode der Projection. (35 Aufg.)

XXV. Kapitel.

Von der Bestimmung der Kegelschnitte und der Methode der Characteristiken. (6 Aufg.)

Verzeichniss bemerkter Druckfehler.

Seite 46, Zeile 7 v. u. lies in einer statt einer.
„ 46, „ 2 v. u. „ y' statt y''.
„ 47, „ 5 v. u. „ $\alpha - c$ statt $\alpha - b$.
„ 48, „ 15 v. u. „ $\beta - y'$ „ $\beta - y$.
„ 65, „ 2 u. 3 v. u. setze nach AOP ein Komma.
„ 67, „ 15 v. u. schalte nach solche ein (perspectivische).
„ 76, „ 4 v. u. lies Art. 54 statt Art. 00.
„ 113, Anmerkung Zeile 3 v. u. lies ergiebt sich statt ergiebt.
„ 117, Zeile 14 v. o. lies $a_{13}a_{23}$ statt $a_{13}a_{23}^2$.
„ 133, „ 25 v. o. „ Aufg. 1 statt Aufg.
„ 170, in der Ueberschrift lies Art. 139 statt Art. 138.
„ 185, Zeile 1 lies c^2 statt a_{33}^2.
„ 188, „ 20 v. o. lies Punkt- statt Punkte-.
„ 248, „ 22 v. u. im Nenner lies $- 2p\varrho \cos\alpha \cos(\alpha - \theta)$ statt $- 2p\varrho \cos(\alpha - \theta)$.
„ 253, „ 8 v. u. lies $\frac{F}{2}$ statt $2F$ u. $2F$ statt $8F$.
„ 256, „ 24 v. o. lies Hyperbeln statt Hyperbel.
„ 256, Anmerkung lies Einundzwanzigsten statt nächsten und füge hinzu Art. 351, Aufg. 2.
„ 261, Aufg. 15 siehe unter Quellen- und Literatur-Nachweisungen p. 589, Anmerk.
„ 291, Zeile 17 v. o. lies $a_{22}y^2$ statt $a_{22}y$.
„ 295, „ 12 v. o. „ die sechs statt sechs.
„ 321, „ 12, 14 u. 15. v. u. setze $\mp$ statt $\pm$.
„ 397, „ 7 v. u. füge hinzu: Vergl. Art. 310, Aufg. 8.
„ 418, Aufg. 5 lies 56 statt 58.
„ 434, „ 8 v. u. lies das statt diess.
„ 458, In der Ueberschrift Art. 356 statt 357.
„ 458, Zeile 5 v. u. statt Punkt lies: , während seine übrigen Ecken in dem festen Kegelschnitt $V=0$ liegen.
„ 492, „ 16 v. o. streiche aus das Wort durch.
„ 496, „ 6 v. o. lies den statt der.
„ 503, letzte Zeile, fehlt vor der ersten Determinante links der Verticalstrich.
„ 543, „ 3 v. u. füge hinzu (Kreisverwandschaft; circularer Inversion.)

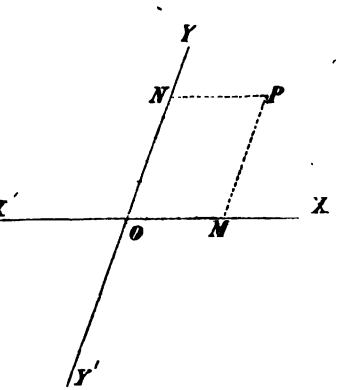


Erstes Kapitel.

Der Punkt.

1. Die folgende Methode zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene ward von Fermat und Des Cartes (Géométrie, 1637) und durch die Geometer in der Folge allgemein gebraucht*).

Man nimmt an, dass die Lage von zwei geraden Linien XX', YY' gegeben sei, welche sich im Punkte O durchschneiden. Wenn man dann durch irgend einen Punkt P ihrer Ebene PM, PN parallel zu YY' und XX' respective zieht, so erfährt man offenbar aus der Lage des Punktes P die Längen der Parallelen PM, PN, und würde umgekehrt aus den bekannten Längen von PM und PN die Lage des Punktes P bestimmen. Setzt man z. B. voraus, es sei $PN = a$, $PM = b$ gegeben, so hat man $OM = a$ und $ON = b$ abzutragen und die zu YY', XX' respective Parallelen MP, NP zu ziehen, welche sich alsdann in dem Punkte P durchschneiden. Es ist üblich, die Länge der zu YY' parallelen Linie PM durch y und die der zu XX' parallelen Linie PN durch x zu bezeichnen und man sagt von dem Punkte P, dass er durch die Gleichungen $x = a$, $y = b$ bestimmt ist.



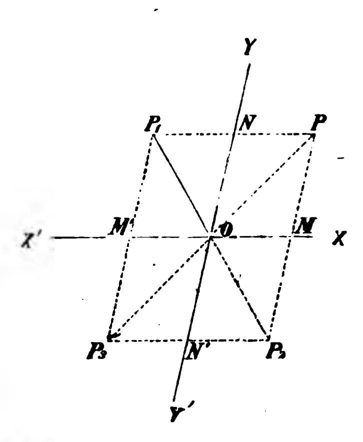
*) Vergl. „Historische Bemerkungen" von R. Baltzer (III) in den Berichten der mathem. phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1865.

2. Die Parallelen MP, NP werden die Coordinaten des Punktes P genannt; die Parallele zu YY' insbesondere gewöhnlich die Ordinate und die Parallele zu XX', welche dem durch diese bestimmten Abschnitte OM gleich ist, die Abscisse des Punktes P. Die festen geraden Linien XX' und YY' werden als die Coordinaten-Axen und der Punkt 0, in welchem sie sich durchschneiden, als Anfangspunkt bezeichnet. Man nennt die Axen rechtwinklig oder schiefwinklig, je nachdem der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, ein rechter ist oder nicht.

Man sieht leicht, dass die Coordinaten der Punkte M, N, 0 in der vorigen Figur respective sind

$$x = a,\ y = 0;\ x = 0,\ y = b;\ x = 0,\ y = 0.$$

3. Damit den Gleichungen $x = a$, $y = b$ nur durch einen Punkt genügt werde, ist es nöthig nicht allein die Grösse, sondern auch den durch ein Vorzeichen bestimmten Sinn der Coordinaten zu beachten. Ohne Rücksicht auf die Vorzeichen müssen wir $OM = a$, $ON = b$ zu beiden Seiten des Anfangspunktes in den Axen abtragen und jeder der vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 genügt den Gleichungen $x = a$, $y = b$.



Es ist aber möglich, zwischen den Linien OM, OM', welche der Grösse nach gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt sind, algebraisch zu unterscheiden, indem man ihnen verschiedene Vorzeichen beilegt. Wir setzen fest, dass Längen, die in einem bestimmten Sinne gemessen als positiv betrachtet werden, als negativ gelten, wenn sie im entgegengesetzten gemessen sind. Es ist dabei willkürlich, in welcherlei Sinn wir sie als positiv ansehen; es ist aber üblich, das nach rechts gemessene OM und das nach oben gemessene ON als positiv und die im respective entgegengesetzten Sinne gemessenen OM' und ON' als negativ zu betrachten. Vermittelst dieser Bestimmungen sind die vier Punkte P, P_1, P_2, P_3 leicht zu unterscheiden; ihre Coordinaten sind respective

$$x=+a,\ y=+b;\ x=-a,\ y=+b;\ x=+a,\ y=-b;\ x=-a,\ y=-b.$$

Diese Unterscheidung kann dem Anfänger keine Schwierigkeit machen, von dem vorausgesetzt wird, dass er mit der Trigonometrie vertraut ist.

Man bezeichnet abkürzend Punkte von den Coordinaten $x=a$, $y=b$ oder $x=x'$, $y=y'$ als die Punkte (a, b) oder x', y'. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Punkte $(+a, +b)$ und $(-a, -b)$ in einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie und von ihm in entgegengesetztem Sinn gleichweit entfernt liegen.

4. **Die Entfernung zweier Punkte $x'y'$, $x''y''$ unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen durch ihre Coordinaten auszudrücken.**

Nach Euklid I, 47 ist

$$PQ^2 = PS^2 + SQ^2;$$

est ist aber

$$PS = PM - QM' = y' - y'',$$
$$QS = OM - OM' = x' - x'';$$

also $\delta^2 = PQ^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2.$

Um die Entfernung irgend eines Punktes vom Anfangspunkte auszudrücken, müssen wir $x''=0$, $y''=0$ setzen und erhalten $\delta^2 = x'^2 + y'^2$.

5. In dem Folgenden werden wir zwar nur selten Ursache haben, von schiefwinkligen Coordinaten Gebrauch zu machen, weil im Allgemeinen die Formeln bei der Anwendung rechtwinkliger Coordinaten von grösserer Einfachheit sind; da jedoch schiefwinklige Coordinaten zuweilen mit Vortheil angewendet werden, so wollen wir die hauptsächlichsten Formeln in ihrer allgemeinsten Gestalt geben.

Setzen wir in der letzten Figur den Winkel YOX schief und $=\omega$ voraus, so ist

$$\angle PSQ = 180^0 - \omega, \text{ und } PQ^2 = PS^2 + QS^2 - 2PS.QS.\cos PSQ$$

oder

$$PQ^2 = (y'-y'')^2 + (x'-x'')^2 + 2(y'-y'')(x'-x'')\cos\omega.$$

Das Quadrat der Entfernung eines Punktes $(x'y')$ vom Anfangspunkt ist $= x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos \omega$.

Beim Gebrauch dieser Formeln muss auf die Vorzeichen der Coordinaten genau geachtet werden. Wenn der Punkt Q z. B. in der Winkelfläche XOY' läge, so wäre das Vorzeichen von y'' zu wechseln und die Linie PS wäre statt der Differenz von y', y'' die Summe derselben.

Aufg. 1. Die Coordinaten der Ecken eines Dreiecks sind $x' = 2$, $y' = 3$; $x'' = 4$, $y'' = -5$; $x''' = -3$, $y''' = -6$; man soll unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen die Längen seiner Seiten berechnen.

Aufl. $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

Aufg. 2. Man soll die Längen der Seiten eines Dreiecks berechnen, dessen Ecken dieselben Coordinaten haben wie vorher, unter der Voraussetzung des Axenwinkels von 60^0.

Aufl. $\sqrt{52}$, $\sqrt{57}$, $\sqrt{151}$.

Aufg. 3. Man soll ausdrücken, dass die Entfernung des Punktes (xy) vom Punkte $(2, 3)$ gleich 4 ist.

Aufl. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Aufg. 4. Man soll ausdrücken, dass der Punkt (xy) von den Punkten $(2,3)$ und $(4,5)$ gleichweit entfernt sei.

Aufl. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 4)^2 + (y - 5)^2$ oder $x + y = 7$.

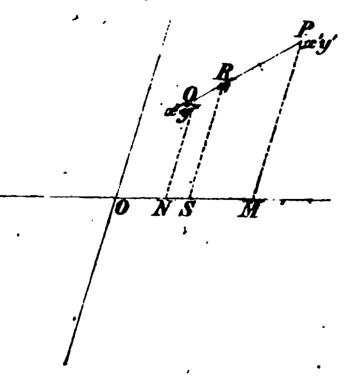
Aufg. 5. Man bestimme den Punkt, welcher von den Punkten $(2,3)$, $(4,5)$ und $(6,1)$ gleich weit entfernt ist.

Aufl. Man erhält zur Bestimmung der unbekannten Grössen (x, y) zwei Gleichungen und findet $x = \frac{13}{3}$, $y = \frac{8}{3}$ und die gemeinschaftliche Entfernung ist $\frac{\sqrt{50}}{3}$.

6. Da die Entfernung zwischen zwei Punkten als eine Quadratwurzel gefunden wird, so hat sie wesentlich ein doppeltes Vorzeichen. Wenn die Entfernung PQ von P nach Q gemessen als positiv betrachtet wird, so muss die von Q nach P gemessene Entfernung QP als negativ angesehen werden. So lange wir indess nur die Entfernung zwischen zwei Punkten selbst betrachten, so hat es keinen Zweck, ihr ein Vorzeichen beizulegen, als welches andeutet, dass diese Entfernung zu einer andern addirt oder von einer solchen subtrahirt werden solle. Sind aber drei Punkte P, Q, R in gerader Linie gegeben und kennt man die Entfernungen PQ, QR, so ist $PR = PQ + QR$. Und mit der nun begründeten Unterscheidung bleibt diese Relation wahr, auch wenn der Punkt R zwischen den Punkten P und Q liegt; denn

in diesem Falle sind PQ und QR in entgegengesetztem Sinne gemessen und PR ist, obwohl ihre arithmetische Differenz, zugleich ihre algebraische Summe. Den Fall ausgenommen, in welchem die Linien zu einer der Axen parallel sind, ist keine Festsetzung darüber getroffen, in welchem Sinne die positiven und negativen Strecken zu messen sind.

7. **Aus den Coordinaten zweier Punkte $x'y'$, $x''y''$ die Coordinaten desjenigen Punktes abzuleiten, der ihre Verbindungslinie in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ theilt.**



Sind x, y die Coordinaten des Punktes R, welchen wir zu bestimmen suchen, so ist

$$m:n = PR:RQ = MS:SN$$

oder $m:n = x' - x : x - x''$,

$$mx - mx'' = nx' - nx,$$

also $$x = \frac{mx'' + nx'}{m+n};$$

und in derselben Weise

$$y = \frac{my'' + ny'}{m+n}.$$

Wird der Theilpunkt als ein äusserer gedacht, so haben wir

$$m:n = x - x' : x - x''$$

und daher $$x = \frac{mx'' - nx'}{m-n}, \qquad y = \frac{my'' - ny'}{m-n}.$$

Wir können hiernach die Fälle des innern und äusseren Theilpunktes durch die Bestimmung von einander unterscheiden, dass die Theilung einer Linie in dem Verhältniss $m: +n$ die innere Theilung in diesem Verhältniss und die Theilung in dem Verhältniss $m: -n$ die äussere Theilung in demselben Verhältniss bezeichnen soll; denn die Formeln für den äusseren Theilpunkt werden aus denen für den inneren durch die Veränderung des Vorzeichens von n erhalten. Wir wählen für den innern Theilpunkt das Theilungsverhältniss $m: +n$ wegen der Uebereinstimmung im Sinne, welchen der Uebergang von dem einen Endpunkte zum Theilpunkt und von diesem zum andern Endpunkte der geradlinigen Strecke zeigt; indess wir für den äussern Theilpunkt das Theilungsverhältniss $m: -n$ angemessener fin-

den, weil hier der Uebergang von dem einen Endpunkt der Strecke zum Theilpunkt in dem entgegengesetzten Sinne von dem erfolgt, in welchem man von diesem letztern zum andern Endpunkt der Strecke gelangt. Die Grundformeln zur Bestimmung der Coordinaten des Theilpunkts sind demnach

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$$

und gelten für positives Theilungsverhältniss oder gleiche Vorzeichen von m und n für den innern und für ungleiche Vorzeichen von m und n für den äussern Theilpunkt.

In der geraden Linie (x', y'), (x'', y'') ist jeder Punkt durch das Verhältniss $\pm \frac{m}{n}$ bestimmt, in welchem die Strecke zwischen jenen Punkten von ihm getheilt wird.

Aufg. 1. Die Coordinaten des Mittelpunkts der Linie zu finden, welche die Punkte $x'y'$, $x''y''$ verbindet.

Aufl. $x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}.$

Aufg. 2. Die Coordinaten der Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks zu finden, welches die Punkte (2, 3), (4, — 5), (— 3, — 6) zu Ecken hat.

Aufl. $(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (3, -1)$.

Aufg. 3. Die Verbindungslinie der Punkte (2, 3), (4, — 5) ist in drei gleiche Theile getheilt; man soll die Coordinaten des dem ersten Punkte zunächst liegenden Theilpunktes finden.

Aufl. $x = \frac{8}{3}, \ y = \frac{1}{3}$.

Aufg. 4. Die Ecken eines Dreiecks sind die Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, man soll die Coordinaten des Punktes angeben, der das erste Drittheil der Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite angiebt.

Aufl. $x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}, \quad y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$

Aufg. 5. Für das in Aufg. 2 gegebene Dreieck sind die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten begegnen.

Aufl. $x = 1, \ y = -\frac{8}{3}$.

Aufg. 6. In einem Dreieck ist eine Seite in dem Verhältniss $m : n$ und die Verbindungslinie dieses Theilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke in dem Verhältniss $m + n : l$ getheilt; die Coordinaten dieses letzteren Theilpunktes sind zu berechnen.

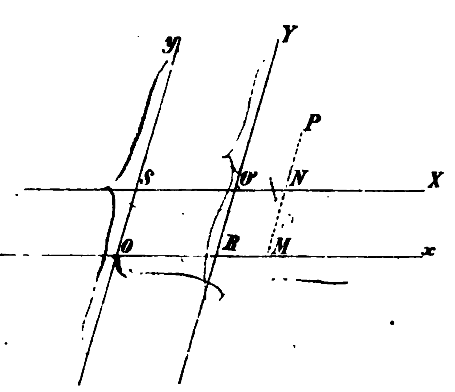
Aufl. $x = \frac{lx' + mx'' + nx'''}{l + m + n}, \quad y = \frac{ly' + my'' + ny'''}{l + m + n}.$

8. Es ist oft nothwendig, aus den bekannten Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein Paar Axen seine auf irgend ein andres Paar von Axen bezogenen Coordinaten abzuleiten. Diese

Operation wird die **Transformation der Coordinaten** genannt.

Wir unterscheiden drei Fälle und betrachten sie getrennt. Zuerst setzen wir den Anfangspunkt geändert, aber die neuen Axen den alten parallel voraus; zweitens setzen wir voraus, dass die Richtung der Axen sich verändere, aber der Anfangspunkt unverändert bleibt; und drittens untersuchen wir den Fall, wo beides, der Anfangspunkt und die Richtung der Axen, sich verändert.

Erster Fall. Die neuen Axen sind den alten parallel. In der Figur sind die alten Axen Ox, Oy und die neuen $O'X$ und $O'Y$. Die Coordinaten des neuen Anfangspunktes O' in Bezug auf die alten Axen sind x', y' oder $O'S = x'$, $O'R = y'$. Sind die alten Coordinaten durch x, y, die neuen durch X, Y bezeichnet, so haben wir



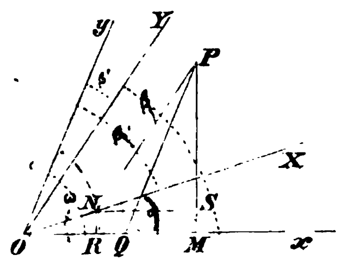
$$OM = OR + RM \text{ und } PM = PN + NM,$$

d. h. $\qquad x = x' + X \text{ und } y = y' + Y.$

Diese Formeln sind offenbar gleich richtig für rechtwinklige, wie für schiefwinklige Axen.

9. Zweiter Fall. Die Richtungen der Axen sind verändert, während der Anfangspunkt unverändert ist.

Seien Ox, Oy die ursprünglichen Axen, so dass $OQ = x$, $PQ = y$ ist; die neuen Axen dagegen OX, OY und also $ON = X$, $PN = Y$. Bilden dann die Axen OX, OY respective mit der alten Axe der x die Winkel α, β und mit der alten Axe der y die Winkel α', β' und ist der Winkel xOy, welchen diese ursprünglichen Axen mit einander bilden, gleich ω, so ist wegen



$$xOX + XOy = xOy$$

die Relation $\alpha + \alpha' = \omega$ gültig und ebenso $\beta + \beta' = \omega$.

Man erhält nun die Formeln der Transformation am einfachsten dadurch, dass man die Normalen von P zu den Original-Axen mittelst der alten wie der neuen Coordinaten ausdrückt. Es ist $PM = PQ \sin PQM$, also $PM = y \sin \omega$; aber auch

$$PM = NR + PS = ON \sin NOR + PN \sin PNS,$$

und daher $\quad y \sin \omega = X \sin \alpha + Y \sin \beta.$

In gleicher Weise findet man

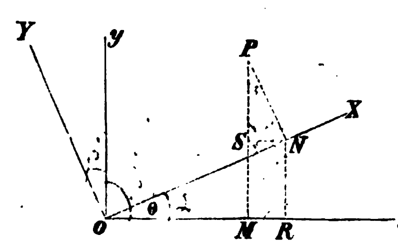
$$x \sin \omega = X \sin \alpha' + Y \sin \beta',$$

oder $\quad x \sin \omega = X \sin (\omega - \alpha) + Y \sin (\omega - \beta).$

In der Figur sind die Winkel α, β, ω alle in dem nämlichen Sinne der Drehung von Ox aus gemessen und ebenso sind α', β', ω' alle auf derselben Seite von Oy. Wenn einer dieser Winkel auf der entgegengesetzten Seite liegt, so muss man ihn mit dem negativen Zeichen einführen. Wenn OY auf der linken Seite von Oy liegt, so ist der Winkel β grösser als ω und β' $(= \omega - \beta)$ ist negativ und daher ist der Coefficient von Y in dem Ausdruck für $x \sin \omega$ negativ.

Dies findet statt in dem folgenden speciellen Falle, zu welchem als einem Falle von vielfältigster Anwendung wir eine besondere Figur geben.

Man soll von einem System rechtwinkliger Coordinaten zu einem andern System rechtwinkliger Coordinaten transformiren, welches mit jenem den Winkel θ macht.



In diesem Falle ist

$$\alpha = \theta,\ \beta = 90^0 + \theta,$$
$$\alpha' = 90^0 - \theta,\ \beta' = -\theta;$$

die allgemeinen Formeln werden

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta,$$
$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta;$$

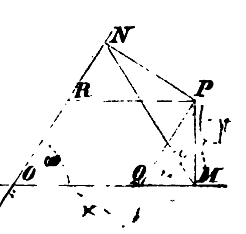
und man erkennt die Wahrheit dieser Formeln direct aus der Bemerkung, dass

$$y = PS + NR, \quad x = OR - SN$$

sind, während man hat

$$PS = PN \cos \theta,\ NR = ON \sin \theta,\ OR = ON \cos \theta,\ SN = PN \sin \theta.$$

Es giebt einen andern Fall der Transformation, welcher oft in der Anwendung vorkommt: Von schiefwinkligen zu rechtwinkligen Coordinaten zu transformiren, wenn die ursprüngliche Axe der x beibehalten wird.



Wir können die allgemeinen Formeln anwenden, indem wir setzen $\alpha = 0$, $\beta = 90^0$, $\alpha' = \omega$, $\beta' = 90^0$. Aber es ist einfacher, die Formeln direct zu untersuchen. Sind OQ und PQ die ursprünglichen Coordinaten x und y, OM und PM die neuen, und ist $PQM = \omega$, so haben wir

$$Y = y \sin \omega, \; X = x + y \cos \omega.$$

Wir erhalten aus diesen Gleichungen die Ausdrücke für die alten Coordinaten in Function der neuen

$$y \sin \omega = Y, \; x \sin \omega = X \sin \omega - Y \cos \omega.$$

10. Dritter Fall. Indem man die Transformationen der beiden vorigen Artikel combinirt, kann man die auf neue völlig willkürlich gelegene Axen bezogenen Coordinaten eines Punktes finden. Man ermittelt zuerst die Coordinaten in Bezug auf ein Paar Axen, welche durch den neuen Anfangspunkt parallel zu den alten Axen gelegt sind (nach Art. 8) und berechnet sodann aus diesen die auf die geforderten Axen bezüglichen Coordinaten selbst (nach Art. 9). Die allgemeinen Ausdrücke werden gefunden, indem man zu den für x und y im letzten Artikel gegebenen Werthen respective x' und y' addirt.

Aufg. 1. Die Coordinaten eines Punktes genügen der Relation $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$; in welche andre verwandelt sich diese, wenn der Anfangspunkt nach dem Punkte (2, 3) verlegt wird?

Aufl. $X^2 + Y^2 = 31$.

Aufg. 2. Die Coordinaten eines auf rechtwinklige Axen bezogenen Punktes genügen der Relation $y^2 - x^2 = 6$; in welche andre Relation geht diese über, wenn die Halbirungslinien der Winkel zwischen den gegebenen Axen das neue Axensystem bilden?

Aufl. $XY = 3$.

Aufg. 3. Man transformire die Gleichung $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$ von Axen, welche unter dem Winkel von 60^0 geneigt sind, zu den Halbirungslinien der Winkel zwischen den alten Axen.

Aufl. $X^2 - 27Y^2 + 12 = 0$.

Aufg. 4. Man transformire dieselbe Gleichung zu rechtwinkligen Axen, indem man die Axe der x beibehält.

Aufl. $3X^2 + 10Y^2 - 7XY\sqrt{3} = 6.$

Aufg. 5. Will man von einem Systeme rechtwinkliger Axen zu einem andern übergehen, ohne den Anfangspunkt zu verlegen, so muss $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$ sein, weil beide das Quadrat der Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte ausdrücken. Man bestätige dies durch Quadriren und Addiren der im Artikel 9 für X und Y gegebenen Ausdrücke.

Aufg. 6. Man bewähre allgemein, dass

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos xOy = X^2 + Y^2 + 2XY \cos XOY.$$

Wenn wir $X \sin \alpha + Y \sin \beta = L$, $X \cos \alpha + Y \cos \beta = M$ setzen, so können die Ausdrücke des Art. 9 in der Form $y \sin \omega = L$, $x \sin \omega = M \sin \omega - L \cos \omega$ geschrieben werden; also ist $\sin^2 \omega\, (x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega) = (L^2 + M^2) \sin^2 \omega$; aber es ist auch

$$L^2 + M^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos (\alpha - \beta) \text{ und } \alpha - \beta = XOY.$$

11. **Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten wird durch Coordinatentransformation nicht geändert.**

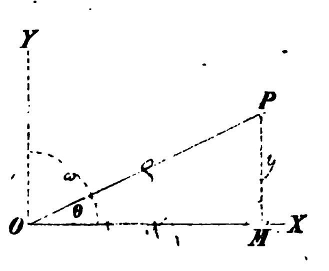
Die Transformation kann den Grad der Gleichung nicht erhöhen; denn wenn die Glieder der höchsten Potenzen in der gegebenen Gleichung x^m, y^m u. s. w. sind, so sind die in der transformirten Gleichung $[x' \sin \omega + x \sin (\omega - \alpha) + y \sin (\omega - \beta)]^m$, $(y' \sin \omega + x \sin \alpha + y \sin \beta)^m$ u. s. w., welche offenbar keine den m. Grad übersteigenden Potenzen von x und y enthalten können. Die Transformation kann aber den Grad der Gleichung auch nicht erniedrigen, weil man durch Transformation der transformierten Gleichung zu den alten Axen nothwendig die ursprüngliche Gleichung wieder erhalten muss, und daher, wenn die erste Transformation den Grad der Gleichung vermindert hätte, die zweite Transformation ihn wieder erhöhen müsste, entgegen dem, was eben bewiesen worden ist.

12. Ausser der Methode zum Ausdruck der Lage eines Punktes, welche wir bisher angewendet haben, wird noch eine andre öfter angewendet.

Wenn ein fester Punkt O und eine feste gerade Linie OX durch ihn gegeben ist, so kennt man die Lage irgend eines Punktes P, wenn man die Länge OP und den Winkel POX angiebt.

Die Linie OP heisst der **Radius vector**, der feste Punkt O wird der **Pol** genannt und die Bestimmungsmethode die Methode der **Polar-Coordinaten**.

Aus den Cartesischen Coordinaten x, y eines Punktes findet man leicht seine Polar-Coordinaten und umgekehrt. Wenn erstens die feste gerade Linie mit der Achse der x zusammenfällt, so ist



$$OP : PM = \sin PMO : \sin POM;$$

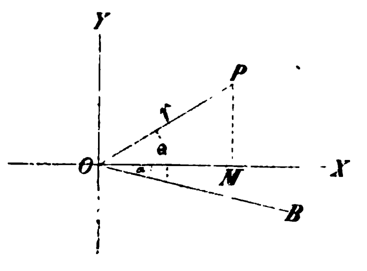
indem man OP durch ϱ, $\angle POM$ durch θ und $\angle YOX$ durch ω bezeichnet, wird

$$PM = y = \frac{\varrho \sin\theta}{\sin\omega}, \text{ und in derselben Weise } OM = x = \frac{\varrho \sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}.$$

Für den gewöhnlicheren Fall rechtwinkliger Coordinaten ist $\omega = 90^0$ und einfacher

$$x = \varrho \cos\theta \text{ und } y = \varrho \sin\theta.$$

Wenn zweitens die feste Linie OB mit der Achse der x nicht zusammenfällt, sondern den Winkel α mit ihr bildet, so ist $\angle POB = \theta$ und $\angle POM = \theta - \alpha$, und in den vorigen Formeln nur $\theta - \alpha$ für θ zu setzen.



Für rechtwinklige Coordinaten ist

$$x = \varrho \cos(\theta - \alpha) \text{ und}$$
$$y = \varrho \sin(\theta - \alpha).$$

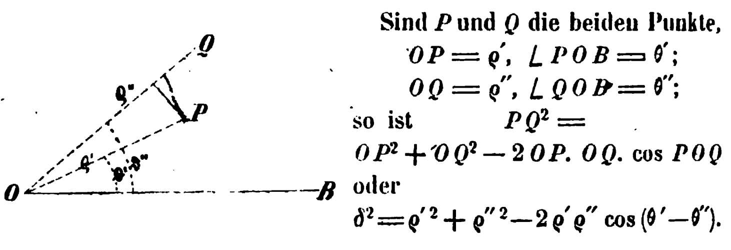
Aufg. 1. Die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten sind in solche für Polar-Coordinaten zu übertragen:

$x^2 + y^2 = 5mx$ *Aufl.* $\varrho = 5m \cos\theta$.
$x^2 - y^2 = a^2$ $\varrho^2 \cos 2\theta = a^2$.

Aufg. 2. Die folgenden Gleichungen in Polar-Coordinaten sind in solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzusetzen:

$\varrho^2 \sin 2\theta = 2a^2$ *Aufl.* $xy = a^2$.
$\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
$\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta = a^{\frac{1}{2}}$ $x^2 + y^2 = (2a - x)^2$.
$\varrho^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta$ $(2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

13. Die geradlinige Entfernung zweier Punkte durch ihre Polar-Coordinaten auszudrücken.



Sind P und Q die beiden Punkte,

$OP = \varrho'$, $\angle POB = \theta'$;

$OQ = \varrho''$, $\angle QOB = \theta''$;

so ist $PQ^2 =$

$OP^2 + OQ^2 - 2\,OP.\,OQ.\cos POQ$

oder

$\delta^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho'' \cos(\theta' - \theta'')$.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

---

14. Wir sahen im letzten Kapitel, dass wir die Lage eines Punktes vermittelst zweier Gleichungen zwischen seinen Coordinaten von der Form $x = a$, $y = b$ bestimmen können. Es ist sicher, dass wir den Punkt gleichfalls bestimmen können, wenn uns irgend zwei Gleichungen des ersten Grades zwischen seinen Coordinaten gegeben sind (Art. 5, Aufg. 5), denn diese sind zwei Gleichungen zwischen zwei unbekannten Grössen und wir können sie auflösen, indem wir nach einander y und x zwischen ihnen eliminiren, um dadurch zwei Resultate von der Form

$$x = a, \quad y = b \text{ zu erhalten.}$$

Zwei Gleichungen höheren Grades zwischen den Coordinaten repräsentiren nicht einen Punkt, sondern eine bestimmte Anzahl von Punkten; denn indem wir y zwischen den Gleichungen eliminiren, erhalten wir eine Gleichung, die nur x enthält; die Wurzeln derselben mögen α_1, α_2, α_3, ... sein. Wenn wir nun irgend einen dieser Werthe (α_1) für x in die ursprünglichen Gleichungen einsetzen, so erhalten wir zwei Gleichungen in y, welche eine gemeinschaftliche Wurzel haben müssen, weil das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen durch die Voraussetzung $x = \alpha_1$ gleich Null wird. Ist diese gemeinschaftliche Wurzel $y = \beta_1$, so genügt der Punkt von den Coordinater

$x = \alpha_1$, $y = \beta_1$ beiden gegebenen Gleichungen zugleich; ebenso der Punkt, dessen Coordinaten $x = \alpha_2$, $y = \beta_2$ sind, u. s. w.

Aufg. 1. Welcher Punkt ist durch die Gleichungen

$3x + 5y = 13$, $4x - y = 2$ gegeben?

Aufl. $x = 1$, $y = 2$.

Aufg. 2. Welche Punkte sind durch die zwei Gleichungen $x^2 + y^2 = 5$, $xy = 2$ dargestellt?

Aufl. Indem wir y zwischen diesen Gleichungen eliminiren, erhalten wir $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x^2 = 1$ und $x^2 = 4$ und daher die vier Werthe von x

$$x = +1, \; x = -1, \; x = +2, \; x = -2.$$

Indem wir einen dieser Werthe in die zweite Gleichung substituiren, erhalten wir den correspondirenden Werth von y.

$$y = +2, \; y = -2, \; y = +1, \; y = -1.$$

Die zwei gegebenen Gleichungen repräsentiren daher die vier Punkte

$$(+1, +2), \; (-1, -2), \; (+2, +1), \; (-2, -1).$$

Aufg. 3. Welche Punkte sind durch die Gleichungen

$x - y = 1$, $x^2 + y^2 = 25$ gegeben?

Aufl. $(4, 3)$, $(-3, -4)$.

Aufg. 4. Welche Punkte bestimmen die Gleichungen

$x^2 - 5x + y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$?

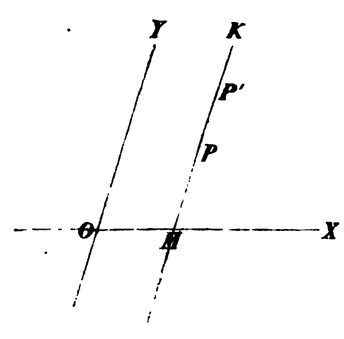
Aufl. $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$.

15. **Eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten bezeichnet einen geometrischen Ort.**

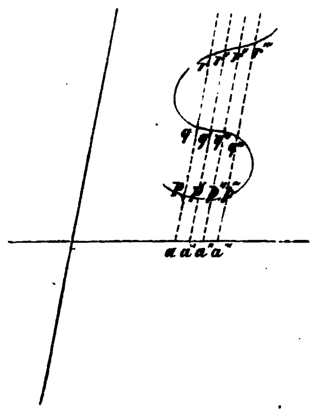
Eine solche Gleichung reicht nicht hin, die zwei unbekannten Grössen x und y zu bestimmen; eine unbegrenzte Anzahl von Systemen von Werthen der x und y kann gefunden werden, welche den gegebenen Gleichungen genügen. Hingegen werden die Coordinaten eines willkürlich angenommenen Punktes sie nicht erfüllen. Die Vereinigung aller der Punkte, deren Coordinaten der Gleichung genügen, bildet einen Ort, welcher als die geometrische Bedeutung der gegebenen Gleichung anzusehen ist.

So sahen wir im 3. Beisp. des Art. 5, dass die Gleichung $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ ausdrückt, die Entfernung des Punktes xy vom Punkte $(2, 3)$ sei gleich 4. Diese Gleichung wird daher erfüllt durch die Coordinaten jedes Punktes in der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser 4 und aus dem Punkte $(2, 3)$ als Centrum; und sie wird nicht erfüllt durch die Coordinaten irgend eines andern Punktes. Dieser Kreis ist also der Ort, welchen die Gleichung darstellt.

Ein noch einfacheres Beispiel erläutert gleichfalls, dass eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten einen Ort bezeichnet. Erinnern wir uns der Construction, durch welche wir die Lage eines Punktes aus den zwei Gleichungen $x = a$, $y = b$ bestimmten; wir nahmen $OM = a$, zogen MK parallel zu OY und trugen darauf $MP = b$ ab, P war der geforderte Punkt. Wäre ein andrer Werth von y gegeben gewesen, $x = a$, $y = b'$, so hätten wir durch das nämliche Verfahren einen Punkt P' gefunden, der noch in der Linie MK, aber in einer andern Entfernung von M liegt. Wenn endlich der Werth von y völlig unbestimmt gelassen ist, und wir nur die eine Gleichung $x = a$ haben, so sehen wir, dass der Punkt P irgendwo in der Linie MK liegt, dass aber seine Lage in ihr nicht bestimmt ist. Die Linie MK ist daher der Ort aller der durch die Gleichung $x = a$ dargestellten Punkte; welchen Punkt wir in der Linie MK auch wählen, das x desselben ist immer $= a$.



16. Wenn allgemein eine Gleichung beliebigen Grades zwischen den Coordinaten gegeben ist, so setzen wir für x irgend einen beliebigen Werth $x = a$ voraus und die Gleichung erlaubt sodann, eine endliche Zahl von Werthen von y zu bestimmen, welche diesem speciellen Werth von x entsprechen; für jeden der Punkte p, q, r ..., deren x der angenommene Werth und deren y eines der aus der Gleichung gefundenen ist, wird der Gleichung genügt. Sodann nehmen wir für x irgend einen andern Werth $x = a'$ und finden in derselben Art eine andre Reihe von Punkten, deren Coordinaten die Gleichung befriedigen; ebenso wenn wir $x = a''$, $x = a'''$ u. s. w. voraussetzen.



Wenn wir so x alle möglichen Werthe nach einander annehmen lassen, so bildet die Vereinigung der wie vorher gefundenen Punkte einen **Ort**, von welchem jeder Punkt den Bedingungen der Gleichung genügt und welcher daher ihr geometrischer Ausdruck ist.

Wir sehen daraus, dass jede mögliche Gleichung zwischen den Coordinaten geometrisch irgend einen Ort darstellen muss, und dass so viel Punkte dieses Ortes bestimmt werden können, als nöthig sind um ihn vollständig darzustellen.

Aufg. 1. Man verzeichne in einer Figur eine Reihe von Punkten, welche der Gleichung $y = 2x + 3$ genügen*).

Für die Werthe von x gleich $-2, -1, 0, 1, 2$ etc. findet man die Werthe von y respective gleich $-1, 1, 3, 5, 7$ etc. und die entsprechenden Punkte liegen alle in einer Geraden.

Aufg. 2. Man verzeichne den durch die Gleichung $y = x^2 - 3x - 2$ dargestellten Ort.

Man findet für x gleich $1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$ die Werthe von y respective gleich $2, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{13}{4}, -4, \frac{17}{4}, -4, -\frac{13}{4}, -2, -\frac{1}{4}, 2$. Wenn man diese Punkte aufträgt, so reichen sie hin, die Form der Curve anzudeuten, welche dann unbegrenzt fortgesetzt werden kann, indem man dem x grössere positive oder negative Werthe giebt.

Aufg. 3. Man stelle die Curve $y = 3 \pm \sqrt{(20 - x - x^2)}$ dar.

Jedem Werthe von x entsprechen zwei Werthe von y; kein Theil der Curve liegt rechts von der geraden Linie $x = 4$ oder links von der geraden Linie $x = -5$, da für grössere positive oder negative Werthe von x der Werth von y imaginär wird.

17. Die ganze Wissenschaft der analytischen Geometrie ist auf die Verbindung gegründet, welche eben als zwischen einer Gleichung und einem Orte bestehend bewiesen worden ist. Wenn eine Curve durch irgend eine geometrische Eigenschaft definirt ist, so wird es unsere Aufgabe sein, aus dieser Eigenschaft eine Gleichung abzuleiten, welche durch die Coordinaten jedes Punktes in der Curve erfüllt wird. Wenn z. B. ein Kreis als der Ort eines Punktes (x, y) definirt ist, dessen Entfernung von einem festen Punkte (a, b) constant gleich r ist, so ist die Gleichung des Kreises in rechtwinkligen Coordinaten nach dem Art. 4

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Wenn andererseits eine Gleichung gegeben ist, so wird

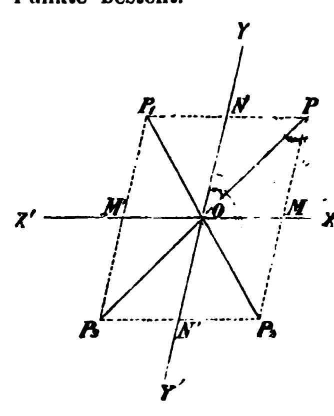
*) Es ist dem Leser die Anwendung von Papier zu empfehlen, das durch gerade Linien in kleine Quadrate getheilt ist. (Logarithmisches Papier.)

es unsere Aufgabe sein, die Figur der durch sie dargestellten Curve zu ermitteln und die geometrischen Eigenschaften derselben abzuleiten. Um dies systematisch auszuführen, classificiren wir die Gleichungen nach ihren Graden und untersuchen mit der einfachsten unter ihnen beginnend die Form und die Eigenschaften der durch sie dargestellten Oerter. Der Grad einer Gleichung wird durch den höchsten Werth der Summe der Exponenten der Veränderlichen in irgend einem Gliede derselben bestimmt. Die Gleichung $xy + 2x + 3y = 4$ ist beispielsweise vom zweiten Grade nach der Exponentensumme des Gliedes xy; ohne dieses Glied wäre sie vom ersten Grade. Man sagt eine Curve sei vom n^{ten} Grade, wenn die Gleichung vom n^{ten} Grade ist, welche sie darstellt.

Wir beginnen mit der Gleichung ersten Grades und werden beweisen, dass dieselbe stets eine gerade Linie darstellt, sowie umgekehrt, dass die Gleichung einer geraden Linie stets vom ersten Grade ist.

18. Wir haben im Artikel 15 den einfachsten Fall einer Gleichung ersten Grades, nämlich die Gleichung $x = a$ interpretirt. Ebenso repräsentirt die Gleichung $y = b$ eine zur Axe OX parallele Linie PN, welche der Axe OY in einer Entfernung $ON = b$ vom Anfangspunkt begegnet.

Indem wir zur Untersuchung des an Einfachheit nächsten Falles übergehen, dass eine gerade Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, betrachten wir die Relation, welche zwischen den Coordinaten der in einer solchen geraden Linie liegenden Punkte besteht.



Wenn wir einen Punkt P in einer solchen Linie annehmen, so ändern bei der Veränderung des Punktes zwar beide Coordinaten PM, OM ihre Länge, aber ihr Verhältniss $PM : OM$ bleibt unverändert, nämlich gleich dem Verhältniss $\sin POM : \sin OPM$; demnach wird die Gleichung

$$y = \frac{\sin POM}{\sin MPO} \cdot x$$

für jeden Punkt der Linie OP er-

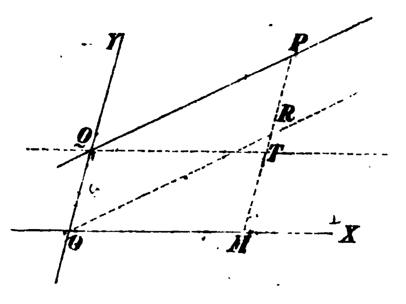
füllt und ist als die Gleichung dieser Linie zu bezeichnen. Wenn umgekehrt die Bestimmung des durch die Gleichung $y = mx$ dargestellten Ortes verlangt wird, so schreiben wir die Gleichung in der Form $\frac{x}{y} = m$; die Aufgabe ist dann, den Ort des Punktes P so zu finden, dass immer, wenn wir durch ihn PM und PN zu zwei festen geraden Linien parallel ziehen, das Verhältniss $PM : PN$ constant ist. Dieser Ort ist nothwendig eine durch den Durchschnittspunkt jener beiden festen Linien gehende gerade Linie OP, welche den von ihnen gebildeten Winkel so theilt, dass

$$\sin POM = m \,.\, \sin PON \text{ ist.}$$

Bei rechtwinkligen Axen ist $\sin PON = \cos POM$ und daher $m = \tan POM$; die Gleichung $y = mx$ repräsentirt daher eine gerade Linie, die durch den Anfangspunkt geht und mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen Tangente $= m$ ist.

19. Eine Gleichung in der Form $y = + mx$ bezeichnet eine gerade Linie OP, welche in den Winkeln YOX, $Y'OX'$ gelegen ist. Eine Gleichung in der Form $y = - mx$ stellt dagegen eine in den Winkeln $Y'OX$, YOX' gelegene gerade Linie dar. Denn aus der Gleichung $y = + mx$ erhellet, dass für positive x auch y positiv ist und dass negativen x auch negative y entsprechen; die durch diese Gleichung repräsentirten Punkte müssen daher ihre Coordinaten entweder beide positiv oder beide negativ haben, und solche Punkte liegen nur in den Winkeln XOY und $X'OY'$. Dem entgegen muss, um der Gleichung $y = - mx$ zu genügen, y für alle positiven x negativ und für alle negativen x positiv sein; Punkte, welche dieser Gleichung genügen, haben daher ihre Coordinaten von verschiedenem Vorzeichen und liegen nothwendig in den Winkeln $Y'OX$ und YOX'.

20. Um nun zu untersuchen, wie eine in Bezug auf die Axen völlig willkürlich gelegene gerade Linie PQ zu repräsentiren ist, ziehen wir durch den Anfangspunkt OR parallel zu PQ und bezeichnen den Schnittpunkt der Ordinate MP mit OR durch R. Nun ist



(wie in Art. 18) das Verhältniss $MR : OM$ unveränderlich ($MR = m . OM$); aber die Ordinate MP differirt von MR um die constante Länge $RP = OQ$, welche wir b nennen wollen. Somit können wir die Gleichung schreiben

$$MP = MR + RP = m . OM + RP,$$

d. h.

$$y = mx + b.$$

Diese für jeden Punkt der Linie PQ erfüllte Gleichung $y = mx + b$ heisst die Gleichung dieser geraden Linie.

Aus dem letzten Art. geht hervor, dass m positiv oder negativ ist, jenachdem OR, die durch den Anfangspunkt zur geraden Linie gezogene Parallele, in dem Winkel YOX oder in $Y'OX$ liegt; und ebenso, dass b positiv oder negativ ist, jenachdem der Punkt Q, in welchem die gerade Linie die Axe OY schneidet, über oder unter dem Anfangspunkt liegt.

Umgekehrt bezeichnet die Gleichung $y = mx + b$ stets eine gerade Linie; denn sie kann in der Form geschrieben werden

$$\frac{y - b}{x} = m.$$

Wenn wir aber QT parallel zu OM ziehen, so ist $MT = b$ und daher $TP = y - b$, und wir haben demnach den Ort eines Punktes zu finden, welcher so liegt, dass die durch ihn zur Axe OY gezogene Parallele PT die feste gerade Linie QT so schneidet, dass das Verhältniss $TP : QT$ constant bleibt. Dieser Ort ist offenbar die durch Q gehende gerade Linie QP. Da die allgemeinste Gleichung des ersten Grades $Ax + By + C = 0$ auf die Form $y = mx + b$ reducirt werden kann, als äquivalent mit

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

so repräsentirt diese Gleichung stets eine gerade Linie.

21. Aus den letzten Artikeln lässt sich die geometrische Bedeutung der Constanten in der Gleichung einer geraden Linie erkennen.

Wenn die durch die Gleichung $y = mx + b$ dargestellte gerade Linie mit der Axe der x den Winkel α und mit der Axe der y den Winkel β macht, so ist (Art. 18) $m = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; und wenn die Axen rechtwinklig sind, $m = \operatorname{tang}\alpha$.

Im Art. 20 sahen wir bereits, dass b den Abschnitt bezeichnet, welchen die gerade Linie in der Axe der y bestimmt.

Ist die Gleichung in der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$ gegeben, so reduciren wir sie, wie im letzten Artikel, auf die Form $y = mx + b$ und finden, dass $-\frac{A}{B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, oder bei rechtwinkligen Axen $= \operatorname{tang}\alpha$; und dass $-\frac{C}{B}$ die Länge des in der y Axe bestimmten Abschnitts ist.

Zusatz. Die geraden Linien $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ sind parallel zu einander, wenn $m = m'$, weil sie dann beide mit der Axe der x denselben Winkel bilden; ebenso sind die geraden Linien $Ax + By + C = 0$ und $A'x + B'y + C' = 0$ parallel, wenn $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ist.

Ausser den Formen $Ax + By + C = 0$ und $y = mx + b$ giebt es noch zwei andere, in denen die Gleichung einer geraden Linie oft gebraucht wird; sie sollen zunächst abgeleitet werden.

22. Die Gleichung einer geraden Linie MN mittelst der Abschnitte $OM = a$, $ON = b$ auszudrücken, welche sie in den Axen bestimmt.

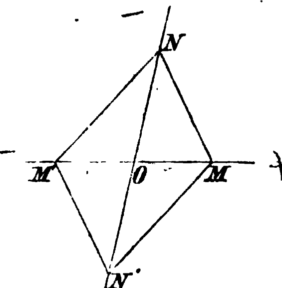
Wir leiten die geforderte Gleichung ab aus der vorher betrachteten Form

$$Ax + By + C = 0 \text{ oder } \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0.$$

Denn dieselbe muss durch die Coordinaten jedes Punctes der Graden MN, also auch durch diejenigen von M, d. i. (Art. 2) $x = a$, $y = 0$, erfüllt werden; daraus folgt $\frac{A}{C}a + 1 = 0$, oder $\frac{A}{C} = -\frac{1}{a}$. Ebenso muss sie durch die Coordinaten von $N(x=0, y=b)$ erfüllt werden, und man findet $\frac{B}{C} = -\frac{1}{b}$. Durch Substitution dieser Werthe geht aus der vorausgesetzten Form die verlangte $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ hervor, welche nach dieser Herkunft ebenso für rechtwinklige als für schiefwinklige Axen gültig ist.

Die Lage der geraden Linie ändert sich mit den Vorzeichen von a und b. Wenn z. B. die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, welche in beiden Axen positive Abschnitte bestimmt, die Linie MN der

Figur darstellt, so giebt die Gleichung $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ mit positivem Abschnitt in der Axe x und mit negativem in der Axe y die gerade Linie MN'. Ebenso ist dann $-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ der Ausdruck von $M'N$ und $-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ der von $M'N'$.



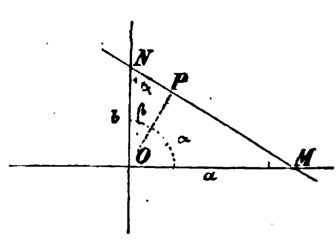
Jede Gleichung vom ersten Grade kann durch die Division mit ihrem constanten Gliede auf eine der vier vorbezeichneten Formen reducirt werden.

Aufg. 1. Man soll die Lage der folgenden geraden Linien untersuchen und die von ihnen in den Axen gebildeten Abschnitte bestimmen:

$$2x - 3y = 7;\quad 3x + 4y + 9 = 0,$$
$$3x + 2y = 6;\quad 4y - 5x = 20.$$

Aufg. 2. Unter der Voraussetzung, dass zwei Seiten eines Dreiecks als Coordinatenaxen genommen werden, soll man die Verbindungslinie der Punkte ausdrücken, welche den m^{ten} Theil von jeder derselben abschneiden und nach Art. 21 zeigen, dass sie der Basis des Dreiecks parallel ist. *Aufl.* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$.

23. Die Gleichung einer geraden Linie durch die Länge der auf sie vom Anfangspunkt gefällten Normale und durch die von dieser mit den Axen gebildeten Winkel auszudrücken.



Sei $OP = p$ die Länge der Normale, $\angle POM = \alpha$ der von ihr mit der Axe der x, $\angle PON = \beta$ der mit der Axe der y gebildete Winkel, $OM = a$, $ON = b$. Dann ist die Gleichung der geraden Linie MN (Art. 22) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Indem wir diese Gleichung mit p multipliciren, erhalten wir

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y = p.$$

Es ist aber $\frac{p}{a} = \cos\alpha$; $\frac{p}{b} = \cos\beta$ und daher die Gleichung der geraden Linie $x\cos\alpha + y\cos\beta = p$.

Bei rechtwinkligen Coordinaten, wie wir sie zumeist gebrauchen, ist $\beta = 90^0 - \alpha$. Demnach ist

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

die Gleichung einer geraden Linie, für welche die vom Anfangspunkt auf sie gefällte Normale die Länge p hat und den Winkel α mit der Axe der x einschliesst, in rechtwinkligen Coordinaten.

Diese Gleichung schliesst die vier Fälle des Art. 22 ein, wenn wir voraussetzen, dass α jeden beliebigen Werth zwischen 0 und 360^0 annehme; so ist für die Lage NM' der Winkel α zwischen 90^0 und 180^0 und der Coefficient von x negativ; für die Lage $M'N'$ ist α zwischen 180^0 und 270^0 und sowohl sein sinus als sein cosinus negativ. In den beiden letzten Fällen ist es aber passender, die Formel in der Gestalt $x \cos \alpha + y \sin \alpha = -p$ zu schreiben und α als den Winkel anzusehen, welcher zwischen 0 und 180^0 liegend mit der positiven Axe der x durch die verlängerte Normale gebildet wird.

Bei der Anwendung der Formel $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ setzen wir daher p als eines doppelten Zeichens fähig voraus und bezeichnen mit α den 180^0 nicht überschreitenden Winkel, welchen die Normale oder ihre Verlängerung mit der Axe der x bildet.

Wenn die Gleichung einer geraden Linie in der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$ gegeben ist, so kann sie leicht auf die Form $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ reducirt werden; dividiren wir dieselbe durch $\sqrt{(A^2 + B^2)}$, so dass sie wird

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\, x + \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\, y + \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = 0,$$

so können wir $\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = \cos\alpha$ und $\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = \sin\alpha$ setzen, weil die Summe der Quadrate dieser zwei Grössen $= 1$ ist. Wir lernen daraus, dass $\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$ und $\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$ respective der cosinus und sinus des Winkels sind, welchen die vom Anfangspunkt auf die Linie $Ax + By + C = 0$ gefällte Senkrechte mit der Axe der x bildet und dass $\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$ die Länge dieser Senkrechten ist.

24. Die auf schiefwinklige Coordinaten bezogene Gleichung $Ax + By + C = 0$ soll auf die Form $x \cos \alpha + y \cos \beta = p$ reducirt werden.

Nehmen wir an, dass die gegebene Gleichung durch Multipli-

cation mit einem gewissen Factor R auf die vorgeschriebene Form reducirt werde, so ist $RA = \cos\alpha$, $RB = \cos\beta$.

Wenn aber zwei Winkel α und β die Summe ω haben, so ist immer $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \sin^2\omega$.

Also ist $R^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega) = \sin^2\omega$ und die auf die verlangte Form reducirte Gleichung ist daher

$$\frac{A\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}\,x + \frac{B\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}\,y + \frac{C\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}} = 0.$$

Wir lernen daraus, dass

$$\frac{A\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}},\ \frac{B\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}$$

respective die cosinus der Winkel sind, welche die vom Anfangspunkt auf die Linie $Ax + By + C = 0$ gefällte Senkrechte mit den Axen der x und y bildet; und dass $\frac{C\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}$ die Länge dieser Senkrechten ist. Diese Länge kann auch leicht dadurch berechnet werden, dass man den doppelten Inhalt des Dreiecks NOM ($ON.\ OM.\ \sin\omega$) durch die Länge von MN dividirt, deren Ausdruck leicht zu finden ist.

Die Quadratwurzel der Nenner ist übrigens eines doppelten Zeichens fähig; die Gleichung kann auf jede der Formen
$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$, $x\cos(\alpha + 180^0) + y\cos(\beta + 180^0) + p = 0$
reducirt werden.

25. Man soll den Winkel zweier geraden Linien bestimmen, welche durch ihre Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt sind.

Der von den beiden geraden Linien gebildete Winkel ist dem Winkel gleich, welchen die vom Anfangspunkte aus auf sie gefällten Perpendikel mit einander einschliessen; wenn wir die von diesen mit der Axe der x gebildeten Winkel α, α' nennen, so ist nach Artikel 23

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}};\quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}};$$

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2)}};\quad \sin\alpha' = \frac{B'}{\sqrt{(A'^2+B'^2)}};$$

also $$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{A'B - AB'}{\sqrt{(A^2+B^2)}\cdot\sqrt{(A'^2+B'^2)}};$$

$$\cos(\alpha-\alpha')=\frac{AA'+BB'}{\sqrt{(A^2+B^2)}\cdot\sqrt{(A'^2+B'^2)}},$$

und daher $\operatorname{tang}(\alpha-\alpha')=\dfrac{A'B-AB'}{AA'+BB'}$.

Zusatz 1. Der von beiden Linien gebildete Winkel verschwindet, wenn $A'B-AB'=0$;
die geraden Linien sind dann nach Artikel 21 parallel.

Zusatz 2. Die zwei geraden Linien sind rechtwinklig zu einander, wenn $AA'+BB'=0$,
weil dann die Tangente ihres Winkels unendlich gross wird.

Wenn die Gleichungen der beiden geraden Linien in der Form $y=mx+b$, $y=m'x+b'$ gegeben sind, so ergiebt sich die Tangente des von ihnen gebildeten Winkels $=\dfrac{m-m'}{1+mm'}$, weil dieser Winkel die Differenz der Winkel ist, die die Linien selbst mit der Axe der x bilden und weil m und m' (Art. 21) die Tangenten dieser letztern Winkel sind; die geraden Linien sind parallel, wenn $m=m'$, und rechtwinklig auf einander, wenn $mm'+1=0$ ist.

*26. Den Winkel zwischen zwei geraden Linien bei schiefwinkligen Coordinaten zu finden.

Wir verfahren genau wie im letzten Artikel, indem wir die Ausdrücke des Artikel 24 zu Grunde legen:

$$\cos\alpha=\frac{A\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}},$$

$$\cos\alpha'=\frac{A'\sin\omega}{\sqrt{(A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega)}};$$

somit

$$\sin\alpha=\frac{B-A\cos\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}},$$

$$\sin\alpha'=\frac{B'-A'\cos\omega}{\sqrt{(A'^2+B'^2-2A'B')\cos\omega)}}.$$

Also:

$$\sin(\alpha-\alpha')=\frac{(A'B-AB')\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}\cdot\sqrt{(A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega)}},$$

$$\cos(\alpha-\alpha')=\frac{BB'+AA'-(AB'+A'B)\cos\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}\cdot\sqrt{(A'^2+B'^2-2A'B'\cos\omega)}}.$$

Endlich

$$\tan(\alpha-\alpha')=\frac{(A'B-AB')\sin\omega}{AA'+BB'-(AB'+A'B)\cos\omega}.$$

Die geraden Linien sind somit parallel, wenn $AB' = A'B$: sie sind rechtwinklig, wenn

$$AA' + BB' = (AB' + A'B)\cos\omega.$$

27. **Eine gerade Linie kann stets so bestimmt werden, dass sie zwei Bedingungen genügt.**

Jede der Formen, in welchen wir die allgemeine Gleichung der geraden Linie gegeben haben, enthält zwei Constanten; so die Formen $y = mx + b$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ die Constanten m und b, p und α. Nur die Form $Ax + By + C = 0$ enthält drei Constanten, aber nur scheinbar, denn wir haben es in ihr nicht mit den absoluten Werthen, sondern nur mit den gegenseitigen Verhältnissen von A, B, C zu thun. Die mit einer beliebigen Constanten multiplicirte oder dividirte Gleichung stellt noch immer dieselbe Linie dar, wie vorher, und wir können sie also durch C dividiren, so dass sie nur noch die beiden Constanten $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ enthält. Wenn man daher eine dieser Formen der Gleichung zur allgemeinen Darstellung einer geraden Linie wählt, z. B. $y = mx + b$, so kann man ihre Constanten m, b als unbekannte Grössen betrachten, welche zu bestimmen sind; und wenn irgend zwei Bedingungen gegeben sind, so können aus ihnen die Werthe von m und b bestimmt werden, welche der speciellen Geraden entsprechen, die diesen Bedingungen genügt. Diess wird durch die Beispiele in den Art. 28, 29, 32, 33 hinreichend erläutert.

28. **Man soll die Gleichung einer geraden Linie finden, die einen gegebenen Punkt (x', y') enthält, und zu einer gegebenen Geraden parallel ist.**

Wenn die Linie $y = mx + b$ einer gegebenen geraden Linie parallel ist, so ist nach Art. 21 Zusatz die Constante m bekannt. Und wenn sie durch einen festen Punkt geht, so muss die Gleichung, als für jeden Punkt der Linie erfüllt, auch für ihn wahr sein und man erhält $y' = mx' + b$ und damit die Bestimmung von b. Die verlangte Gleichung ist daher

$$y = mx + y' - mx' \text{ oder } y - y' = m(x - x').$$

Betrachten wir in dieser Gleichung m als unbestimmt, so ist sie die allgemeine Gleichung einer durch den Punkt (x', y') gehenden Geraden.

29. **Die Gleichung einer geraden Linie zu finden,**

welche durch zwei gegebene Punkte (x', y') und (x'', y'') geht.

Nach dem vorigen Artikel ist die Gleichung einer geraden Linie durch (x', y'), $y-y'=m(x-x')$ oder $\frac{y-y'}{x-x'}=m$. Da aber die verlangte gerade Linie auch durch den Punkt $x'' y''$ gehen muss, so muss diese Gleichung auch erfüllt bleiben, wenn man für x, y die Coordinaten desselben x'', y'' einsetzt. Demnach ist

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=m$$

und durch Substitution für m daher die Gleichung der verlangten geraden Linie

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y''-y'}{x''-x'}.$$

In dieser Form scheint die Gleichung am leichtesten zu behalten; durch die Befreiung von Brüchen bringen wir sie jedoch in eine Form, in der sie zumeist brauchbarer ist, nämlich

$$(y'-y'')x-(x'-x'')y+x'y''-x''y'=0$$

oder auch $(x-x')(y-y'')=(x-x'')(y-y')$; denn diess ist die Gleichung einer geraden Linie, weil die Glieder xy, welche auf ihren beiden Seiten auftreten, einander aufheben und sie wird sowohl durch die Werthe $x=x'$, $y=y'$, als durch die Werthe $x=x''$, $y=y''$ erfüllt. Ihre Entwickelung giebt auch das vorige Resultat.

Zusatz. Die Gleichung der geraden Linie, die den Punkt x', y' mit dem Anfangspunkt verbindet, ist $xy'=x'y$.

Aufg. 1. Bilde die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, dessen Eckpunkte durch ihre Coordinaten gegeben sind: $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, -1)$.

Aufl. $x+7y+11=0$, $3y-x=1$, $3x+y=7$.

Aufg. 2. Bilde die Gleichungen der Seiten des aus $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ bestimmten Dreiecks.

Aufl. $x-7y=39$, $9x-5y=3$, $4x+y=11$.

Aufg. 3. Die Gleichung der geraden Verbindungslinie der Punkte x', y' und $\frac{mx'+nx''}{m+n}$, $\frac{my'+ny''}{m+n}$ zu bilden.

Aufl. $(y'-y'')x-(x'-x'')y+x'y''-x''y'=0$.

Aufg. 4. Die Gleichung der geraden Linie anzugeben, welche die Punkte $x'y'$ und $\frac{x''+x'''}{2}$, $\frac{y''+y'''}{2}$ verbindet.

Aufl.

$$(y''+y'''-2y')x-(x''+x'''-2x')y+x''y'-x'y''+x'''y'-x'y'''=0.$$

Aufg. 5. Die Gleichungen der geraden Linien zu bilden, welche die Ecken des Dreiecks in Aufg. 2 mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden.

Aufl. $17x - 3y = 25$; $7x + 9y + 17 = 0$; $5x - 6y = 21$.

Aufg. 6. Welches ist die Gleichung der geraden Verbindungslinie der Punkte $\frac{lx' - mx''}{l - m}, \frac{ly' - my''}{l - m}$ und $\frac{lx' - nx'''}{l - n}, \frac{ly' - ny'''}{l - n}$?

Aufl. $x[l(m-n)y' + m(n-l)y'' + n(l-m)y'''] - y[l(m-n)x' + m(n-l)x'' + n(l-m)x'''] = lm(y'x'' - y''x') + mn(y''x''' - y'''x'') + nl(y'''x' - y'x''')$.

30. Die Bedingung anzugeben, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen.

Wir fanden im Artikel 29 die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte und haben nur auszudrücken, dass die Coordinaten des dritten dieser Gleichung genügen müssen.

Die Bedingung ist daher

$$(y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

welche in der mehr symmetrischen Form geschrieben werden kann*)

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0.$$

31. Aus den Gleichungen zweier geraden Linien die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes zu finden.

Jede der Gleichungen drückt eine Relation aus, welcher von den Coordinaten des geforderten Punktes genügt werden muss; deshalb finden wir seine Coordinaten, indem wir die beiden Gleichungen für die unbekannten Grössen x und y auflösen.

Wenn die Gleichungen in der allgemeinen Form

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

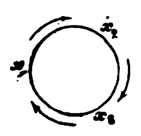
gegeben sind, so finden wir

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} \text{ und } y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B}.$$

Im Artikel 14 sahen wir, dass die Lage eines Punktes be-

---

*) Beim Gebrauch dieser und ähnlicher Formeln, welche wir bei spätern Gelegenheiten anwenden werden, ist es nützlich, die Coordinaten in einer festen Aufeinanderfolge zu denken; z. B. nimmt im 2. Glied der eben gegebenen Formel y_2 die Stelle von y_1, x_3 die von x_2 und x_1 die von x_3 im ersten Gliede ein und im dritten gehen wir von y_2 zu y_3, von x_3 zu x_1, und von x_1 zu x_2 über. Man kann diess Verfahren kurz als eine cyklische Vertauschung der Indices bezeichnen.



stimmt war durch zwei Gleichungen zwischen seinen Coordinaten. Jede dieser Gleichungen stellt einen Ort dar, welchem der Punkt angehören muss und er ist somit der Durchschnittspunkt der beiden durch die Gleichungen dargestellten Oerter. Die einfachsten Gleichungen zur Darstellung eines Punktes, nämlich $x=a$, $y=b$ sind die Gleichungen zweier Parallellinien zu den Coordinatenaxen, deren Durchschnittspunkt der verlangte Punkt ist.

Darum respräsentiren zwei Gleichungen des ersten Grades nur einen Punkt und zwei Gleichungen von höheren Graden mehr als einen Punkt; denn in jenem Falle stellt jede Gleichung eine gerade Linie dar und zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden; in diesem allgemeinen Falle sind die durch die Gleichungen dargestellten Oerter Curven, welche einander in mehr als einem Punkte durchschneiden.

Zusatz. Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden geraden Linien sind unendlich gross, derselbe liegt also in unendlicher Entfernung, wenn $AB' = A'B$. In diesem Falle sind die geraden Linien parallel. (Art. 21.)

Aufg. 1. Man bestimme die Coordinaten der Ecken des Dreiecks von den Seiten $x+y=2$, $x-3y=4$, $3x+5y+7=0$.

Aufl. $(-\frac{1}{14}, -\frac{19}{14})$; $(\frac{17}{2}, -\frac{13}{2})$; $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

Aufg. 2. Berechne die Coordinaten der Punkte, in welchen die geraden Linien $3x+y-2=0$, $x+2y=5$, $2x-3y+7=0$ sich schneiden.

Aufl. $(\frac{1}{7}, \frac{17}{7})$, $(-\frac{1}{11}, \frac{25}{11})$, $(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5})$.

Aufg. 3. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte von

$$2x+3y=13,\quad 5x-y=7,\quad x-4y+10=0$$

zu finden.

Aufl. Sie schneiden sich in dem Punkte (2, 3).

Aufg. 4. Die Coordinaten der Ecken und die Gleichungen der Diagonalen des Vierecks zu finden, dessen Seiten durch die Gleichungen $2y-3x=10$, $2y+x=6$, $16x-10y=33$, $12x+14y+29=0$ gegeben sind.

Aufl.
$(-1, \frac{7}{2})$, $(3, \frac{3}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, $(-3, \frac{1}{2})$; $6y-x=6$; $8x+2y+1=0$.

Aufg. 5. Die Durchschnittspunkte der Gegenseiten desselben Vierecks und die Gleichung der Verbindungslinie derselben zu berechnen.

$$(83, \tfrac{259}{2}), (-\tfrac{71}{5}, \tfrac{101}{10});\quad 162y-199x=4462.$$

Aufg. 6. Die Diagonalen des durch $x=a$, $x=a'$, $y=b$, $y=b'$ gebildeten Parallelogramms auszudrücken.

Aufl.
$(b-b')x-(a-a')y=a'b-ab'$, $(b-b')x+(a-a')y=ab-a'b'$.

Aufg. 7. Wenn von einem Dreieck die Basis und die Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit der Spitze zu Coordinatenaxen gewählt sind, so sollen die Gleichungen der Linien, die von den Basisecken nach den Mittelpunkten der Seiten gehen und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes berechnet werden.

Aufl. Sind die Coordinaten der Spitze $0, y'$, und die der Basisecken $x', 0$ und $-x', 0$, so sind die Gleichungen der Halbierungslinien

$$3x'y - y'x - x'y' = 0, \quad 3x'y + y'x - x'y' = 0$$

und die Coordinaten ihres Schnittpunktes $\left(0, \frac{y'}{3}\right)$.

Aufg. 8. Zwei Gegenseiten eines Vierecks sind zu Coordinatenaxen gewählt, die andern beiden haben die Gleichungen

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1, \quad \frac{x}{2a'} + \frac{y}{2b'} = 1.$$

Man soll die Coordinaten der Mittelpunkte der Diagonalen finden.

Aufl. (a, b'); (a', b).

Aufg. 9. In demselben Falle sei der Mittelpunkt der geraden Linie zu bestimmen, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten verbindet.

Aufl. $\dfrac{a'b.a - ab.a'}{a'b - ab'}, \quad \dfrac{a'b.b' - ab'.b}{a'b - ab'}.$

Nach Art. 7 zeigt diese Form der Coordinatenwerthe, dass dieser Punkt die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte im Verhältniss $a'b : ab'$ theilt.

32. Man soll für rechtwinklige Axen die Gleichung einer geraden Linie bestimmen, welche durch einen gegebenen Punkt geht und zu einer gegebenen Graden $y = mx + b$ normal ist.

Da die Bedingung der rechtwinkligen Lage zweier Geraden nach Art. 25 ist $mm' = -1$, so erhalten wir die Gleichung der fraglichen Normalen in der Form $y - y' = -\frac{1}{m}(x - x')$.

Ebenso erkennt man, dass die Gleichung der Normalen vom Punkt (x', y') auf die Linie $Ax + By + C = 0$ ist $A(y - y') = B(x - x')$, d. h. sie wird erhalten durch Vertauschung der Coefficienten von x und y und Veränderung des Vorzeichens von einem derselben.

Aufg. 1. Die Gleichungen der Perpendikel zu finden, die von den Ecken des Dreiecks $(2, 1)$, $(3, -2)$; $(-4, -1)$ auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden.

Aufl. Die Gleichungen der Seiten sind (Art. 29, Aufg. 1):

$$x + 7y + 11 = 0, \quad 3y - x = 1, \quad 3x + y = 7$$

und die Gleichungen der Perpendikel

$$7x - y = 13, \quad 3x + y = 7, \quad 3y - x = 1.$$

Das Dreieck ist demnach rechtwinklig.

Aufg. 2. Die Gleichungen der auf den Seiten desselben Dreiecks in ihren Mittelpunkten errichteten Senkrechten zu finden.

Aufl. Die Cordinaten der Mittelpunkte sind $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $(-1, 0)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$; die Perpendikel

$$7x - y + 2 = 0,\ 3x + y + 3 = 0,\ 3y - x + 4 = 0;$$

sie durchschneiden sich im Punkte $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

Aufg. 3. Welches sind die Gleichungen der von den Ecken des Dreiecks $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ (Art. 29, Aufg. 2) auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel?

Aufl. $7x + y = 17$, $5x + 9y + 25 = 0$, $x - 4y = 21$; sie durchschneiden sich in $(\frac{89}{29}, -\frac{130}{29})$.

Aufg. 4. Die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten desselben Dreiecks errichteten Perpendikel anzugeben.

Aufl. $7x + y + 2 = 0$, $5x + 9y + 16 = 0$, $x - 4y = 7$; ihr Schnittpunkt ist $(-\frac{1}{29}, -\frac{51}{29})$.

Aufg. 5. Aus den Coordinaten der Ecken eines Dreiecks die allgemeinen Gleichungen der von ihnen auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel abzuleiten.

Aufl.

$$(x'' - x''')\,x + (y'' - y''')\,y + (x'x''' + y'y''') - (x'x'' + y'y'') = 0,$$
$$(x''' - x')\,x + (y''' - y')\,y + (x''x' + y''y') - (x''x''' + y''y''') = 0,$$
$$(x' - x'')\,x + (y' - y'')\,y + (x'''x'' + y'''y'') - (x'''x' + y'''y') = 0.$$

Weil diese Gleichungen Null zur Summe geben, so schneiden sich die drei Perpendikel stets in einem Punkte.

Aufg. 6. Die Gleichungen der Senkrechten in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks auf denselben auszudrücken.

Aufl.

$$(x'' - x''')\,x + (y'' - y''')\,y - \tfrac{1}{2}(x''^2 - x'''^2) - \tfrac{1}{2}(y''^2 - y'''^2) = 0,$$
$$(x''' - x')\,x + (y''' - y')\,y - \tfrac{1}{2}(x'''^2 - x'^2) - \tfrac{1}{2}(y'''^2 - y'^2) = 0,$$
$$(x' - x'')\,x + (y' - y'')\,y - \tfrac{1}{2}(x'^2 - x''^2) - \tfrac{1}{2}(y'^2 - y''^2) = 0.$$

Aufg. 7. Die Basis eines Dreiecks und die von der Spitze auf dieselbe gefällte Senkrechte sind als Coordinatenaxen gewählt; man soll die Gleichungen der von den Basisecken auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes angeben.

Aufl. Sind die Coordinaten der Spitze $(0, y')$ und die der Basisecken $(x'', 0)$, $(-x''', 0)$, so sind die Gleichungen der Perpendikel

$$x'''(x - x'') + y'y = 0,\quad x''(x + x''') - y'y = 0$$

und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes $\left(0, \frac{x''x'''}{y'}\right)$.

Aufg. 8. Für dieselben Axen soll man die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten Perpendikel und die Coordinaten ihres Durchnittspunktes ausdrücken.

Aufl.

$$2(x'''x + y'y) = y'^2 - x'''^2;\ 2(x''x - y'y) = x''^2 - y'^2,\ 2x = x'' - x'''$$

$$\left(\frac{x'' - x'''}{2},\ \frac{y'^2 - x''x'''}{2y'}\right).$$

Aufg. 9. Man bilde die Gleichung der Normalen von (x', y') auf die Linie $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ und finde die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit derselben.

Aufl. Diese Coordinaten sind

$$\{x' + \cos\alpha(p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha),\ y' + \sin\alpha(p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\}.$$

Aufg. 10. Man bestimme die Entfernung dieses Schnittpunktes vom Punkte (x', y').

Aufl. Sie ist $\pm\ (p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$.

33. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen geraden Linie $y = mx + b$ einen vorgeschriebenen Winkel φ bildet.

Setzen wir rechtwinklige Coordinatenaxen voraus, so kann die Gleichung der geforderten Linie geschrieben werden

$$y - y' = m'(x - x')$$ (§.25, Zeile 3)

und die Formel des Artikel 25 $\tan\varphi = \dfrac{m - m'}{1 + mm'}$, erlaubt uns

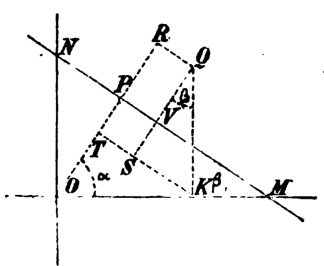
$$m' = \frac{m - \tan\varphi}{1 + m\tan\varphi}$$ zu bestimmen.

34. Die Länge der Senkrechten von einem Punkte (x', y') auf die gerade Linie von der Gleichung

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

zu bestimmen.

Wir haben in den Aufgaben 9 und 10 des Art. 32 einen Weg angegeben, der zur Lösung dieser Aufgabe führt und wollen nun zeigen, wie dasselbe Ergebniss geometrisch erhalten werden kann.



Wir ziehen QR von dem gegebenen Punkte Q parallel zu der gegebenen geraden Linie und QS senkrecht dazu; dann ist

$$OK = x' \text{ und } OT = x'\cos\alpha.$$

Wegen $\angle SQK = \beta$ und $QK = y'$ ist ferner $RT = QS = y'\cos\beta$; also $x'\cos\alpha + y'\cos\beta = OR$.

Indem wir davon die Senkrechte vom Anfangspunkt OP subtrahiren, erhalten wir

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p = PR$$

als den Ausdruck der Senkrechten QV.

Wäre in der Figur der Punkt Q auf der Seite der geraden Linie gewählt worden, welche dem Anfangspunkt am nächsten liegt, so hätten wir für die Senkrechte den Ausdruck $p - x' \cos\alpha - y' \cos\beta$ erhalten und wir sehen daraus, dass die Senkrechte ihr Vorzeichen wechselt, wenn wir von einer Seite der geraden Linie auf die andere übergehen. So lange wir nur eine unter den Normalen einer Geraden betrachten, so ist es unnöthig, ihr ein Vorzeichen zu geben, es handelt sich allein um ihre absolute Grösse. Wenn wir aber die Normalen von zwei verschiedenen Punkten wie Q und S mit einander vergleichen, so ist nach Art. 6 offenbar, dass die Distanzen QV, SV als in entgegengesetztem Sinne gemessen entgegengesetzte Vorzeichen erhalten müssen. Wir können daher für den Ausdruck der Länge des Perpendikels $\pm(p - x' \cos\alpha - y' \cos\beta)$ gleichmässig wählen. Wählen wir insbesondere diejenige von beiden Formen, für welche das absolute Glied der Gleichung der Geraden positiv ist, so ist diess mit der Festsetzung gleichbedeutend, dass diejenigen Normalen als positiv gelten sollen, welche von Punkten ausgehen, die mit dem Anfangspunkt der Coordinaten auf derselben Seite der Geraden liegen; als negativ aber die von Punkten auf der entgegengesetzten Seite. Und umgekehrt bei der entgegengesetzten Wahl.

Die in der Form $Ax + By + C = 0$ gegebene Gleichung der geraden Linie reduciren wir auf die Form $x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$ und erhalten die Länge des von einem Punkte $x'\,y'$ auf sie gefällten Perpendikels

$$= \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \text{ oder } = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega)}},$$ (S. 21 u. 22)

je nachdem die Axen rechtwinklig oder schiefwinklig sind. Durch Vergleichung dieses Ausdrucks für die Senkrechte von x', y' mit dem für die Senkrechte vom Anfangspunkt sehen wir, dass x', y' mit dem Anfangspunkt auf derselben Seite der geraden Linie liegt, wenn $Ax' + By' + C$ mit C dasselbe Vorzeichen hat und umgekehrt.

Die Bedingung, dass irgend ein Punkt $x'\,y'$ in der geraden Linie $Ax + By + C = 0$ liege, besteht darin, dass seine Coordi-

naten x', y' der gegebenen Gleichung genügen müssen, oder dass $Ax' + By' + C = 0$ sei. Der gegenwärtige Artikel zeigt, dass diese Bedingung nur der algebraische Ausdruck der geometrischen Wahrheit ist, dass die Senkrechte von einem Punkte x', y' in einer geraden Linie auf dieselbe gleich Null ist.

Aufg. 1. Die Länge der Senkrechten vom Anfangspunkt auf die Linie $3x + 4y + 20 = 0$ bei rechtwinkligen Axen zu finden.

Aufl. $p = 4$.

Aufg. 2. Finde die Länge der Senkrechten vom Punkte (2, 3) auf die gerade Linie $2x + y - 4 = 0$.

Aufl. $p = \frac{3}{\sqrt{5}}$; der gegebene Punkt liegt auf der dem Anfangspunkt entgegengesetzten Seite der geraden Linie.

Aufg. 3. Man bestimme die Länge der Senkrechten von den Eckpunkten des Dreiecks (2, 1), (3, —2), (—4, —1) auf die Gegenseiten.

Aufl. $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$; der Anfangspunkt liegt innerhalb des Dreiecks.

Aufg. 4. Finde die Länge der Senkrechten vom Punkte (3, — 4) auf die gerade Linie $4x + 2y - 7 = 0$ unter Voraussetzung eines Axenwinkels von 60^0.

Aufl. $p = \frac{3}{4}$; der Punkt liegt mit dem Anfangspunkt auf derselben Seite.

Aufg. 5. Die Länge der vom Anfangspunkt auf die gerade Linie $a(x - a) + b(y - b) = 0$ gefällten Senkrechten anzugeben.

Aufl. $p = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

35. **Die Gleichung der Halbirungslinie des Winkels zu finden, welchen die geraden Linien**

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

einschliessen.

Wir finden die Gleichung dieser geraden Linie am einfachsten, indem wir algebraisch ausdrücken, dass die von irgend einem Punkte x, y in ihr auf die beiden geraden Linien gefällten Perpendikel gleich sind; diess giebt unmittelbar die Gleichung

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = \pm (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2),$$

weil jede Seite derselben die Länge einer von diesen Senkrechten bezeichnet. (Art. 34.)

Wenn die Gleichungen in der Form

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

gegeben sind, so ist die Gleichung des Paars der Winkelhalbirungslinien

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{(A'^2 + B'^2)}}.$$

Durch das doppelte Vorzeichen ist die Existenz von zwei Winkelhalbirungslinien ausgesprochen, von denen die eine so liegt, dass die Normale von ihr auf die eine der beiden Geraden nach dem Vorigen als positiv und die auf die andere als negativ zu betrachten ist; die andere dagegen so, dass die Normalen von ihr auf beide Gerade gleichzeitig positiv oder negativ sind.

Wenn wir das Vorzeichen wählen, welches den beiden constanten Gliedern einerlei Vorzeichen giebt, so folgt aus Art. 34, dass wir die Halbirungslinie des Winkels durch die Gleichung ausdrücken, in welchem der Anfangspunkt liegt; und wenn wir den constanten Gliedern entgegengesetzte Zeichen geben, so haben wir die Gleichung der Halbirungslinie des Supplementwinkels.

Aufg. 1. Die Gleichung der Halbirungslinien des Winkels zwischen zwei geraden Linien auf die Form $x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 = p_1$ zu reduciren.

Aufl.

$$x \cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 90^0\right] + y \sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + 90^0\right] = \frac{p_1 - p_2}{2 \sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$x \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + y \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{p_1 + p_2}{2 \cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Man sieht in dieser Form am deutlichsten, dass die beiden Halbirungslinien rechtwinklig auf einander stehen.

Aufg. 2. Welches sind die Gleichungen der Winkelhalbirungslinien für $3x + 4y - 9 = 0$, $12x + 5y - 3 = 0$?

Aufl. $7x - 9y + 34 = 0$, $9x + 7y = 12$.

36. **Den Inhalt des durch drei Punkte gebildeten Dreiecks zu berechnen.**

Wir erhalten den doppelten Inhalt, indem wir die Länge der Verbindungslinie zweier Eckpunkte mit der Länge der vom dritten Eckpunkt auf dieselbe gefällten Senkrechten multipliciren.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen ist die Länge der von $x_3 y_3$ auf die Verbindungslinie von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gefällten Senkrechten (Art. 29, 34)

$$\frac{(y_1 - y_2)\, x_3 - (x_1 - x_2)\, y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{[(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]}};$$

in diesem Bruche stellt der Nenner die Länge der Verbindungslinie von $x_1 y_1$ mit $x_2 y_2$ dar und

$$y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2)$$

bezeichnet daher den doppelten Inhalt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks.

Für schiefwinklige Axen findet man durch Wiederholung der Untersuchung mit den auf sie bezüglichen Formeln, dass die einzige Veränderung des Resultats in dem Hinzutreten des Factors $\sin\omega$ zu dem eben erhaltenen Ausdruck besteht. Genau gesprochen haben wir überdiess diesen Ausdrücken das doppelte Zeichen vorzusetzen, welches aus der Quadratwurzel entspringt, die in der Entwickelung gebraucht wird. So lange wir es jedoch nur mit einer Dreiecksfläche zu thun haben, so lange handelt es sich nur um die absolute Grösse ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Wenn aber z. B. die Inhalte zweier Dreiecke verglichen werden, deren Ecken $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ auf entgegengesetzten Seiten der Verbindungslinie der Basisecken $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ liegen, so müssen ihnen entgegengesetzte Vorzeichen gegeben werden. Der von den vier Punkten und ihren geraden Verbindungslinien begrenzte vierseitige Raum ist nun die Summe statt die Differenz der beiden Dreiecke.

Zusatz 1. Der doppelte Inhalt des von den Punkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ mit dem Anfangspunkt der Coordinaten gebildeten Dreiecks ist $y_1 x_2 - y_2 x_1$, wie aus dem allgemeinen Ausdruck folgt, indem man darin $x_3 = 0$; $y_3 = 0$ setzt.

Zusatz 2. Die Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen, drückt aus, dass der Inhalt des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks gleich Null ist. (Art. 30.)

Aufgabe. Man soll den folgenden Satz beweisen: Wenn zwei feste gerade Linien, welche sich in einem Punkte A schneiden, von einer um den festen Punkt O drehenden Geraden in den Punkten B und C geschnitten werden, so ist die algebraische Summe der reciproken Werthe der Dreiecksflächen OAB und OAC constant.

37. Den Inhalt eines Polygons durch die Coordinaten seiner Eckpunkte auszudrücken.

Wenn wir innerhalb des Polygons einen Punkt xy wählen und ihn mit allen Eckpunkten desselben: $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_n y_n$ durch gerade Linien verbinden, so ist der Inhalt des Polygons die Summe der Inhalte aller der Dreiecke, in welche dasselbe in dieser Weise getheilt worden ist. Diese doppelten Inhalte sind nach dem letzten Artikel respective:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2$$
$$\vdots$$
$$x(y_{n-1} - y_n) - y(x_{n-1} - x_n) + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}$$
$$x(y_n - y_1) - y(x_n - x_1) + x_n y_1 - x_1 y_n.$$

Durch Addition derselben verschwinden alle die Glieder, welche x und y als Factoren enthalten, wie auch nöthig, weil der Werth des Totalinhalts von der Art unabhängig sein muss, in welcher das Polygon in Dreiecke zerlegt wird; wir erhalten für den doppelten Inhalt den Ausdruck:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_n y_1 - x_1 y_n).$$

Derselbe kann auch geschrieben werden:

$$x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots + x_n(y_1 - y_{n-1})$$

oder

$$y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \ldots + y_n(x_{n-1} - x_1).$$

Aufg. 1. Berechne den Inhalt des Dreiecks (2, 1), (3, —2), (—4, —1).
Aufl. $= 10$.
Aufg. 2. Berechne den Inhalt des Dreiecks (2, 3), (4, —5), (—3, —6).
Aufl. $= 29$.
Aufg. 3. Berechne den Inhalt des Vierecks (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 1).
Aufl. $= 4$.

38. Die Bedingung zu finden, unter welcher drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden.

Sind

$$Ax + By + C = 0,\quad A'x + B'y + C' = 0,\quad A''x + B''y + C'' = 0$$

die Gleichungen derselben, so heisst die verlangte Bedingung

$$A''(BC' - B'C) + B''(CA' - C'A) + C''(AB' - A'B) = 0;$$

denn wenn sie sich in einem Punkte schneiden sollen, so müssen die Coordinaten des Punktes, in welchem zwei von ihnen sich schneiden (Art. 31), der Gleichung der dritten Genüge leisten.

Die gefundene Bedingung kann auch in einer der folgenden Formen geschrieben werden

$$A(B'C'' - B''C') + B(C'A'' - C''A') + C(A'B'' - A''B') = 0$$
$$A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C) = 0^{*}).$$

*) Wenn man einen dieser Ausdrücke, z. B. den letzten durch $C.C'.C''$ dividirt, so dass man erhält

$$\frac{A}{C}\left(\frac{B'}{C'} - \frac{B''}{C''}\right) + \frac{A'}{C'}\left(\frac{B''}{C''} - \frac{B}{C}\right) + \frac{A''}{C''}\left(\frac{B}{C} - \frac{B'}{C'}\right) = 0,$$

*39. Den Inhalt des durch die drei Linien
$$Ax + By + C = 0,\quad A'x + B'y + C' = 0,\quad A''x + B''x + C'' = 0$$
gebildeten Dreiecks zu finden.

Wenn wir nach Artikel 31 die Coordinaten der Ecken berechnen und ihre Werthe in die Formel des Artikels 36 einsetzen, so erhalten wir für den doppelten Inhalt den Ausdruck:
$$\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}\left(\frac{A'C'' - A''C'}{A''B' - A'B''} - \frac{A''C - AC''}{AB'' - A''B}\right) +$$
$$\frac{B'C'' - B''C'}{A'B'' - A''B'}\left(\frac{A''C - AC''}{AB'' - A''B} - \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}\right) +$$
$$\frac{B''C - BC''}{A''B - AB''}\left(\frac{AC' - A'C}{A'B - AB'} - \frac{A'C'' - A''C'}{A''B' - A'B''}\right).$$

Wir reduciren diesen Ausdruck auf einen gemeinsamen Nenner und bemerken, dass der Zähler des zwischen den ersten Klammern enthaltenen Theils die mit A'' multiplicirte Grösse
$$A''(BC' - B'C) + A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'')$$
ist, und dass die in den beiden folgenden Klammern enthaltenen Theile des Ausdrucks die Producte derselben Grösse mit A, A' respective sind; dadurch erhalten wir für den doppelten Inhalt des Dreiecks
$$\frac{[A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C)]^2}{(AB' - A'B)(A'B'' - A''B')(A''B - AB'')}.$$

Wenn die drei geraden Linien sich in einem Punkte schneiden, so wird dieser Ausdruck für den Flächeninhalt Null (Art. 38); wenn irgend zwei von ihnen parallel sind, so wird er unendlich gross. (Art. 25.)

40. Aus den Gleichungen zweier geraden Linien die einer dritten durch ihren Durchschnittspunkt gehenden zu finden.

Die zunächstliegende Methode zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, nach Artikel 31 die Coordinaten des Durchschnittspunktes der zwei geraden Linien zu berechnen und ihre Werthe

---

(Art. 30)

so erkennt man die vollständige Analogie dieser Bedingung, unter welcher drei gerade Linien durch einen Punkt gehen, mit der, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen. An die Stelle der Coordinaten dieser Punkte treten die Grössen $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}; \frac{A'}{C'}, \frac{B'}{C'}; \frac{A''}{C''}, \frac{B''}{C''}$, die von den geraden Linien gebildeten Axenabschnitte. Können sie nicht als Coordinaten der geraden Linien bezeichnet werden?

in die Gleichung des Artikels 28, nämlich in $y - y' = m(x - x')$ einzusetzen.

Eine leichtere Auflösung nimmt aber die Aufgabe auf Grund des folgenden wichtigen Princips an: Wenn $S = 0$, $S' = 0$ die Gleichungen irgend zweier Oerter sind, so enthält der durch die Gleichung $S + kS' = 0$ (wo k eine beliebige Constante ist) dargestellte Ort alle die den beiden gegebenen Oertern gemeinsamen Punkte. Denn es ist offenbar, dass Coordinaten, welche der Gleichung $S = 0$ und zugleich der Gleichung $S' = 0$ genügen, auch die Gleichung $S + kS' = 0$ befriedigen.

Daher bezeichnet die Gleichung

$$(Ax' + By + C) + k(A'x + B'y + C') = 0,$$

welche offenbar die Gleichung einer geraden Linie ist, eine solche gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ gezogen ist; denn die Coordinaten des Schnittpunktes dieser beiden geraden Linien müssen, in die Gleichung

$$(Ax + By + C) + k(A'x + B'y + C') = 0$$

eingesetzt, diese identisch machen, weil sie jeden ihrer Theile getrennt $= 0$ machen.

Aufg. 1. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche den Anfangspunkt mit dem Durchschnittspunkt der Linien

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0 \text{ verbindet.}$$

Aufl. Indem wir die erste Gleichung mit C', die zweite mit C multipliciren und die Producte von einander abziehen, erhalten wir die Gleichung der geforderten Linie $(AC' - A'C)x + (BC' - B'C)y = 0$; denn diese geht nach Art. 18 durch den Anfangspunkt und nach dem gegenwärtigen Artikel durch den Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linien.

Aufg. 2. Die Gleichung der durch den Schnittpunkt derselben geraden Linien gezogenen Parallelen zur Achse der x soll gefunden werden.

Aufl. $(A'B - AB')y + A'C - AC' = 0.$

Aufg. 3. Es ist die Gleichung der geraden Linie auszudrücken, welche den Durchschnittspunkt derselben Linien mit dem Punkte $x'y'$ verbindet.

Aufl. Wir bestimmen in der allgemeinen Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen geraden Linien geht, die Constante k durch die Bemerkung, dass dieser Gleichung durch die Coordinaten $x'y'$ genügt werden muss und finden als die verlangte Gleichung

$$(Ax + By + C)(A'x' + B'y' + C') = (Ax' + By' + C)(A'x + B'y + C').$$

Aufg. 4. Welches ist die Gleichung der geraden Linie, die den Punkt (2, 3) mit dem Durchschnittspunkt von $2x + 3y + 1 = 0$ und $3x - 4y = 5$ verbindet?

Aufl.
$11(2x + 3y + 1) + 14(3x - 4y - 5) = 0$ oder $64x - 23y = 59$.

41. Das im letzten Artikel begründete Princip liefert für drei sich in demselben Punkt durchschneidende gerade Linien ein Kennzeichen, welches häufig bequemer ist als das im Art. 38 angegebene.

Drei gerade Linien gehen durch denselben Punkt, wenn ihre Gleichungen, indem man jede mit einer constanten Grösse multiplicirt, Null identisch zur Summe geben; d. h. wenn für alle x und y die Relation besteht

$$l(Ax + By + C) + m(A'x + B'y + C') + n(A''x + B''y + C'') = 0.$$

Denn in diesem Falle müssen die Werthe der Coordinaten, welche die beiden ersten Theile der Gleichung einzeln mit Null identisch machen, auch den dritten Theil gleich Null setzen.

Aufg. 1. Die drei geraden Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Aufl. Die Gleichungen dieser Linien sind nach Art. 29, Aufg. 4

$$(y'' + y''' - 2y')\,x - (x'' + x''' - 2x')\,y + (x''y' - x'y'') + (x'''y' - x'y''') = 0,$$

$$(y''' + y' - 2y'')\,x - (x''' + x' - 2x'')\,y + (x'''y'' - x''y''') + (x'y'' - x''y') = 0,$$

$$(y' + y'' - 2y''')\,x - (x' + x'' - 2x''')\,y + (x'y''' - x'''y') + (x''y''' - x'''y'') = 0.$$

Da die Summe dieser drei Gleichungen Null ist, so gehen die durch sie dargestellten geraden Linien durch einen Punkt. Nach Art. 31 findet man seine Coordinaten $\left(\frac{x' + x'' + x'''}{3}, \frac{y' + y'' + y'''}{3}\right)$.

Aufg. 2. Derselbe Satz ist unter der Voraussetzung zu beweisen, dass zwei Seiten des Dreiecks von den Längen a und b zu Achsen genommen sind.

Aufl. $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

sind die Gleichungen der drei Halbirungslinien; ihre blose Ansicht liefert den Beweis.

Aufg. 3. Die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks und die drei Perpendikel zu den Seiten in ihren Halbirungspunkten schneiden sich in einem Punkte. Denn die Gleichungen der Aufg. 5 und 6 im Art. 32 geben Null identisch zur Summe.

Aufg. 4. Die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Denn ihre Gleichungen sind

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha - p) - (x \cos\beta + y \sin\beta - p') = 0,$$
$$(x \cos\beta + y \sin\beta - p') - (x \cos\gamma + y \sin\gamma - p'') = 0,$$
$$(x \cos\gamma + y \sin\gamma - p'') - (x \cos\alpha + y \sin\alpha - p) = 0.$$

Von den Halbirungslinien der äusseren Winkel mit je einem der innern gilt ein ähnlicher Satz.

***42. Die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem die gerade Verbindungslinie der Punkte $x'y'$, $x''y''$ von der Linie $Ax + By + C = 0$ geschnitten wird.**

Wir können diese Aufgabe dadurch lösen, dass wir die Gleichung der Verbindungslinie jener beiden Punkte bilden und nach Artikel 31 ihren Durchschnittspunkt mit der gegebenen Linie bestimmen.

Eine andere Methode, die wir oft anwenden werden, um den Punkt zu bestimmen, in welchem die gerade Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte durch einen gegebenen Ort geschnitten wird, ist in dem Folgenden enthalten.

Nach Artikel 7 sind die Coordinaten eines Punktes in der geraden Linie, welche die gegebenen Punkte $x'y'$, $x''y''$ verbindet, immer von der Form $x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}$, $y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$.

und wir können das Verhältniss $\frac{m}{n}$, in welchem die Verbindungslinie dieser Punkte durch den gegebenen Ort getheilt wird, als eine unbekannte Grösse ansehen, welche sich aus der Bedingung bestimmt, dass die eben geschriebenen Coordinaten der Gleichung des Ortes genügen müssen.

So haben wir im gegenwärtigen Falle

$$A \cdot \frac{mx'' + nx'}{m + n} + B \cdot \frac{my'' + ny'}{m + n} + C = 0;$$

also

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}.$$

Demnach sind die Coordinaten des gesuchten Punktes

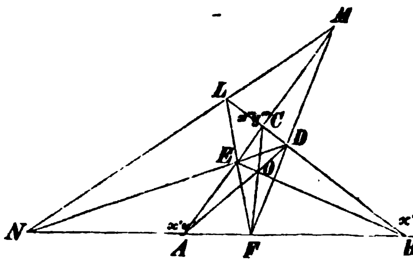
$$x = \frac{(Ax' + By' + C)\,x'' - (Ax'' + By'' + C)\,x'}{(Ax' + By' + C) - (Ax'' + By'' + C)},$$

$$y = \frac{(Ax' + By' + C)\,y'' - (Ax'' + By'' + C)\,y'}{(Ax' + By' + C) - (Ax'' + By'' + C)}.$$

Der Werth für das Verhältniss $m:n$ konnte auch geometrisch aus der Bemerkung abgeleitet werden, dass das Verhältniss, in welchem die Verbindungslinie von $x'y'$ und $x''y''$ geschnitten wird, dem Verhältniss der Senkrechten gleich ist, die man von diesen Punkten auf die gegebene gerade Linie fällen kann; denn nach Artikel 34 sind diese Senkrechten

$$\frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \text{ und } \frac{Ax'' + By'' + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

Das negative Zeichen in dem vorher gefundenen Werthe entspringt daraus, dass in dem Falle des innern Schnittes, welchem nach Art. 7 das positive Zeichen von $m:n$ entspricht, die Normalen auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Linie liegen und daher nach Art. 34 als von entgegengesetztem Zeichen angesehen werden müssen.



Wenn eine gerade Linie die Seiten eines Dreiecks BC, CA, AB in den Punkten L, M, N durchschneidet, so ist

$$\frac{BL.\ CM.\ AN}{CL.\ MA.\ NB} = -1.$$

Sind die Coordinaten der Ecken $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, so haben wir

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{Ax'' + By'' + C}{Ax''' + By''' + C}; \quad \frac{CM}{MA} = -\frac{Ax''' + By''' + C}{Ax' + By' + C};$$

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar. Man kann noch hinsichtlich der Vorzeichen dieser Theilungsverhältnisse bemerken, dass entweder alle drei das negative oder nur eines das negative und die andern das positive Zeichen erhalten müssen, weil die Dreiecksseiten durch die Transversale nur entweder alle drei ausserhalb oder zwei innerhalb und eine ausserhalb des Dreiecks geschnitten werden können.

*43. Man bestimme das Verhältniss, nach welchem die Verbindungslinie zweier Punkte x_1y_1, x_2y_2 durch die Verbindungslinie zweier andern Punkte x_3y_3, x_4y_4 geschnitten wird.

Die Gleichung der letztern geraden Linie ist (Art. 29)

$$(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0;$$

daher nach dem letzten Artikel

$$\frac{m}{n} = -\frac{(y_3 - y_4)x_1 - (x_3 - x_4)y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3}{(y_3 - y_4)x_2 - (x_3 - x_4)y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3}$$

$$= -\frac{x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}.$$

Aus Artikel 36 erhellt, dass diess das Verhältniss der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ist, deren Ecken sind $x_1 y_1$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ und $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, wie diess auch geometrisch evident ist.

Wenn die geraden Verbindungslinien eines Punktes mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten BC, CA, AB respective in Punkten D, E, F schneiden, so ist

$$\frac{BD.\,CE.\,AF}{DC.\,EA.\,FB} = +1.$$

Sind die Ecken $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ und ist der angenommene Punkt $x_4 y_4$, so folgt

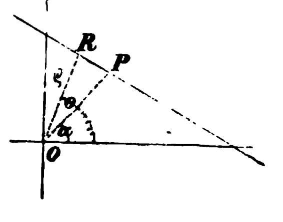
$$\frac{BD}{DC} = \frac{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)},$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)},$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar, wenn man nur noch bemerkt, dass entweder alle drei Theilpunkte D, E, F innerhalb der Dreiecksseiten oder einer innerhalb und zwei ausserhalb derselben liegen.

44. Die Polargleichung einer geraden Linie zu finden. (Artikel 12.)



Wenn wir das Perpendikel auf die gegebene gerade Linie als feste Axe voraussetzen und OR irgend ein durch den Pol nach einem ihrer Punkte gezogener Radius vector ist, so folgt für

$$OR = \varrho, \ \angle ROP = \theta$$

$OR.\cos\theta = OP$, d. h. die gesuchte Gleichung ist $\varrho\cos\theta = p$.

Bildet die feste Axe mit dem Perpendikel den Winkel α, so ist die Gleichung $\varrho\cos(\theta - \alpha) = p$.

Diese Gleichung kann auch durch Transformation der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ erhalten werden, denn indem man für x $\varrho\cos\theta$ und für y $\varrho\sin\theta$ (Artikel 12) substituirt, wird diese Gleichung

$$\varrho(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = p; \text{ oder wie vorher } \varrho\cos(\theta - \alpha) = p.$$

Eine Gleichung von der Form $\varrho(A\cos\theta + B\sin\theta) = C$ kann wie im Artikel 23 auf die Form $\varrho\cos(\theta - \alpha) = p$ reducirt werden, indem man sie durch $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ dividirt; wir haben dann

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}},\ \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}},\ p = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

Aufg. 1. Die Gleichung $\varrho = 2a\sec\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ in eine solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzuwandeln.

Aufg. 2. Die Polar-Coordinaten des Durchschnittspunktes der folgenden geraden Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu bestimmen: $\varrho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2a$, $\varrho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = a$.

Aufl. $\varrho = 2a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; der Winkel $= \frac{\pi}{3}$.

Aufg. 3. Welches ist die Polargleichung der geraden Linie, die die Punkte ϱ', θ'; ϱ'', θ'' verbindet?

Aufl.

$$\varrho'\varrho''\sin(\theta' - \theta'') + \varrho''\varrho\sin(\theta'' - \theta) + \varrho\varrho'\sin(\theta - \theta') = 0.$$

Drittes Kapitel.

Aufgaben über die gerade Linie.

---

45. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Principien dargelegt haben, auf welche gestützt wir die Lage eines Punktes oder einer geraden Linie algebraisch auszudrücken im Stande sind, wollen wir einige weitere Beispiele von der Anwendung dieser Methode zur Auflösung geometrischer Aufgaben hinzufügen. Der Anfänger muss sich in der Anwendung der Methode zur Lösung solcher Aufgaben fleissig üben, bis er Leichtigkeit und Schnelligkeit in ihrem Gebrauche erlangt hat.

Bei den Auflösungen geometrischer Aufgaben können im Allgemeinen die Gleichungen durch eine geschickte Wahl der Coordinatenaxen vereinfacht werden; indem man zwei der wichtigsten Linien der Figur zu Coordinatenaxen wählt, werden die analytischen Ausdrücke wesentlich verkürzt. Andrerseits geschieht es freilich oft, dass durch die Annahme von Coordinatenaxen, welche mit der Figur nicht in einer solchen besondern Verbindung stehen, die Gleichungen an Symmetrie das gewinnen, was ihnen an Einfachheit abgeht. Der Leser kann diess aus den zwei in Aufgabe 1 und 2 des Artikel 41 gegebenen Auflösungen derselben Aufgabe erkennen, wo die erste Auflösung, obgleich die längere, den Vorzug hat, dass man aus der entwickelten Gleichung der einen Winkelhalbirungslinie sogleich die der andern ohne Rechnung ableiten kann.

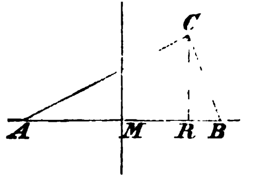
Weil Ausdrücke, welche Winkel enthalten, durch die Anwendung schiefwinkliger Coordinaten complicirter werden, ist es im Allgemeinen rathsam, für solche Aufgaben rechtwinklige Axen vorauszusetzen.

46. Geometrische Oerter. Die analytische Geometrie eignet sich mit vorzüglicher Leichtigkeit zur Untersuchung der Oerter. Wir haben nur die Relation aufzusuchen, welche die Bedingungen der Aufgabe zwischen den Coordinaten des Punktes fordern, dessen Ort gesucht wird; der algebraische Ausdruck dieser Relation liefert uns sofort die Gleichung des verlangten Ortes.

Aufg. 1. Welches ist der Ort der Spitze eines Dreiecks, von dem die Basis und die Differenz der Quadrate der Seiten gegeben sind?

Aufl. Wir nehmen die Basis und die rechtwinklige Halbirungslinie derselben zu Coordinatenaxen, bezeichnen die Hälfte der Basis durch c und die Coordinaten des Scheitels durch x, y. Dann ist

$$AC^2 = y^2 + (c+x)^2 \text{ *)}, \quad BC^2 = y^2 + (c-x)^2,$$
$$AC^2 - BC^2 = 4cx$$



und die Gleichung des fraglichen Ortes ist also $4cx = m^2$; derselbe ist somit eine zur Basis normale Gerade in einer Entfernung $x = \frac{m^2}{4c}$ vom Mittelpunkte. Man sieht leicht, dass die Differenz der Quadrate der Basissegmente der Differenz der Quadrate der Seiten gleich ist.

*) Anfänger schliessen zuweilen, dass die Länge der Linie AR als aus den Theilen $AM = -c$ und $MR = x$ zusammengesetzt gleich

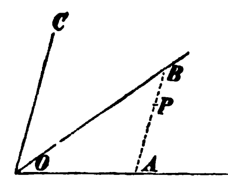
Aufg. 2. Man soll den Ort des Scheitels aus der Basis und der gegebenen constanten Summe $\cot A + m \cot B = p$ bestimmen.

Aufl. Aus der Figur folgt $\cot A = \frac{AR}{CR} = \frac{c + x}{y}$, $\cot B = \frac{c - x}{y}$; die Gleichung des Ortes ist also $c + x + m(c - x) = py$, die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 3. Von einem Dreieck ist die Basis und die Summe der Seiten gegeben; welches ist der Ort des Punktes in dem von seiner Spitze auf die Basis gefällten Perpendikel, welcher jenseits der Spitze um die Länge der einen Seite von der Basis entfernt ist?

Aufl. Wir nehmen dieselben Axen, um zu untersuchen, welche Relation zwischen den Coordinaten des Punktes besteht, dessen Ort wir zu bestimmen haben. Die Abscisse desselben ist MR und seine Ordinate nach der Voraussetzung $= AC$; wenn m die gegebene Summe der Seiten ist, so ist
$$BC = m - y.$$
Auch gilt
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \,.\, AR,$$
d. h. indem man AB durch $2c$ bezeichnet
$$(m - y)^2 = 4c^2 + y^2 - 4c(c + x),$$
woraus wir durch Reduction erhalten $2my - 4cx = m^2$, die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 4. Wenn zwei feste gerade Linien OA und OB gegeben sind und durch eine dritte von gegebener Richtung AB geschnitten werden, so soll der Ort des Punktes P gefunden werden, der die Strecke AB in einem gegebenen Verhältniss theilt, nämlich $PA = n \,.\, AB$.



Wir können hier schiefwinklige Axen anwenden, weil die Aufgabe die Betrachtung von Winkeln nicht erfordert; nehmen wir also die feste Linie OA zur Axe der x, OC zur Axe der y, so dass die Gleichung von OB von der Form $y = mx$ ist. Da nun der Punkt B in der letztern Linie liegt, so ist seine Ordinate das $m$fache seiner Abscisse oder $AB = m \,.\, OA$; somit $PA = mn \,.\, OA$ und da PA und OA die Coordinaten des Punktes P sind, der gesuchte Ort eine gerade Linie aus dem Anfangspunkt von der Gleichung $y = mnx$.

Aufg. 5. Man denke wie vorher PA parallel OC gezogen und durch eine Anzahl von Geraden in Punkten B, B', B'' etc. geschnitten,

---

$- c + x$ sei, statt gleich $c + x$ und daher $AC^2 = y^2 + (x - c)^2$. Dazu ist zu bemerken, dass das einer Linie gegebene Zeichen nicht von der Seite des Anfangspunktes abhängt, auf der sie liegt, sondern von der Richtung, in der sie gemessen wird. Wir gehen von A nach R in dem positiven Sinne $AM = c$ und gehen in demselben Sinne weiter von $MR = x$ und deshalb ist die Länge $AR = c + x$. Gehen wir aber von R nach B, indem wir zuerst im negativen Sinne gehen um $RM = -x$ und darnach im positiven um $MB = c$, so ist die Länge $RB = c - x$.

PA aber als proportional der Summe aller Ordinaten BA, $B'A$ etc. bestimmt, und den Ort von P gesucht.

Aufl. Für $y = mx$, $y = m'x + n'$, $y = m''x + n''$, etc. als die Gleichungen der festen Geraden ist die Gleichung des Ortes

$$ky = mx + (m'x + n') + (m''x + n'') + \text{etc.}$$

Aufg. 6. Von einer beliebigen Anzahl von Dreiecken mit gemeinschaftlicher Spitze sind die Grundlinien und die Summe ihrer Flächen gegeben; man soll den Ort ihrer Spitze finden.

Aufl. Sind die Gleichungen der Grundlinien

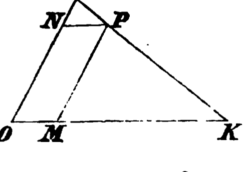
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad x \cos \beta + y \sin \beta - p_1 = 0,$$
$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2 = 0, \text{ etc.},$$

ihre Längen a, b, c, etc. und die gegebene Summe der Inhalte $= m^2$, so ist $a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$, weil nach Art. 34 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ die Senkrechte vom Punkt x, y auf die erste Linie bezeichnet, der doppelte Inhalt des ersten Dreiecks und die Gleichung des Ortes muss daher sein

$$a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) + b(x \cos \beta + y \sin \beta - p_1)$$
$$+ c(x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2) + \ldots = 2m^2.$$

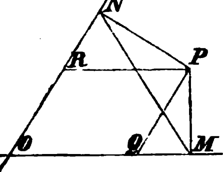
Diese ist aber, da sie x und y nur im ersten Grade enthält, die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 7. Aus gegebenem Winkel an der Spitze und der Summe der ihn einschliessenden Seiten den Ort des Punktes zu finden, der die Basis in gegebenem Verhältniss theilt.



Aufl. Wir denken jene Seiten des Dreiecks als Coordinatenaxen und das Verhältniss $PK : PL = n : m$. Dann ist aus ähnlichen Dreiecken $OK = \frac{(m+n)x}{m}$, $OL = \frac{(m+n)y}{n}$ und der Ort eine gerade Linie von der Gleichung $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{s}{m+n}$.

Aufg. 8. Man bestimme den Ort eines Punktes P, wenn die Summe der Abschnitte $OM + ON$ gegeben ist, welche die von ihm auf zwei feste Gerade gefällten Perpendikel PM, PN in diesen bestimmen.

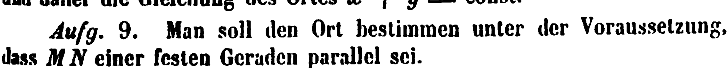


Aufl. Indem man die festen Linien zu Axen wählt, findet man

$$OM = x + y \cos \omega, \quad ON = y + x \cos \omega$$

und daher die Gleichung des Ortes $x + y = \text{const.}$

Aufg. 9. Man soll den Ort bestimmen unter der Voraussetzung, dass MN einer festen Geraden parallel sei.



Aufl. $y + x \cos \omega = m(x + y \cos \omega)$.

Aufg. 10. Ebenso, wenn MN durch eine gegebene Gerade $y = mx + n$ halbirt (oder allgemeiner in gegebenem Verhältniss getheilt) werden soll

Aufl. Die Coordinaten des Mittelpunktes ergeben sich mittelst der Coordinaten von P gleich $\frac{1}{2}(x + y \cos \omega)$ und $\frac{1}{2}(y + x \cos \omega)$ und da sie der Gleichung der gegebenen Geraden genügen müssen, so ist der Ort von P durch $y + x \cos \omega = m(x + y \cos \omega) + 2n$ dargestellt.

Aufg. 11. Man soll den Ort des Mittelpunktes von MN finden, wenn P die gerade Linie $y = mx + n$ durchläuft.

Aufl. Sind α, β die Coordinaten von P und x, y die des Mittelpunktes, so ward in der vorigen Anfgabe bewiesen, dass

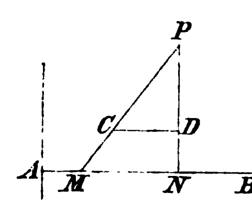
$$2x = \alpha + \beta \cos \omega, \quad 2y = \beta + \alpha \cos \omega$$

sei; die Auflösung dieser Gleichungen für α, β liefert

$$\alpha . \sin^2 \omega = 2x - 2y \cos \omega, \quad \beta \sin^2 \omega = 2y - 2x \cos \omega$$

und nach der Relation $\beta = m\alpha + n$, welche α und β verbindet, ist $2y - 2x \cos \omega = m(2x - 2y \cos \omega) + n \sin^2 \omega$ die Gleichung des Ortes.

47. Es ist üblich und zweckmässig, die Coordinaten des veränderlichen Punktes, welcher einen Ort beschreibt, durch x und y und dagegen die Coordinaten fester Punkte durch Buchstaben mit Accenten zu bezeichnen; dem entsprechend sind in den vorigen Aufgaben die Buchstaben x und y überall für die Coordinaten des Punktes gewählt worden, nach dessen Ort gefragt ward. Oft aber ist es zur Bestimmung des Ortes nothwendig, die Gleichungen von Linien zu bilden, welche mit der Figur in Verbindung stehen und dann entsteht die Gefahr der Verwirrung zwischen den laufenden Coordinaten x und y eines Punktes in einer solchen Geraden und den Coordinaten x und y des Punktes, welcher den gesuchten Ort beschreibt. In solchen Fällen ist es zweckmässig, die Coordinaten des letztern Punktes zuerst durch andere Buchstaben, etwa α und β, zu bezeichnen und die Betrachtung bis zur Aufstellung einer sie verbindenden Relation zu führen. Diese ist bereits die Gleichung des Ortes und wird in der gewöhnlichen Form erhalten, indem man α und β durch x und y ersetzt, da dann diese letztern die Coordinaten des den Ort beschreibenden Punktes erzeugen.



Aufg. 1. Man soll den Ort der Spitze P eines Dreiecks finden, von welchem die Basis CD und das Verhältniss $AM : NB$ der Theile gegeben ist, welche die Seiten einer festen der Basis parallelen Geraden AB abschneiden.

Aufl. Wir nehmen AB und die zu ihr normale Gerade durch A zu Axen und haben AM, NB mittelst der Coordinaten von P auszudrücken. Sind α und β diese letzteren, sind $x'y'$, $x''y''$ die Coordinaten von C und D — sie haben gleiche Ordinate in Folge des Parallelis-

mus von AB und CD — so ist die Gleichung der Geraden PC als der Verbindungslinie von $\alpha\beta$ und $x'y'$ nach Art. 29

$$(\beta - y')\,x - (\alpha - x')\,y = \beta x' - \alpha y'.$$

Dieser Gleichung genügt wie jeder Punkt von PC auch der in der Abscissenaxe gelegene Punkt M, dessen Ordinate $y = 0$ und dessen Abscisse $x = AM$ ist; wir erhalten also aus ihr für $y = 0$

$$AM = \frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'}.$$

In derselben Weise bestimmt sich

$$AN = \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}$$

und wenn $AB = c$ ist, so giebt die Relation $AM = k\,.\,BN$

$$\frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta - y'} = k\left\{c - \frac{\beta x'' - \alpha y'}{\beta - y'}\right\},$$

eine Gleichung, in welcher die Bedingungen des Problems mittelst der Coordinaten des Punktes P ausgedrückt sind. Nunmehr können ohne verwirrende Folge die Grössen α, β durch x, y ersetzt werden und es ergiebt sich durch Beseitigung der Brüche die Gleichung des Ortes in der Form

$$yx' - y'x = k\left\{c\,(y - y') - (yx'' - y''x)\right\}.$$

Aufg. 2. Zwei Ecken eines Dreiecks ABC bewegen sich in festen geraden Linien LM, LN und die drei Seiten desselben drehen sich um feste Punkte O, P, Q, die in einer geraden Linie liegen; welches ist der Ort der dritten Ecke?

Aufl. Wir nehmen die gerade Linie OP, welche die drei festen Punkte enthält, zur Axe der x und die gerade Linie OL, welche den Durchschnittspunkt der beiden festen geraden Linien mit dem Punkte O verbindet, zur Axe der y. Unter den Voraussetzungen

$$OL = b,\; OM = a,\; ON = a',\; OP = c,\; OQ = c'$$

sind die Gleichungen von LM und LN

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1,$$

und wenn ABC eine durch die Coordinaten α, β von C bestimmte Lage des beweglichen Dreiecks ist, so ist die Gleichung von CP, als der Verbindungslinie des Punktes α, β mit dem Punkte P $(x = c,\ y = 0)$

$$(\alpha - c)\,y - \beta x + \beta c = 0.$$

Daraus folgen die Coordinaten von A, als dem Durchschnittspunkt dieser Linie mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

$$x_1 = \frac{ab\,(\alpha - c) + ac\beta}{b\,(\alpha - c) + a\beta},\quad y_1 = \frac{b\,(a - c)\,\beta}{b\,(\alpha - c) + a\beta}.$$

Die Coordinaten von B werden aus den vorigen gefunden, indem man statt a und c respective a' und c' einführt:

$$x_2 = \frac{a'b\,(\alpha - c') + a'c'\beta}{b\,(\alpha - c') + a'\beta},\quad y_2 = \frac{b\,(a' - c')\,\beta}{b\,(\alpha - c') + a'\beta}.$$

Damit aber diese beiden Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einer durch den

Coordinatenanfang gehenden geraden Linie liegen, muss die Relation gelten (Art. 30) $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$.

Darnach haben wir

$$\frac{b(a-c)\beta}{ab(\alpha-c)+ac\beta} = \frac{b(a'-c')\beta}{a'b(\alpha-c')+a'c'\beta}.$$

Da diese Relation von den Coordinaten des Punktes $\alpha\,\beta$ stets erfüllt werden muss, so wird die Gleichung des Ortes einfach dadurch erhalten, dass man die Buchstaben α, β mit den andern x, y vertauscht; durch Befreiung von Brüchen ergiebt sich dann

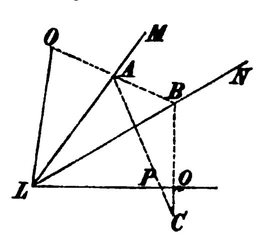
$$(a-c)\,[a'b\,(x-c')+a'c'y] = (a'-c')\,[ab\,(x-c)+acy].$$

oder

$$\frac{(ac'-a'c)\,x}{cc'(a-a')-aa'(c-c')} + \frac{y}{b} = 1.$$

Der Ort ist demnach eine durch den Punkt L gehende gerade Linie.

Aufg. 3. In der letzten Aufgabe den Ort der Ecke C unter der Voraussetzung zu finden, dass die Punkte P, Q in einer, statt durch O, durch L gehenden geraden Linie liegen.



Aufl. Wir lösen zuerst das allgemeine Problem, in welchem die Punkte P, Q eine vollkommen unbestimmte Lage haben und wählen dazu die Linien LM, LN zu Coordinatenaxen. Sind dann die Coordinaten von P, Q, O, C respective $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, $\alpha\beta$, so ist die Bedingung, welche wir auszudrücken wünschen, die, dass die Verbindungslinie der Punkte A, B, in welchen die Geraden CP, CQ die Axen schneiden, stets durch O gehe. Nun ist die Gleichung von CP $(\beta-y')\,x-(\alpha-x')\,y = \beta x'-\alpha y'$ und der von ihr in der Axe der x bestimmte Abschnitt daher $LA = \frac{\beta x'-\alpha y'}{\beta-y'}$. In derselben Weise ist der von CQ in der Axe der y gebildete Abschnitt $LB = \frac{\alpha y''-\beta x''}{\alpha-x''}$, und daher die Gleichung von AB

$\frac{x}{LA}+\frac{y}{LB} = 1$ oder $\frac{x(\beta-y')}{\beta x'-\alpha y'}+\frac{y(\alpha-x'')}{\alpha y''-\beta x''} = 1$. Dass diese Gleichung durch die Coordinaten x''', y''' erfüllt werde, ist die Bedingung des Problems, d. h. die Coordinaten α, β des Punktes C sind durch die Relation verbunden $\frac{x'''(\beta-y')}{\beta x'-\alpha y'}+\frac{y'''(\alpha-x'')}{\alpha y''-\beta x''} = 1$. Die Befreiung von den Brüchen zeigt, dass diese Gleichung in den α, β im Allgemeinen vom zweiten Grade ist. Wenn wir aber voraussetzen, dass die Punkte $x'y'$, $x''y''$ in derselben durch den Anfangspunkt gehenden Graden $y = mx$ liegen, so dass $y' = mx'$, $y'' = mx''$ ist, so kann die Gleichung in der Form $\frac{x'''(\beta-y')}{x'(\beta-\alpha m)}+\frac{y'''(\alpha-x'')}{x''(\alpha m-\beta)} = 1$ geschrieben werden und die Befreiung von Brüchen und Ersetzung von α, β durch x, y giebt die Gleichung des Ortes als einer Geraden

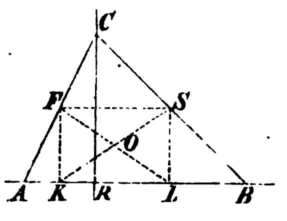
$$x'''x''\,(y-y')-y'''x'\,(x-x'') = x'x''\,(mx-y).$$

48. Anstatt die Bedingungen der Aufgabe direct in Gliedern der Coordinaten des Punktes auszudrücken, dessen Ort gesucht wird, ist es oft zweckmässig, sie zunächst in Gliedern anderer Linien der Figur zu bestimmen; dann ist es nöthig, so viele Relationen aufzustellen, als zur Elimination der so eingeführten unbekannten Grössen hinreichend sind, um durch diese eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes zu finden, dessen Ort gesucht wird. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung dieser Methode hinreichen.

Aufg. 1. **Den Ort der Mittelpunkte der Rechtecke zu finden, die in ein gegebenes Dreieck eingeschrieben sind.**

Aufl. Wir nehmen CR und AB zu Coordinatenaxen und setzen $CR = p$, $RB = s$ und $AR = s'$: dann sind die Gleichungen von AC und BC

$$\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1 \text{ und } \frac{y}{p} + \frac{x}{s} = 1.$$



Wenn wir nun in der Entfernung $FK = k$ eine zur Basis parallele Linie FS ziehen, deren Gleichung $y = k$ ist, so finden wir die Abscissen der Punkte F und S, in denen diese den Linien AC und BC begegnet, durch Substitution von $y = k$ in die Gleichungen von AB und BC. So erhalten wir aus der ersten Gleichung

$\frac{k}{p} - \frac{x}{s'} = 1$ oder $x = KR = -s'\left(1 - \frac{k}{p}\right)$; aus der zweiten

$$\frac{k}{p} + \frac{x}{s} = 1 \text{ oder } x = RL = s\left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Daraus ergiebt sich die Abscisse des Mittelpunktes von FS nach Art. 7 $x = \frac{s - s'}{2}\left(1 - \frac{k}{p}\right)$, welche auch für den Mittelpunkt des Rechtecks die Abscisse ist. Seine Ordinate ist $y = \frac{k}{2}$. Sollen wir eine Relation finden, welche zwischen dieser Ordinate und Abscisse für jeden Werth von k bestehen muss, so haben wir nur zwischen diesen Gleichungen k zu eliminiren; so erhalten wir für die Gleichung des verlangten Ortes $2x = (s - s')\left(1 - \frac{2y}{p}\right)$ oder $\frac{2x}{s - s'} + \frac{2y}{p} = 1$.

Der gesuchte Ort ist also eine gerade Linie und die Abschnitte, welche dieselbe in den Axen bildet, zeigen, dass es die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Basis AB mit dem Mittelpunkte der Höhe CR ist.

Aufg. 2. **Parallel zur Basis eines Dreiecks ist eine gerade Linie gezogen und die Punkte, in denen sie die Seiten desselben schneidet, sind mit zwei festen Punkten in der Basis durch gerade Linien verbunden, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser letzteren?**

Aufl. Wir behalten die Axen und die übrigen Bestimmungen der Aufgabe 1 und lassen die Coordinaten der festen Punkte T und V in der Basis sein für T $(m, 0)$ und für V $(n, 0)$. Alsdann ist die Gleichung von

$$FT \qquad \left[s'\left(1-\frac{k}{p}\right)+m\right]y+kx-km=0, \text{ und die von}$$

$$SV \qquad \left[s\left(1-\frac{k}{p}\right)-n\right]y-kx+kn=0.$$

Da nun der Punkt, dessen Ort wir suchen, in jeder der beiden Geraden FT und SV liegt, so drücken die eben geschriebenen Gleichungen Relationen aus, die seine Coordinaten erfüllen müssen; da sie aber die Grösse k enthalten, so entsprechen diese Relationen der speciellen Lage des Punktes allein, für welche die Parallele FS in der Höhe k über der Basis gezogen ist. Eliminiren wir aber die unbestimmte Grösse k zwischen diesen Gleichungen, so erhalten wir eine Relation, welche neben den Coordinaten des betrachteten Punktes nur bekannte Grössen enthält und die als wahr für jede beliebige Lage der Parallelen FS die geforderte Gleichung des Ortes sein wird.

Indem wir diese Gleichungen in die Form

$$(s'+m)\,y-k\left(\frac{s'}{p}\,y-x+m\right)=0,$$

$$(s-n)\,y-k\left(\frac{s}{p}\,y+x-n\right)=0$$

bringen und die Grösse k eliminiren, erhalten wir also für die Gleichung des Ortes $(s-n)\left(\frac{s'}{p}\,y-x+m\right)=(s'+m)\left(\frac{s}{p}\,y+x-n\right)$.

Diess ist die Gleichung einer geraden Linie, weil x und y nur im ersten Grade darin enthalten sind.

Aufg. 3. In einem Dreiecke sind die Schnittpunkte einer Parallelen zur Basis mit den Seiten mit den gegenüberliegenden Basisecken verbunden; man soll den Ort des Durchschnittspunktes der Verbindungslinien angeben.

Aufl. Die Aufgabe ist zwar ein specieller Fall der vorigen, nimmt aber eine einfachere Auflösung an, indem man die Seiten AC und CB des Dreiecks zu Axen wählt; sind dann ihre Längen a und b, so können die proportionalen Abschnitte, welche die Parallele in ihnen macht, durch μa und μb ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen der Transversalen $\frac{x}{a}+\frac{y}{\mu b}=1$ und $\frac{x}{\mu a}+\frac{y}{b}=1$,
und indem man die eine von der andern subtrahirt und den Rest durch die Constante $1-\frac{1}{\mu}$ dividirt, erhält man für die Gleichung des Ortes $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, die wir früher (Art. 41, Aufg. 2) als Gleichung der geraden Linie gefunden haben, welche die Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Basis verbindet.

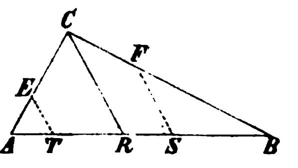
Aufg. 4. Es sind zwei feste Punkte A und B, je einer in jeder Axe, gegeben und zwei veränderliche A' und B' in denselben Axen so bestimmt, dass $OA' + OB' = OA + OB$ ist; man soll den Ort des Durchschnittspunktes der Geraden AB' und $A'B$ bestimmen.

Aufl. Sei $OA = a$, $OB = b$, $OA' = a + k$, so ist nach den Bedingungen des Problems $OB' = b - k$; die Gleichungen von AB', $A'B$ sind respective $\frac{x}{a} + \frac{y}{b-k} = 1$, $\frac{x}{a+k} + \frac{y}{b} = 1$, oder

$$bx + ay - ab + k(a - x) = 0, \quad bx + ay - ab + k(y - b) = 0.$$

Wir eliminiren k durch Subtraction und erhalten für die Gleichung des Ortes
$$x + y = a + b.$$

Aufg. 5. In der Basis eines Dreiecks sei ein Stück AT und am andern Ende ein Stück BS genommen, welches zu AT in einem festen Verhältniss steht; werden sodann ET und FS einer festen geraden Linie CR parallel gezogen, so ist der Ort des Punktes O zu finden, in welchem sich die Linien EB und FA durchschneiden.



Aufl. Wir nehmen AB zur Axe der x, CR zur Axe der y, setzen $AT = k$, $BR = s$, $AR = s'$, $CR = p$ und das feste Verhältniss m, so dass $BS = mk$ ist. Alsdann sind die Coordinaten von S $\{s - mk, 0\}$ und die von $T\{-(s' - k), 0\}$.

Wir finden sodann die Ordinaten von E und F, indem wir diese Werthe von x in die Gleichungen von AC und BC substituiren; also für

$$E \qquad x = -(s' - k),\ y = \frac{pk}{s'};$$

für
$$F \qquad x = s - mk, \quad y = \frac{mpk}{s}.$$

Wir bilden nun die Gleichungen der geraden Linien EB und FA, nämlich
$$EB \quad (s + s' - k)\,y + \frac{pk}{s'}\,x - \frac{pks}{s'} = 0,$$
$$FA \quad (s + s' - mk)\,y - \frac{mpk}{s}\,x - \frac{mpks'}{s} = 0,$$

und eliminiren endlich k, indem wir die eine Gleichung von der andern abziehen und den Rest mit k dividiren; so erhalten wir

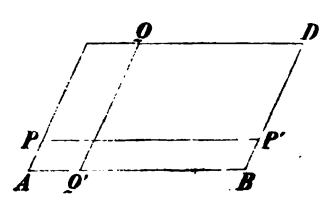
$$(m - 1)\,y + \left(\frac{mp}{s} + \frac{p}{s'}\right)x + \left(\frac{mps'}{s} - \frac{ps}{s'}\right) = 0,$$

die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 6. PP' und QQ' sind ein Paar beliebige Parallelen zu den Seiten eines Parallelogramms, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes der Linien PQ und $P'Q'$?

Aufl. Wir nehmen zwei der Seiten des Parallelogramms zu Axen und setzen ihre Längen a und b, bezeichnen AQ' durch m und AP durch n. Dann ist die Gleichung von PQ, als der geraden Verbindungslinie von $P\,(0, n)$ mit $Q\,(m, b)$ $(b - n)\,x - my + mn = 0$, und

die Gleichung von $P'Q'$, der Verbindungslinie von $P'(a, n)$ mit $Q'(m, 0)$ $nx - (a - m)y - mn = 0$. Da hier zwei unbestimmte Grössen m und n vorhanden sind, so kann man vermuthen, dass es nicht möglich sein werde, sie beide aus diesen zwei Gleichungen zu eliminiren; wenn man jedoch die beiden Gleichungen durch Addition vereinigt, so verschwinden beide Unbestimmte und man erhält den Ort $bx - ay = 0$, die Gleichung der Diagonale des Parallelogramms.



Aufg. 7. Ein Punkt und zwei feste gerade Linien sind gegeben; man zieht durch jenen irgend zwei gerade Linien und verbindet die Punkte, wo diese den festen geraden Linien begegnen, kreuzweis; welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser Verbindungslinien?

Aufl. Wir nehmen die festen geraden Linien zu Coordinatenaxen und lassen die Gleichungen der durch den festen Punkt willkürlich gezogenen Geraden sein

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \text{ und } \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1.$$

Weil diese Linien durch den festen Punkt $x'y'$ gehen müssen, sind $\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} = 1$ und $\frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$, oder durch Subtraction

$$x'\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) + y'\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Die Gleichungen der Transversalen sind darnach

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n'} = 1$ und $\frac{x}{m'} + \frac{y}{n} = 1$; und liefern durch Subtraction

$$x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) - y\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der vorher gefundenen lassen sich $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right)$ und $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)$ eliminiren und wir erhalten dadurch $x'y + y'x = 0$, die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie. Sie steht in einer bald näher darzulegenden Beziehung zu der geraden Linie $x'y - y'x = 0$, welche den Anfangspunkt mit dem Punkte $x'y'$ verbindet.

Aufg. 8. Durch irgend einen Punkt in der Basis eines Dreiecks wird in gegebener Richtung eine gerade Linie von gegebener Länge so gezogen, dass sie in jenem Punkte halbirt (allgemeiner von der Basis in einem gegebenen Verhältniss getheilt) ist; welches ist der Ort der Durchschnittspunkte der Linien, die ihre Enden mit denen der Basis verbinden?

49. Der Grundgedanke der analytischen Geometrie liegt darin, dass jede durch einen Punkt zu erfüllende geometrische Bedingung zu einer Gleichung führt, die durch seine Coordinaten erfüllt

werden muss. Darum ist es sehr wichtig, dass der Anfänger in dieser Wissenschaft in der Anwendung jener Idee sich fleissig übe, um so möglichst jede geometrische Bedingung durch eine Gleichung ausdrücken zu lernen. Wir fügen deshalb zur weitern Uebung eine Auswahl von Aufgaben über Oerter bei, welche auf Gleichungen führen, deren Grad den ersten übersteigt. Obwohl die Interpretation solcher Gleichungen erst Gegenstand der spätern Kapitel und des weitern Ausbaues der Wissenschaft ist, so ist doch die Methode, durch welche man zu diesen Gleichungen gelangt — und damit haben wir es hier allein zu thun — dieselbe wie in dem Falle des geradlinigen Ortes; in der That erfährt man ja erst durch die Aufstellung der Gleichung des Ortes den Grad derselben und des Problems. Die folgenden Beispiele sind so gewählt, dass sie nach der Reihenfolge ihrer Aufzählung eine analoge Behandlung gestatten, wie die Aufgaben der vorhergehenden Artikel. In den bei ihnen gegebenen Auflösungen ist vorausgesetzt, dass die Axen ebenso gewählt sind, wie in diesen correspondirenden Beispielen des Früheren.

Aufg. 1. Man bestimme den Ort der Spitze eines Dreiecks, wenn die Basis und die Quadratsumme der Seiten gegeben ist. ($m^2 + c^2$)

Aufl. $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(m^2 - c^2)$,

Aufg. 2. Ebenso, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der m und n fachen Seitenquadrate bekannt sind.

Aufl. $(m \pm n)(x^2 + y^2) + 2(m \mp n)cx + (m \pm n)c^2 = p^2$.

Aufg. 3. Aus der Basis und dem Verhältniss der Seiten.

Aufg. 4. Aus der Basis und dem Product der Tangenten der an ihr anliegenden Winkel.

In diesem Beispiel und den folgenden sind die Werthe der Tangenten der Basiswinkel zu benutzen, welche im Art. 46, Aufg. 2 gegeben sind.

Aufl. $y^2 + m^2x^2 = m^2c^2$.

Aufg. 5. Aus des Basis und dem Winkel an der Spitze, oder der Summe der Basiswinkel.

Aufl. $x^2 + y^2 - 2xy \cot C = c^2$.

Aufg. 6. Aus der Basis und der Differenz der Basiswinkel.

Aufl. $x^2 - y^2 + 2xy \cot D = c^2$.

Aufg. 7. Aus der Basis und für das Verhältniss der Basiswinkel gleich 1 : 2.

Aufl. $3x^2 - y^2 + 2cx = c^2$.

Aufg. 8. Aus der Basis und dem Verhältniss der Tangenten der Winkel $\tan C = m \tan B$.

Aufl. $m(x^2 + y^2 - c^2) = 2c(c - x)$.

Aufg. 9. Wie in Aufg. 4, Art. 46 ist PA parallel zu OC gezogen, so dass sie zwei Linien in Punkten B, B' schneidet und es ist der Punkt P so bestimmt, dass $PA^2 = PB \,.\, PB'$ ist. Welches ist der Ort von P?

Aufl. $mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$.

Aufg. 10. PA ist als das harmonische Mittel zwischen AB und AB' bestimmt.

Aufl. $2mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$.

Aufg. 11. Aus dem gegebenen Winkel an der Spitze eines Dreiecks von constanter Fläche den Ort des Punktes zu bestimmen, der die Basis in gegebenem Verhältniss theilt.

Aufl. $xy = \text{const.}$

Aufg. 12. Bei gegebener Basis.

Aufl. $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - \frac{2xy\cos\omega}{mn} = \frac{b^2}{(m+n)^2}$.

Aufg. 13. Wenn die Basis durch einen festen Punkt geht.

Aufl. $\frac{mx'}{x} + \frac{ny'}{y} = m + n$.

Aufg. 14. Man soll nach der 8. Aufg. Art. 46 den Ort von P bestimmen, wenn MN constant ist.

Aufl. $x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = \text{const.}$

Aufg. 15. Wenn MN durch einen festen Punkt geht.

Aufl. $\frac{x'}{x+y\cos\omega} + \frac{y'}{y+x\cos\omega} = 1$.

Aufg. 16. Wenn MN durch einen festen Punkt geht, so soll der Ort des Durchschnitts der Parallelen zu den Axen aus M und N bestimmt werden.

Aufl. $\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1$.

Aufg. 17. Man soll in der 1. Aufg. Art. 47 den Ort von P bestimmen, wenn die Linie CD nicht zu AB parallel ist.

Aufg. 18. Wenn die Basis CD eines Dreiecks gegeben ist, so soll der Ort seiner Spitze bestimmt werden, wenn der Abschnitt AB in einer gegebenen Graden constant ist.

Aufl.
$(x'y - xy')(y - y'') - (x''y - xy'')(y - y') = c(y - y')(y - y'')$.

Aufg. 19. Die Basis $2e$ und das Product a^2 der Seiten eines Dreiecks sind gegeben. Welches ist der Ort der Spitze?

Aufl. $a^4 = (x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2$.

Oder in Polarcoordinaten $\varrho^4 - 2\varrho^2 e^2 \cos 2\theta = a^4 - e^4$.

50. Aufgaben, in welchen zu beweisen ist, dass eine bewegliche gerade Linie durch einen festen Punkt geht.

Wir haben im Artikel 40 gesehen, dass die gerade Linie $Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0$, oder, was dasselbe ist,

$$(A + kA')x + (B + kB')y + C + kC' = 0,$$

wo k eine unbestimmte Grösse ist, immer durch einen festen Punkt geht, nämlich durch den Punkt, wo die beiden geraden Linien

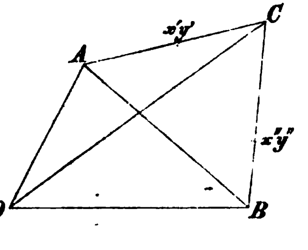
$$Ax + By + C = 0 \text{ und } A'x + B'y + C' = 0$$

sich schneiden. Wir entnehmen daraus den Satz: **Wenn die Gleichung einer geraden Linie eine unbestimmte Grösse im ersten Grade enthält, so geht die gerade Linie immer durch einen festen Punkt.**

Aufg. 1. Wenn in einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der reciproken Werthe der Seiten gegeben sind, so geht die Basis immer durch einen festen Punkt.

Aufl. Wenn wir die Seiten als Axen wählen, ist die Gleichung der Basis $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und die Bedingung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m}$ oder $\frac{1}{b} = \frac{1}{m} - \frac{1}{a}$ zu erfüllen; daher ist die Gleichung der Basis $\frac{x}{a} + \frac{y}{m} - \frac{y}{a} = 1$, in welcher m constant und a unbestimmt ist; schreiben wir diess $\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{m} - 1 = 0$, so erkennen wir, dass die Basis stets durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien $x - y = 0$ und $y = m$ geht.

Aufg. 2. Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf drei durch denselben Punkt gehenden festen geraden Linien OA, OB, OC und zwei seiner Seiten gehen durch feste Punkte; es ist zu beweisen, dass auch die dritte Seite durch einen festen Punkt geht.



Aufl. Wir wählen die festen geraden Linien OA, OB, in denen die Basisecken sich bewegen, zu Axen, so dass die Linie OC, welche die Spitze des Dreiecks durchläuft, eine Gleichung von der Form $y = mx$ hat und bezeichnen die Coordinaten der festen Punkte durch $x'y'$, $x''y''$. Sind dann in irgend einer Lage die Coordinaten der Spitze $x = a$ und folglich $y = ma$, so ist die Gleichung von AC

$$(x' - a)\,y - (y' - ma)\,x + a\,(y' - mx') = 0.$$

Ebenso ist die Gleichung von BC

$$(x'' - a)\,y - (y'' - ma)\,x + a\,(y'' - mx'') = 0.$$

Die Länge des von der Linie AC bestimmten Abschnittes OA wird hiernach durch Substitution von $x = 0$ in die Gleichung derselben gefunden, nämlich $$y = -\frac{a\,(y' - mx')}{x' - a};$$

ebenso die Länge des Abschnitts OB für $y = 0$ aus der Gleichung von BC $$x = \frac{a\,(y'' - mx'')}{y'' - ma}.$$

Daraus ergiebt sich die Gleichung von AB

$$x\frac{y''-ma}{y''-mx''}-y\frac{x'-a}{y'-mx'}=a.$$

Da hierin a unbestimmt ist und nur im ersten Grade vorkommt, so geht diese gerade Linie immer durch einen festen Punkt. Derselbe kann gefunden werden, indem man die Gleichung in der Form

$$\frac{y''}{y''-mx''}x-\frac{x'}{y'-mx'}y-a\left(\frac{mx}{y''-mx''}-\frac{y}{y'-mx'}+1\right)=0$$

schreibt; er ist der Durchschnittspunkt der zwei geraden Linien

$$\frac{y''}{y''-mx''}x-\frac{x'}{y'-mx'}y=0$$

und

$$\frac{mx}{y''-mx''}-\frac{y}{y'-mx'}+1=0.$$

Aufg. 3. Man soll untersuchen, ob in der vorigen Aufgabe unter gewissen Bedingungen die Basis auch dann noch durch einen festen Punkt geht, wenn die gerade Linie, in welcher die Spitze C sich bewegt, den Punkt O nicht enthält.

Aufl. Wir behalten die Axen und die Bezeichnung bei, mit der einen nothwendigen Abweichung, dass die Gleichung der von der Spitze durchlaufenen geraden Linie durch $y=mx+n$ und daher die Coordinaten der Spitze in irgend einer Lage durch a und $ma+n$ ausgedrückt werden. Dann ist die Gleichung von AC

$$(x'-a)\,y-(y'-ma-n)\,x+a\,(y'-mx')-nx'=0.$$

Die Gleichung von BC ist

$$(x''-a)\,y-(y''-ma-n)\,x+a\,(y''-mx'')-nx''=0.$$

Daraus $\quad OA=-\dfrac{a\,(y'-mx')-nx'}{x'-a};\; OB=\dfrac{a(y''-mx'')-nx''}{y''-ma-n}.$

Daher ist die Gleichung von AB

$$x\frac{y''-ma-n}{a(y''-mx'')-nx''}-y\frac{x'-a}{a(y'-mx')-nx'}=1.$$

Wenn diese Gleichung von Brüchen befreit wird, so enthält sie im Allgemeinen a im zweiten Grade und die Basis geht daher im Allgemeinen nicht durch einen festen Punkt. Wenn aber die Punkte $x'\,y'$, $x''\,y''$ in einer durch O gehenden geraden Linie $y=kx$ liegen, so dass wir $y''=kx''$ und $y'=kx'$ substituiren können, so wird die Gleichung

$$x\frac{y''-ma-n}{x''}-y\frac{x'-a}{x'}=a(k-m)-n,$$

welche a nur im ersten Grade enthält und somit eine durch einen festen Punkt gehende gerade Linie bezeichnet.

Aufg. 4. Wenn eine gerade Linie so bestimmt wird, dass die Producte der auf sie von einer Anzahl fester Punkte gefällten Perpendikel mit bestimmten Constanten die Summe Null geben, so geht dieselbe durch einen festen Punkt.

Aufl. Ist die Gleichung der geraden Linie

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

so ist die von $x'\ y'$ auf sie gefällte Senkrechte von der Länge

$$x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - p$$

und die Bedingungen der Aufgabe liefern die Gleichung

$$m'(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p) + m''(x''\cos\alpha + y''\sin\alpha - p) \\ + m'''(x'''\cos\alpha + y'''\sin\alpha - p) + \ldots\ldots = 0.$$

Unter Benutzung der Bezeichnung $\Sigma(m\,x')$ für die algebraische Summe der $m\,x$, d. h. für $m'x' + m''x'' + \ldots\ldots$ und in gleicher Art $\Sigma(m\,y')$ für $m'y' + m''y'' + \ldots\ldots$, $\Sigma(m)$ für $m' + m'' + \ldots\ldots$ können wir diese Gleichung schreiben

$$\Sigma(mx')\cos\alpha + \Sigma(my')\sin\alpha - p\,\Sigma(m) = 0.$$

Und indem wir in die Originalgleichung den hieraus erhaltenen Werth von p substituiren, erhalten wir für die Gleichung der beweglichen geraden Linie

$$x\Sigma(m)\cos\alpha + y\,\Sigma(m)\sin\alpha - \Sigma(mx')\cos\alpha - \Sigma(my')\sin\alpha = 0$$

oder $\quad x\,\Sigma(m) - \Sigma(mx') + [y\,\Sigma(m) - \Sigma(my')]\tan\alpha = 0.$

Da diese Gleichung die unbestimmte Grösse $\tan\alpha$ im ersten Grade enthält, so geht die durch sie ausgedrückte gerade Linie durch den festen Punkt, welchen die Gleichungen

$$x\,\Sigma(m) - \Sigma(mx') = 0,\ y\,\Sigma(m) - \Sigma(my') = 0$$

bestimmen, d. h. durch den Punkt

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + \ldots\ldots}{m' + m'' + \ldots\ldots},\quad y = \frac{m'y' + m''y'' + \ldots\ldots}{m' + m'' + \ldots\ldots}.$$

Dieser Punkt wird oft als das **Centrum der mittlern Entfernungen** der gegebenen Punkte bezeichnet.

51. Wenn die Gleichung einer geraden Linie die Coordinaten irgend eines Punktes im ersten Grade enthält, sowie

$$(Ax' + By' + C)\,x + (A'x' + B'y' + C')\,y + (A''x' + B''y' + C'') = 0,$$

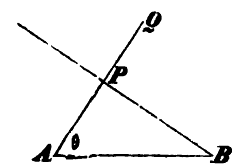
so geht diese gerade Linie immer durch einen festen Punkt, wenn der Punkt $x'y'$ sich auf einer geraden Linie bewegt. Denn wenn der Punkt $x'y'$ stets in einer geraden Linie

$$Lx' + My' + N = 0$$

liegt, so kann mit Hülfe dieser Relation x' aus der gegebenen Gleichung eliminirt werden und die unbestimmte Grösse y' verbleibt im ersten Grade in derselben, die Linie geht also durch einen festen Punkt. Daraus entspringt der Satz: **Wenn die Coefficienten in der Gleichung $Ax + By + C = 0$ durch die Relation $aA + bB + cC = 0$ verbunden sind, in welcher a, b, c Constanten sind, indess A, B, C veränderlich gedacht werden, so geht die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie immer durch einen festen Punkt.**

Denn durch Elimination von C zwischen beiden Gleichungen erhalten wir $$(cx - a)A + (cy - b)B = 0$$ die Gleichung einer durch den Punkt $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gehenden geraden Linie.

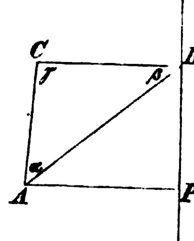
52. **Polar-Coordinaten.** Es ist im Allgemeinen nützlich, diese Methode anzuwenden, wenn die Aufgabe verlangt, den Ort der Endpunkte von geraden Linien zu finden, welche nach einem gegebenen Gesetz durch einen festen Punkt gezogen sind.



Aufg. 1. A und B sind zwei feste Punkte; durch B wird eine gerade Linie gezogen und von A ein Perpendikel AP darauf gefällt, und dasselbe so verlängert, dass das Rechteck $AP.AQ$ constant bleibt. Welches ist der Ort des Punktes Q?

Aufl. Wir nehmen A zum Pol und AB zur festen Axe, so dass AQ der durch ϱ zu bezeichnende Radius vector und der Winkel $QAB = \theta$ ist; die Aufgabe fordert, die zwischen ϱ und θ bestehende Relation zu finden. Wir setzen $AB = c$ und haben aus dem rechtwinkligen Dreieck APB $AP = c . \cos\theta$; wegen $AP . AQ = \text{const.} = k^2$ ist sodann
$$\varrho c \cos\theta = k^2, \text{ oder } \varrho \cos\theta = \frac{k^2}{c};$$
wir haben im Art. 44 gesehen, dass dieses die Gleichung einer zu AB senkrechten geraden Linie ist, die in der Entfernung $= \frac{k^2}{c}$ vom Pol vorbeigeht.

Aufg. 2. Von einem Dreieck, dessen Winkel gegeben sind, ist eine der Ecken A fixirt, die zweite B bewegt sich längs einer festen geraden Linie, man soll den Ort der dritten finden.

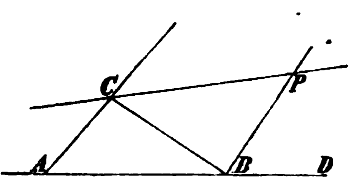


Aufl. Wir nehmen die feste Ecke A zum Pol und das von ihm zur festen Linie gefällte Perpendikel AP zur Axe, so dass $AC = \varrho$, $\angle CAP = \theta$ ist.

Da die Winkel des Dreiecks ABC gegeben sind, so ist AB in einem festen Verhältniss zu
$$AC \; (= m . AC) \text{ und } \angle BAP = \theta - \alpha;$$
aber man hat $\quad AP = AB . \cos BAP,$
d. h. indem man AP durch a bezeichnet
$$m\,\varrho \cos(\theta - \alpha) = a,$$
welches nach Art. 44 die Gleichung einer geraden Linie ist, die mit der gegebenen einen Winkel α bildet und die Entfernung $\frac{a}{m}$ vom Pol A besitzt.

Aufg. 3. In einem Dreieck ist die Basis und die Summe der Seiten gegeben; in einem Endpunkt der Basis B errichtet man auf der an-

liegenden Seite BC ein Perpendikel und verlangt, den Ort des Punktes P zu finden, wo dieses von der äusseren Halbirungslinie CP des Winkels an der Spitze getroffen wird.



Aufl. Indem wir den Punkt B zum Pol wählen, wird BP der Radius vector ϱ und durch Wahl der verlängerten Basis zur festen Axe wird der Winkel $PBD = \theta$, und die Aufgabe verlangt, ϱ durch θ auszudrücken. Wir bezeichnen die Seiten und die Gegenwinkel des Dreiecks durch a, b, c, A, B, C; dann ist offenbar $\angle BCP = 90^0 - \frac{1}{2} C$ und aus dem Dreiecke PCB $a = \varrho \tan \frac{1}{2} C$. Wenn wir a und $\tan \frac{1}{2} C$ durch θ ausdrücken können, so ist die Aufgabe gelöst.

Aus dem Dreieck ABC ist $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$; hier kann für b, $m - a$ eingesetzt werden, wenn m die gegebene Summe der Seiten bezeichnet und $\cos B$ ist $= \sin \theta$; daher

$$m^2 - 2am + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \theta,$$

und
$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \theta)}.$$

Hiernach bleibt nur übrig, einen Ausdruck für $\tan \frac{1}{2} C$ zu finden. Es ist
$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{b \sin C}{b(1 + \cos C)}.$$

Aber $b \sin C = c \sin B = c \cos \theta$; $b \cos C = a - c \cos B = a - c \sin \theta$;

also
$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{c \cos \theta}{m - c \sin \theta}.$$

Darnach können wir ϱ durch θ ausdrücken; denn indem wir die eben für a und $\tan \frac{1}{2} C$ erhaltenen Werthe in die Gleichung $a = \varrho \tan \frac{1}{2} C$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \theta)} = \frac{\varrho c \cos \theta}{(m - c \sin \theta)}, \text{ oder } \varrho \cos \theta = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Der Ort ist demnach eine zur Basis des Dreiecks senkrechte Linie, in dem Abstande $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ vom Punkte B.

Der Leser kann zu eigener Uebung den Ort untersuchen, welcher bei gegebener Differenz der Seiten durch die innere Halbirungslinie des Winkels an der Spitze bestimmt wird.

Aufg. 4. Gegeben sind n feste gerade Linien und ein fester Punkt O; wenn man durch diesen irgend einen Radius vector zieht, der diese geraden Linien in Punkten r_1, r_2, r_2, ... r_n schneidet, und in ihm einen Punkt R so bestimmt, dass

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{Or_1} + \frac{1}{Or_2} + \frac{1}{Or_3} + \ldots + \frac{1}{Or_n} \text{ ist,}$$

so soll man den Ort von R bestimmen.

Aufl. Wenn die Gleichungen der geraden Linien durch

$$\varrho \cos(\theta - \alpha) = p_1, \quad \varrho \cos(\theta - \beta) = p_2, \quad \varrho \cos(\theta - \gamma) = p_3, \text{ u. s. w.}$$

dargestellt werden, so ist die Gleichung des Ortes offenbar

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{\cos(\theta-\alpha)}{p_1} + \frac{\cos(\theta-\beta)}{p_2} + \frac{\cos(\theta-\gamma)}{p_3} + \ldots,$$

nach Art. 44 die Gleichung einer geraden Linie. Der hierin enthaltene Satz ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeinern, welchen wir später beweisen werden.

Wie in Art. 49 fügen wir eine Reihe von Aufgaben hinzu, welche zu Gleichungen von höheren Graden führen.

Aufg. 5. Eine feste Gerade BP hat die Gleichung $\varrho \cos\theta = m$ und in jedem Radius vector wird eine constante Länge PQ abgetragen; man soll den Ort des Punktes Q finden. (Fig. der Aufg. 1.)

Nach der Voraussetzung ist $AP = \frac{m}{\cos\theta}$; also ist $AQ = \varrho = \frac{m}{\cos\theta} + d$; in rechtwinklige Coordinaten übertragen, giebt diess

$$(x-m)^2(x^2+y^2) = d^2x^2.$$

Aufg. 6. Man soll den Ort von Q finden, wenn P irgend einen durch seine Polargleichung $\varrho = \varphi(\theta)$ gegebenen Ort durchläuft.

Da nach der Voraussetzung AP in Function von θ bestimmt ist und AP das um d verminderte ϱ des Ortes ist, so haben wir in die gegebene Gleichung nur $\varrho - d$ für ϱ zu substituiren.

Aufl. $\varrho - d = \varphi(\theta)$.

Aufg. 7. Wenn AQ so weit verlängert wird, dass $AQ = 2.AP$ ist, so ist AP die Hälfte von dem ϱ des Ortes und man hat an Stelle von ϱ in die gegebene Gleichung $\frac{\varrho}{2}$ zu substituiren.

Aufg. 8. Wenn der Winkel PAB halbirt und in der Halbirungslinie eine Strecke AP' abgetragen wird, so dass $AP'^2 = m.AP$ ist, so soll der Ort von P' gefunden werden unter der Voraussetzung, dass P eine gerade Linie beschreibt. Da nun PAB das Doppelte vom θ des Ortes ist, so hat man $AP = \frac{m}{\cos 2\theta}$ und die Gleichung des Ortes ist $\varrho^2 \cos 2\theta = m^2$.

*Viertes Kapitel.

Von der Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung der geraden Linie und den trimetrischen Coordinatensystemen.

53. Im Art. 40 ist gezeigt, dass die Gleichung

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) - k(x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) = 0$$

eine gerade Linie darstellt, welche durch den Schnittpunkt der beiden geraden Linien

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \ x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$$

gezogen ist. Es ist zweckmässig, für die Grössen, welche mit Null verglichen diese Gleichungen liefern, Abkürzungen anzuwenden; man verdankt Plücker die erste Ausführung dieses Gedankens und den Nachweis seiner ungemeinen Fruchtbarkeit. (Analytisch-geometrische Entwickelungen. I. 1828.) Indem wir $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ durch α und $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$ durch α_1 bezeichnen, wird der eben ausgesprochene Satz kürzer ausdrückbar; es bezeichnet $\alpha - k\alpha_1 = 0$ eine gerade Linie, welche durch den Schnittpunkt der beiden geraden Linien $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$ gezogen ist.

Ebenso bietet sich Gelegenheit für Gleichungen von geraden Linien in der Form $Ax + By + C = 0$ Abkürzungen zu gebrauchen, zur Unterscheidung sollen in diesen Fällen lateinische Buchstaben angewendet und die Buchstaben des griechischen Alphabets immer in dem Sinne gebraucht werden, dass die Gleichung in der Form $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ gedacht werde.

54. Wir untersuchen hiernach die Bedeutung des Coefficienten k in der Gleichung $\alpha - k\alpha_1 = 0$. Aus Art. 34 ist erinnerlich, dass die Grösse α, d. h. $(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$ die Länge des Perpendikels bezeichnet, welches man von irgend einem Punkte x, y auf die durch $\alpha = 0$ repräsentirte Linie OA fällen kann; und dass ebenso α_1 die Länge des vom Punkte x, y auf die durch $\alpha_1 = 0$ dargestellte Linie OB gefällten Perpendikels ausdrückt. Demnach sagt die Gleichung $\alpha - k\alpha_1 = 0$ oder $\alpha = k\alpha_1$ aus, dass das Verhältniss der Perpendikel, die man von irgend einem

Punkte des durch sie dargestellten Ortes auf die geraden Linien OA und OB fällen kann, constant und $= k$ sei. Der durch $\alpha - k\alpha_1 = 0$ dargestellte Ort ist eine durch O gehende gerade Linie und $k = \frac{PA}{PB} = \frac{\sin POA}{\sin POB}$. Nach den über die Vorzeichen festgesetzten Bestimmungen (Art. 34) ergiebt sich, dass $\alpha + k\alpha_1 = 0$ eine gerade Linie bezeichnet, welche den Winkel AOB äusserlich so theilt, dass $\sin POA = k \sin POB$ ist. Insofern die gerade Linie (oder der Strahl) OP den Winkel zwischen den Strahlen OA, OB nach diesem Sinusverhältniss theilt, bezeichnen wir sie als einen Theilstrahl. Im Vorigen ist angenommen, dass die Perpendikel PA, PB diejenigen sind, die wir als positiv zu betrachten übereinkamen, indess diejenigen, welche von den entgegengesetzten Seiten von α, α_1 gefällt werden, negativ heissen.

Bezeichnen wir ebenso durch das Symbol $\mathbf{A}_1 = 0$ die durch $Ax + By + C = 0$ dargestellte Gerade, so ist $\mathbf{A}_1 - k\mathbf{A}_2 = 0$ eine durch den Schnittpunkt der geraden Linien $\mathbf{A}_1 = 0$ und $\mathbf{A}_2 = 0$ oder $Ax + By + C = 0$ und $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ gehende gerade Linie, und wenn x, y die Coordinaten eines ihrer Punkte P bezeichnen, so hat man für die Abstände desselben von den beiden Geraden Werthe p, p_1 (Art. 34), mit welchen sich ergiebt $p\sqrt{A^2 + B^2} = \mathbf{A}_1$, $p_1\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \mathbf{A}_2$, somit durch Substitution

$$p\sqrt{A^2 + B^2} - k p_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = 0 \text{ oder } k = \frac{p}{p_1}\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A_1^2 + B_1^2}};$$

d. h. k unterscheidet sich von dem Verhältniss der Abstände nur durch einen constanten Factor, oder ist diesem Verhältniss proportional. Wenn also k alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, so stellt ebenso $\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$ wie $\mathbf{A}_1 - k\mathbf{A}_2 = 0$ alle durch den Punkt O in der Ebene von OA und OB gelegenen Strahlen dar, oder das Strahlbüschel aus dem Punkte O.

Aufg. 1. Man soll mit Hilfe dieser Bezeichnung den Beweis führen, dass die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Die Gleichungen der Halbirungslinien sind nach Art. 35, 54

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad \alpha_3 - \alpha_1 = 0,$$

wenn die Gleichungen der Seiten durch $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ ausgedrückt sind. Da die drei Gleichungen der Halbirungslinien die Identität $0 = 0$ zur Summe geben, so haben die Linien selbst einen gemeinsamen Durchschnittspunkt.

Aufg. 2. Die Halbirungslinien von zwei äusseren Winkeln eines Dreiecks schneiden sich auf der Halbirungslinie des dritten innern Winkels.

Indem man sich der Uebereinkunft hinsichtlich der Zeichen erinnert, erkennt man leicht, dass die Gleichungen der beiden ersten Halbirungslinien durch $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ gegeben sind; ihre Subtraction liefert $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, die Gleichung der Halbirungslinie des dritten inneren Winkels.

Aufg. 3. Die drei Höhenperpendikel in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkte.

Wenn man die den Seiten $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ respective gegenüberliegenden Winkel durch A_1, A_2, A_3 bezeichnet, so ergeben sich die Gleichungen der Höhenperpendikel nach Art. 54 als

$$\alpha_1 \cos A_1 - \alpha_2 \cos A_2 = 0, \quad \alpha_2 \cos A_2 - \alpha_3 \cos A_3 = 0,$$

$\alpha_3 \cos A_3 - \alpha_1 \cos A_1 = 0$, weil jedes derselben den Winkel, von dessen Scheitel es ausgeht, in Theile zerlegt, die die Complemente der benachbarten Winkel sind; der Anblick dieser Gleichungen lehrt, dass sie drei gerade Linien darstellen, die sich in demselben Punkte schneiden.

Aufg. 4. In jedem Dreieck gehen die geraden Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten durch einen Punkt.

Die Perpendikel, welche man von dem Mittelpunkte der Seite $\alpha_3 = 0$ auf die benachbarten Seiten fällen kann, stehen in dem Verhältniss $\sin A_1 : \sin A_2$ und es sind somit die Gleichungen der bezeichneten Halbirungslinien

$$\alpha_1 \sin A_1 - \alpha_2 \sin A_2 = 0, \; \alpha_2 \sin A_2 - \alpha_3 \sin A_3 = 0, \; \alpha_3 \sin A_3 - \alpha_1 \sin A_1 = 0.$$

Aufg. 5. Die Längen der Seiten eines Vierecks sind l_1, l_2, l_3, l_4; man soll die Gleichung der geraden Linie finden, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

Aufl. Sie ist $l_1 \alpha_1 - l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 - l_4 \alpha_4 = 0$; denn die durch sie dargestellte gerade Linie geht durch den Schnittpunkt der Linien $l_1 \alpha_1 - l_2 \alpha_2 = 0$, $l_3 \alpha_3 - l_4 \alpha_4 = 0$, welche nach der letzten Aufgabe in zwei Dreiecken, die eine Diagonale als gemeinschaftliche Basis haben, den Mittelpunkt derselben mit der respectiven Gegenecke verbindet. Ebenso durchschneiden sich die durch $l_1 \alpha_1 - l_4 \alpha_4 = 0$ und $l_2 \alpha_2 - l_3 \alpha_3 = 0$ dargestellten geraden Linien im Mittelpunkt der andern Diagonale.

Aufg. 6. Welches ist die Gleichung der auf der Basis eines Dreiecks in ihrem Endpunkte errichteten Senkrechten?

Aufl. $\alpha_1 + \alpha_3 \cos A_2 = 0$.

Aufg. 7. Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, dass die Senkrechten von den Ecken des ersten auf die Seiten des zweiten sich in einem Punkte schneiden, so gehen auch die Senkrechten von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten durch einen Punkt.

Man bezeichne durch $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\alpha_1' = 0$, $\alpha_2' = 0$, $\alpha_3' = 0$ die Seiten der beiden Dreiecke, durch $(\alpha_1 \alpha_2)$ den Winkel zwischen $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ und in derselben Weise alle andern, so ergiebt sich die Gleichung der von der Ecke α_1, α_2 auf die Seite $\alpha_3' = 0$ gefällten Senk-

rechten in der Form $\alpha_1 \cos(\alpha_2 \alpha_3') - \alpha_2 \cos(\alpha_1 \alpha_3') = 0$; und die beiden Senkrechten von den Ecken α_2, α_3 und α_3, α_1 auf die Seiten $\alpha_1' = 0$ und $\alpha_2' = 0$ respective in den Formen

$$\alpha_2 \cos(\alpha_3 \alpha_1') - \alpha_3 \cos(\alpha_2 \alpha_1') = 0, \quad \alpha_3 \cos(\alpha_1 \alpha_2') - \alpha_1 \cos(\alpha_3 \alpha_2') = 0.$$

Indem man zwischen den beiden ersten Gleichungen α_2 eliminirt und die erhaltene Gleichung mit der dritten verbindet, erhält man die Bedingung, dass diese drei geraden Linien durch einen Punkt gehen, in der Form

$$\cos(\alpha_1 \alpha_2') \cos(\alpha_2 \alpha_3') \cos(\alpha_3 \alpha_1') = \cos(\alpha_1' \alpha_2) \cos(\alpha_2' \alpha_3) \cos(\alpha_3' \alpha_1),$$

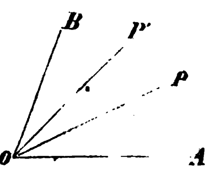
und die vollständige Symmetrie dieser Gleichung zeigt, dass sie ebensowohl die Bedingung ausdrückt, unter welcher die von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällten Perpendikel durch einen Punkt gehen.

55. Die geraden Linien $\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$ und $k\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ bilden mit der geraden Linie $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, welche den von den Linien $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ gebildeten Winkel halbirt, gleiche Winkel, weil die eine von ihnen mit der Linie $\alpha_1 = 0$ denselben Winkel bildet, wie die andere mit der Linie $\alpha_2 = 0$.

Aufg. Wenn von den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien durch denselben Punkt gezogen werden, so schneiden sich auch die drei geraden Linien in einem Punkte, welche von denselben Ecken und unter derselben Neigung gegen die resp. Winkelhalbirungslinien gezogen werden, wie die vorigen.

Sind $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ die Seiten des Dreiecks und $l\alpha_1 - m\alpha_2 = 0$, $m\alpha_2 - n\alpha_3 = 0$, $n\alpha_3 - l\alpha_1 = 0$ die drei von den Ecken des Dreiecks ausgehenden geraden Linien, als welche nach dem Princip des Art. 40 sich in einem Punkte durchschneiden müssen; dann sind nach dem gegenwärtigen Art. die Gleichungen der drei geraden Linien, die mit jenen unter gleichen Winkeln gegen die betreffende Winkelhalbirungslinie des Dreiecks von denselben Ecken aus gezogen sind, $\frac{\alpha_1}{l} - \frac{\alpha_2}{m} = 0$, $\frac{\alpha_2}{m} - \frac{\alpha_3}{n} = 0$, $\frac{\alpha_3}{n} - \frac{\alpha_1}{l} = 0$ und diese Linien schneiden sich daher in einem Punkte.

56. Wenn $\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - k'\alpha_2 = 0$ die Gleichungen von zwei geraden Linien sind, so drückt $k : k'$ das Verhältniss der beiden Verhältnisse aus, nach welchen die Theilstrahlen $\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - k'\alpha_2 = 0$ den von den Strahlen $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ gebildeten Winkel theilen; sind die letzteren OA und OB, die ersteren aber OP und OP', so ist $k = \frac{\sin AOP}{\sin BOP}$, $k' = \frac{\sin AOP'}{\sin BOP'}$ und somit $k : k' = \frac{\sin AOP}{\sin BOP} : \frac{\sin AOP'}{\sin BOP'}$. Man nennt diesen Aus-



druck deshalb das Doppelverhältniss des Büschels der vier geraden Linien. (Möbius, der barycentrische Calcul. 1827.) Wenn $k:k' = -1$ ist, so dass der Winkel AOB innerlich und äusserlich so getheilt ist, dass die sinus der Theilwinkel einerlei Verhältniss besitzen, so nennt man das Büschel und das Doppelverhältniss ein harmonisches. Die beiden durch $\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + k\alpha_2 = 0$ dargestellten geraden Linien bilden also mit den durch $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ dargestellten ein harmonisches Büschel. In Beziehung darauf hat Chasles den Ausdruck

$$k:k' = \frac{\sin AOP \,.\, \sin P'OB}{\sin AOP' \,.\, \sin POB}$$

die anharmonische Function oder das anharmonische Verhältniss genannt, und diese Benennung hat, obwohl wenig glücklich, grosse Verbreitung gefunden. Chasles hat das anharmonische Verhältniss zur Grundlage eines Systems der Geometrie gemacht. (Traité de Géométrie supérieure. 1852. — Traité des Sections coniques, première partie. 1865.) Aber schon Steiner hatte seine grundlegende Bedeutung für die Geometrie entwickelt in seinem Werke: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. 1832.

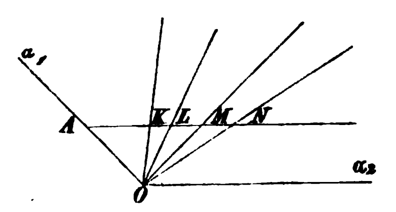
57. Die grosse Wichtigkeit des Doppelverhältnisses beruht auf einem schon den Alten bekannten Satze (Pappus, Collectiones mathem. VII, 129): Wenn vier von demselben Punkte O ausgehende gerade Linien von einer beliebigen geraden Linie in den Punkten A, P, P', B geschnitten werden, so ist das Doppelverhältniss $\frac{AP}{BP} : \frac{AP'}{BP'}$ der vier Schnittpunkte unabhängig von der Lage der Transversale und dem Doppelverhältniss des Büschels der vier geraden Linien gleich. Man beweist denselben, indem man den senkrechten Abstand jedes Punktes O von der Transversale einführt und bemerkt, dass die Flächen der Dreiecke AOP, $P'OB$, AOP', POB die Gleichungen liefern

$$p \,.\, AP = OA \,.\, OP \,.\, \sin AOP, \quad p \,.\, BP' = OP' \,.\, OB \,.\, \sin BOP'$$
$$p \,.\, AP' = OA \,.\, OP' \,.\, \sin AOP', \quad p \,.\, BP = OP \,.\, OB \,.\, \sin BOP.$$

Denn aus diesen entspringen durch Multiplication

$$p^2 . AP . BP' = OA . OB . OP . OP' . \sin AOP . \sin BOP',$$
$$p^2 . AP' . BP = OA . OB . OP . OP' . \sin AOP' . \sin BOP$$
und durch Division dieser letzteren
$$\frac{AP}{BP} : \frac{AP'}{BP'} = \frac{\sin AOP}{\sin BOP} : \frac{\sin AOP'}{\sin BOP'}$$
worin die rechte Seite, das Doppelverhältniss des Strahlbüschels. von der Lage der Transversale unabhängig ist. (Vergl. Art. 78.)

58. Das Doppelverhältniss von vier Strahlen eines Büschels $\alpha_1 - k\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - l\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - m\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - n\alpha_2 = 0$ wird durch $\frac{k-l}{n-l} : \frac{k-m}{n-m}$ ausgedrückt.



Denn wenn die Strahlen des Büschels von einer willkürlichen Parallelen zu der geraden Linie $\alpha_2 = 0$ in den Punkten K, L, M, N geschnitten wird, so ist das Doppelverhältniss des Büschels durch $\frac{KL}{NL} : \frac{KM}{NM}$ dargestellt; da aber der Abstand α_2 für alle diese vier Punkte denselben Werth hat, so sind die Abstände derselben von $\alpha_1 = 0$ in Folge der Gleichungen der geraden Linien zu den Grössen k, l, m, n proportional; und da die Strecken AK, AL, AM, AN ihrerseits diesen Abständen proportional sind so müssen auch KL, NL, KM, NM respective zu $k-l$, $n-l$, $k-m$, $n-m$ proportional sein. Der Ausdruck des Doppelverhältnisses zeigt, dass für einen gegebenen Werth d desselben zu drei gegebenen Strahlen sich der vierte eindeutig bestimmt; denn betrachtet man z. B. m als unbekannte Grösse, so erhält man für seinen Werth den Ausdruck $\frac{n(k-l) + dk(l-n)}{(k-l) + d(l-n)}$.

59. Die Sätze der Art. 56 und 58 bleiben gültig, wenn die geraden Linien in der Form $\mathbf{A}_1 - k\mathbf{A}_2 = 0$, $\mathbf{A}_1 - l\mathbf{A}_2 = 0$, etc. ausgedrückt werden, wo $\mathbf{A}_1 = A_1x + B_1y + C_1$, $\mathbf{A}_2 = A_2x + B_2y + C_2$ ist. Denn nach Art. *24 wird die Gleichung $Ax + By + C = 0$ durch Division mit einem Factor auf die Form $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ gebracht. Die Gleichungen $\mathbf{A}_1 - k\mathbf{A}_2 = 0$, $\mathbf{A}_1 - l\mathbf{A}_2 = 0$, etc. sind daher mit den andern $\alpha_1 - k\varrho\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - l\varrho\alpha_2 = 0$, etc. äquivalent, wenn ϱ das Verhältniss der Factoren ist, durch welche

A_1, A_2 dividirt werden müssen, um sie auf die Formen α_1, α_2 zu bringen (Vergl. Art. 54.). Der Ausdruck des Doppelverhältnisses bleibt aber bei der Substitution $k\varrho$, $l\varrho$, $m\varrho$, $n\varrho$ für k, l, m, n respective ungeändert.

Aus dem Umstande, dass der Ausdruck des Doppelverhältnisses nur die Coefficienten k, l, m, n enthält, folgt, dass die Doppelverhältnisse verschiedener Strahlbüschel gleichen Werth haben, sobald diese Coefficienten übereinstimmen, welches auch ihre Scheitel und ihre ursprünglichen Strahlen sind. Ist $A_1 - kA_2 = 0$, $A_1 - lA_2 = 0$, etc. die Reihe der Gleichungen der Strahlen des einen Büschels und $B_1 - kB_2 = 0$, $B_1 - lB_2 = 0$, etc. die von denen der Strahlen des andern, und nennen wir diejenigen Strahlen beider Büschel entsprechend, in deren Gleichungen derselbe Coefficient auftritt, also z. B. $A_1 - kA_2 = 0$ und $B_1 - kB_2 = 0$, so ist immer das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen des einen Büschels dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Strahlen des andern Büschels gleich. Wir werden oft Gelegenheit haben, von solchen Systemen von geraden Linien zu sprechen, die als homographische, projectivische oder conforme Strahlbüschel bezeichnet werden.

Nach dem Schluss des vorigen Art. bestimmen drei Paare von entsprechenden Strahlen zwei projectivische Büschel vollständig und eindeutig. In Verbindung mit dem Satze des Art. 57 findet man ferner, dass zwei projectivische Strahlbüschel immer in solche Lage zu einander gebracht werden können, dass die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Strahlen auf einer und derselben geraden Linie liegen; denn wenn man die Strahlen des einen Büschels durch eine Transversale schneidet, so ist nur nöthig, durch die Punkte 1, 2, 3 derselben auf drei bestimmten Strahlen des Büschels drei gerade Linien nach einem Punkte so zu ziehen, dass die von ihnen mit einander gebildeten Winkel denen gleich sind, welche die jenen Strahlen des ersten Büschels entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels mit einander bilden. Jener Punkt bestimmt sich als Schnitt von zwei Kreisbogen und die Strahlen, welche von ihm nach den Schnittpunkten der Transversale mit den respectiven Strahlen des ersten Büschels gezogen werden, sind genau die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels.

60. **Wenn drei gerade Linien α_1, α_2, α_3 gegeben sind, welche ein Dreieck bilden, so kann die Gleichung jeder beliebigen Geraden $ax + by + c = 0$ in die Form $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ gesetzt werden.**

Denn wenn man die Werthe von α_1, α_2, α_3 in voller Länge einführt, so wird $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$

$$(a_1 \cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3)x + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3)y$$
$$- (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) = 0$$

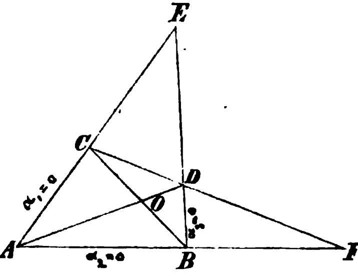
und diess kann mit der Gleichung einer beliebigen Geraden identisch gemacht werden, wenn gleichzeitig

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3 = a,\ a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + a_3\sin\alpha_3 = b,$$
$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = -c \quad \text{ist.}$$

Die Grössen a_1, a_2, a_3 können aber stets so bestimmt werden, dass sie diesen Gleichungen genügen; vorausgesetzt nur, dass die drei gegebenen Geraden nicht durch einen Punkt gehen, da dann die Gerade $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ nothwendig auch durch diesen Punkt gehen müsste und mit einer ihn nicht enthaltenden Geraden nicht indentificirt werden könnte*).

Das Princip, dass es möglich ist, die Gleichung jeder geraden Linie in Gliedern aus den Gleichungen von irgend drei gegebenen geraden Linien $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ auszudrücken, wird ferner durch die folgenden Aufgaben erläutert.

Aufg. 1. Die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks analytisch abzuleiten.



Sind die Gleichungen von AC, AB, BD respective $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, so können die Gleichungen von AD und BC durch $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0$, $a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0$ resp. ausgedrückt werden. Die Gleichungen aller andern geraden Linien der Figur lassen sich mit Hilfe der bisher eingeführten Grössen ausdrücken.

---

*) Das Nämliche gilt auch für gerade Linien in der Gleichungsform $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ oder $A'x + B'y + C' = 0$, etc.; denn $l_1P_1 + l_2P_2 + l_3P_3 = 0$ kann mit jeder Geraden $ax + by + c = 0$ identisch gemacht werden durch Erfüllung der Bedingungen

$$l_1A' + l_2A'' + l_3A''' = a,\ l_1B' + l_2B'' + l_3B''' = b,\ l_1C' + l_2C'' + l_3C''' = c; \text{ es ist}$$
$$l_1 = \frac{a\,(B''C''' - B'''C'') + b\,(C''A''' - C'''A'') + c\,(A''B''' - A'''B'')}{A'(B''C''' - B'''C'') + B'(C''A''' - C'''A'') + C'(A''B''' - A'''B'')}, \text{ etc.}$$

So ist $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ die Gleichung von CD, denn sie ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Durchschnittspunkt von $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0 (AD)$ und $\alpha_3 = 0 (BD)$ und durch den von $\alpha_1 = 0 (AC)$ und $a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0 (BC)$, d. h. durch die Punkte D und C hindurchgeht.

Ferner ist $a_1\alpha_1 - a_3\alpha_3 = 0$ die Gleichung von OE, weil sie durch E, den Durchschnittspunkt von $\alpha_1 = o (AC)$ und $\alpha_3 = o (BD)$ und auch durch den Durchschnittspunkt von

$$a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0 \ (AD) \text{ und } a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0 \ (BC)$$

hindurchgeht; das letztere, weil

$$a_1\alpha_1 - a_3\alpha_3 = (a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2) + (a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3) \text{ ist.}$$

Die gerade Linie EF verbindet den Durchschnittspunkt von $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0 (E)$ mit dem von $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0 (F)$ und ihre Gleichung ist daher $a_1\alpha_1 + a_3\alpha_3 = 0$.

Endlich ist die Gleichung von FO, welche die Punkte $a_1\alpha_1 + a_3\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$ oder F und $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0$, $a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0$ oder O verbindet, $a_1\alpha_1 - 2a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$.

Aus Art. 56 ergiebt sich jetzt, dass die vier Linien EA, EB, EO, EF ein harmonisches Büschel bilden, denn ihre Gleichungen sind resp.

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_3 = 0, \ a_1\alpha_1 - a_3\alpha_3 = 0, \ a_1\alpha_1 + a_3\alpha_3 = 0;$$

und ebenso bilden die Geraden FE, FO, FC, FB ein harmonisches Büschel, weil ihre Gleichungen heissen

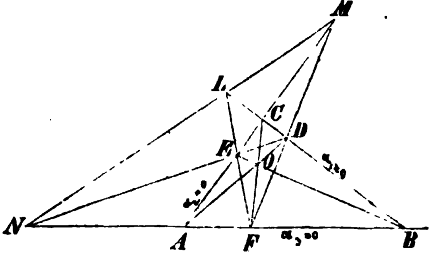
$$a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \pm a_2\alpha_2 = 0, \ a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0, \ \alpha_2 = 0$$

und endlich die Linien OC, OD, OE, OF als von den Gleichungen

$$a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0, \ a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0, \ a_1\alpha_1 - a_3\alpha_3 = 0,$$
$$a_1\alpha_1 - 2a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \text{ oder}$$
$$a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0, \ a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0, \ a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 \pm (a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3) = 0$$

sind. Auf diese Eigenschaften des Vierecks gründet sich die Construction der vierten Harmonikalen.

Aufg. 2. Man soll die Eigenschaften des Liniensystems discutiren, welches gebildet wird, wenn man durch die Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht, die sich in einem Punkte schneiden.



Sei ABC das Dreieck und die Gleichungen seiner Seiten AB, BC, CA resp.
$\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$; dann kann man die Gleichungen der drei durch den Punkt O gehenden Geraden OA, OB, OC resp.

$$a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0,$$
$$a_3\alpha_3 - a_1\alpha_1 = 0,$$
$$a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0$$

wählen (Art. 55). Dadurch sind aber die Gleichungen aller andern geraden Linien der Figur bestimmt, es ist z. B die Gleichung von EF

$$a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 - a_1\alpha_1 = 0,$$

denn sie geht durch den Punkt E oder den Schnittpunkt der Linien $\alpha_2 = 0$, $a_3\alpha_3 - a_1\alpha_1 = 0$ und durch F, den Schnittpunkt von

$$\alpha_3 = 0, \; a_2\alpha_2 - a_1\alpha_1 = 0.$$

Ebenso ist $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ die Gleichung von DF und $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0$ die Gleichung von DE. Darnach ergiebt sich leicht, dass die Punkte L, M, N, d. h. die Durchschnittspunkte von EF oder $a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 - a_1\alpha_1 = 0$ mit BC oder $\alpha_1 = 0$, von FD oder $a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ mit CA oder $\alpha_2 = 0$, und von DE oder $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0$ mit AB oder $\alpha_3 = 0$ in einer geraden Linie liegen, deren Gleichung $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ ist.

Die Gleichung der Linie CN ist $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$, denn es ist diess eine durch C, den Schnittpunkt von $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ und N, den Schnittpunkt von $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 = 0$ mit $\alpha_3 = 0$ gehende gerade Linie.

Man erkennt daraus, dass BN harmonisch getheilt ist, denn die Gleichungen der vier geraden Linien CN, CA, CF, CB sind

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0, \; \alpha_2 = 0, \; a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 = 0, \; \alpha_1 = 0.$$

In derselben Art erkennt man auch die Punktreihen L, C, D, B und M, C, E, A als harmonisch, und die gerade Linie LMN bezeichnet somit auf den Seiten des Dreiecks die Punkte, welche zu den von den durch O gezogenen Transversalen angegebenen Schnittpunkten conjugirt harmonisch sind.

Die Gleichungen dieser Aufgabe sind auf mehrere specielle Fälle von häufigem Vorkommen anwendbar. So ist nach Aufg. 3, Art. 54 die Gleichung der Linie, welche die Fusspunkte zweier Höhen eines Dreiecks verbindet, $\alpha_1 \cos A_1 + \alpha_2 \cos A_2 - \alpha_3 \cos A_3 = 0$; die gerade Linie $\alpha_1 \cos A_1 + \alpha_2 \cos A_2 + \alpha_3 \cos A_3 = 0$ geht durch die Durchschnittspunkte dieser die Höhenfusspunkte verbindenden Geraden mit den respectiven Gegenseiten des Dreiecks. Ebenso repräsentirt

$$\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 - \alpha_3 \sin A_3 = 0$$

die Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei Seiten des Dreiecks, etc.

Aufg. 3. Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind (collinear, homolog), dass die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten in einer geraden Linie liegen (Axe der Collineation), so gehen die geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken beider Dreiecke verbinden, durch denselben Punkt (Centrum der Collineation).

Wenn die Seiten des ersten Dreiecks durch $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ repräsentirt werden und $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ die Gleichung der geraden Linie ist, in welcher die entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks jenen begegnen, so müssen die Seiten des zweiten Dreiecks, welche jenen resp. entsprechen, durch Gleichungen von der Form

$$a_1'\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0, \; a_1\alpha_1 + a_2'\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0,$$
$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3'\alpha_3 = 0$$

dargestellt werden und man erhält durch successive Subtraction dieser drei Gleichungen von einander die folgenden

$$(a_1 - a_1')\alpha_1 = (a_2 - a_2')\alpha_2, \; (a_2 - a_2')\alpha_2 = (a_3 - a_3')\alpha_3,$$
$$(a_3 - a_3')\alpha_3 = (a_1 - a_1')\alpha_1,$$

welche nach dieser ihrer Ableitung gerade Linien durch die Ecken des zweiten Dreiecks und nach ihrer Form gerade Linien durch die entsprechenden Ecken des erstern darstellen, zugleich aber durch den blossen Anblick als durch denselben Punkt gehend erkannt werden.

61. Man soll die Bedingung ableiten, unter welcher zwei gerade Linien $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$, $a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2 + a_3'\alpha_3 = 0$ zu einander rechtwinklig sind.

Wenn man wie in Art. 60 diese Gleichungen der Geraden in entwickelter Form schreibt, so kann man das Criterium des Art. 25, 2 anwenden, nach welchem $AA' + BB' = 0$ diese Bedingung ist; man findet dann für die fragliche Bedingung

$$a_1a_1' + a_2a_2' + a_3a_3' + (a_2a_3' + a_2'a_3)\cos(\alpha_2 - \alpha_3) + (a_3a_1' + a_3'a_1)\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + (a_1a_2' + a_1'a_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Da aber α_2 und α_3 die Winkel sind, welche die Normalen auf die Linien α_2, α_3 mit der Axe der x bilden, so ist $(\alpha_2 - \alpha_3)$ der Winkel dieser Normalen, welcher gleich oder supplementär dem Winkel der Linien selbst ist. Denken wir den Anfangspunkt der Coordinaten innerhalb des Dreiecks und bezeichnen wir durch A_1, A_2, A_3 seine Winkel, so ist $(\alpha_2 - \alpha_3)$ das Supplement von A_1. Die Bedingung der Orthogonalität beider Geraden ist also

$$a_1a_1' + a_2a_2' + a_3a_3' - (a_2a_3' + a_2'a_3)\cos A_1 - (a_3a_1' + a_3'a_1)\cos A_2 - (a_1a_2' + a_1'a_2)\cos A_3 = 0.$$

Als ein specieller Fall des Vorigen ergiebt sich die Bedingung, unter welcher die Gerade $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ zur Seite $\alpha_3 = 0$ normal ist, $a_3 = a_2 \cos A_1 + a_1 \cos A_2$.

Auf demselben Wege finden wir die Länge der Normalen von dem Punkte $x'y'$ auf die gerade Linie $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$. Die Anwendung der Formel des Art. 34 auf die entwickelte Form dieser Gleichung liefert für die abkürzenden Bezeichnungen $x'\cos\alpha_1 + y'\sin\alpha_1 - p_1 = \alpha_1'$, $x'\cos\alpha_2 + y'\sin\alpha_2 - p_2 = \alpha_2'$, etc. das Resultat

$$\frac{a_1\alpha_1' + a_2\alpha_2' + a_3\alpha_3'}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos A_1 - 2a_3a_1\cos A_2 - 2a_1a_2\cos A_3)}}.$$

Wenn der Zähler dieses Ausdrucks verschwindet, so liegt der Ausgangspunkt der Normale in der geraden Linie selbst. Die Bedeutung vom Verschwinden des Nenners wird später erhellen; ihr Interesse wird dadurch erhöht, dass das Verschwinden des Nenners nach der letztvorhergehenden Formel als die Bedingung der Orthogonalität für zwei Gerade erscheint, welche sich decken.

Aufg. 1. **Man soll die Gleichung einer Normalen zu $\alpha_3 = 0$ in ihrem Endpunkte A_2 bestimmen.**

Aufl. Sie ist nothwendig von der Form $a_1 \alpha_1 + a_3 \alpha_3 = 0$, und die Bedingung dieses Art. giebt $a_3 = a_1 \cos A_2$, wie in Aufg. 6, Art. 54 bereits gefunden wurde.

Aufg. 2. **Man soll die Gleichung der Normalen zu $\alpha_3 = 0$ in ihrem Halbirungspunkte ermitteln.**

Aufl. Da der Halbirungspunkt der Durchschnittspunkt von $\alpha_3 = 0$ mit $\alpha_1 \sin A_1 - \alpha_2 \sin A_2 = 0$ ist, so ist die Form der Gleichung einer durch ihn gehenden Geraden $\alpha_1 \sin A_1 - \alpha_2 \sin A_2 + a_3 \alpha_3 = 0$ und die Bedingung des Art. giebt $a_3 = \sin (A_1 - A_2)$.

Aufg. 3. **Die in den Halbirungspunkten der Seiten eines Dreiecks auf denselben errichteten Perpendikel schneiden sich in einem Punkte.**

Aufl. Indem man nach einander zwischen den Gleichungen

$$\alpha_1 \sin A_1 - \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin (A_1 - A_2) = 0,$$
$$\alpha_2 \sin A_2 - \alpha_3 \sin A_3 + \alpha_1 \sin (A_2 - A_3) = 0$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eliminirt, erhält man für die Verbindungslinien des Durchschnittspunktes der zwei betrachteten Höhenperpendikel mit den Ecken des Dreiecks die Gleichungen $\frac{\alpha_1}{\cos A_1} = \frac{\alpha_2}{\cos A_2} = \frac{\alpha_3}{\cos A_3}$; und die vollkommene Symmetrie dieser Gleichungen in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ etc. zeigt, dass auch das dritte Perpendikel durch denselben Punkt geht. In der That ist die Summe der Producte der drei Gleichungen der Perpendikel mit $\sin {}^2 A_3$, $\sin {}^2 A_1$, $\sin {}^2 A_2$ respective identisch gleich Null.

Aufg. 4. **Man soll nach Art. 25 die Ausdrücke für sinus, cosinus und tangente des von den geraden Linien $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = 0$, $a_1' \alpha_1 + a_2' \alpha_2 + a_3' \alpha_3 = 0$ gebildeten Winkels bestimmen.**

Man findet für die tang. den Ausdruck

$$\frac{(a_2 a_3' - a_2' a_3) \sin A_1 + (a_3 a_1' - a_3' a_1) \sin A_2 + (a_1 a_2' - a_1' a_2) \sin A_3}{a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' - (a_2 a_3' + a_2' a_3) \cos A_1 - (a_3 a_1' + a_3' a_1) \cos A_2 - (a_1 a_2' + a_1' a_2) \cos A_3}$$

und durch Verschwinden des Nenners die Bedingung der Orthogonalität, durch das des Zählers diejenige des Parallelismus; die letztere kann für s_1, s_2, s_3 als die Längen der den Winkeln A_1, A_2, A_3 gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ auch in der Form

$$(a_2 a_3' - a_2' a_3) s_1 + (a_3 a_1' - a_3' a_1) s_2 + (a_1 a_2' - a_1' a_2) s_3 = 0$$

geschrieben werden, und man erkennt sie nach Art. 38 als identisch mit der Bedingung, dass der Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Graden in $s_1 \alpha_1 + s_2 \alpha_2 + s_3 \alpha_3 = 0$ enthalten sei.

Aufg. 5. **Man beweise, dass die durch die Gleichungen**

$$\alpha_1 \cos A_1 + \alpha_2 \cos A_2 + \alpha_3 \cos A_3 = 0 \text{ und } \alpha_1 \sin A_1 \cos A_1 \sin (A_2 - A_3) +$$
$$+ \alpha_2 \sin A_2 \cos A_2 \sin (A_3 - A_1) + \alpha_3 \sin A_3 \cos A_3 \sin (A_1 - A_2) = 0$$

dargestellten Geraden zu einander rechtwinklig sind.

62. **Wir haben gesehen, dass in Beziehung auf drei beliebig angenommene gerade Linien $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ die Gleichung jeder vierten Geraden in der Form $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = 0$ aus-**

gedrückt werden kann, und dass es möglich ist, Aufgaben zu lösen durch eine Reihe von Gleichungen, welche ohne directe Beziehung auf x und y in Gliedern von α_1, α_2, α_3 ausgedrückt sind. Daraus entspringt für das im Vorigen ausführlich erläuterte Princip ein neuer Gesichtspunkt. Anstatt α_1 nur als ein Symbol für die Grösse $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$ anzusehen, können wir annehmen, dass es die Länge der Senkrechten von einem Punkte auf die Linie $\alpha_1 = 0$ bezeichne; und wir können darnach ein System von Dreilinien-Coordinaten bilden, in welchem die Lage eines Punktes durch seine Entfernungen von drei festen geraden Linien, den Fundamentallinien, bestimmt und in welchem eine gerade Linie durch eine homogene Gleichung $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ zwischen diesen Entfernungen dargestellt wird. In dieser Homogeneität liegt, wie weitergehende Untersuchungen lehren, der hauptsächlichste Vorzug des neuen Coordinatensystems; an dieser Stelle und durch das Vorhergehende erkennt man einen Vorzug desselben vor dem System der Cartesischen Coordinaten darin, dass in diesem die höchste mögliche Vereinfachung durch die Wahl zweier der merkwürdigsten Linien der Figur zu Coordinatenaxen erlangt wird; während bei der Anwendung von Dreilinien-Coordinaten zu Gunsten der Einfachheit über drei Fundamentallinien verfügt werden kann. Daraus vornehmlich entspringt die grössere Kürze der in Artikel 54 erhaltenen Ausdrücke im Vergleich zu den entsprechenden des zweiten Capitels.

Wenn eine Gleichung $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ gegeben und das Fundamentaldreieck bekannt ist, so kann die durch sie repräsentirte gerade Linie leicht construirt werden. Wir gelangen dazu am kürzesten und einfachsten durch Verweisung auf Aufgabe 2, Artikel 60. Nach derselben bestimmen sich die drei Punkte L, M, N, in denen die durch die Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$$

bezeichnete gerade Linie die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 des Fundamentaldreiecks respective schneidet, durch die Gleichungenpaare

$$\alpha_1 = 0,\ a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0;\ \alpha_2 = 0,\ a_3\alpha_3 + a_1\alpha_1 = 0;$$
$$\alpha_3 = 0,\ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0.$$

Die geraden Linien $a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ oder A_1L, $a_3\alpha_3 + a_1\alpha_1 = 0$ oder A_2M und $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ oder A_3N theilen aber die Winkel $A_2A_1A_3$, $A_3A_2A_1$, $A_1A_3A_2$ des Dreiecks respective so, dass das

Sinusverhältniss der Theile $a_2 : a_3$, $a_3 : a_1$, $a_1 : a_2$ ist; man hat demnach nur diese durch die Coefficienten der Gleichung bestimmte Theilung der Winkel des Fundamentaldreiecks zu vollziehen, um durch die drei Punkte, in denen die Theilstrahlen die Gegenseiten derselben schneiden, die durch die Gleichung dargestellte gerade Linie zu erhalten. Wenn man diese Construction auf die Gleichung $\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3 = 0$ (Art. 61, Aufg. 4) anwendet, so findet man, dass die drei Schnittpunkte des Ortes mit den Seiten des Fundamentaldreiecks in unendlicher Entfernung liegen.

63. Wenn durch s_1, s_2, s_3 die Längen der Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bezeichnet werden, welches die drei Fundamentallinien bilden, so sind durch $s_1 \alpha_1$, $s_2 \alpha_2$, $s_3 \alpha_3$ respective die doppelten Inhalte der Dreiecke OA_2A_3, OA_3A_1, OA_1A_2 ausgedrückt, welche durch Verbindung eines willkürlich gewählten Punktes O in der Ebene des Fundamental-Dreiecks mit den Ecken desselben gebildet werden; denn α_1, α_2, α_3 sind die Längen der Perpendikel, die man von einem solchen Punkte auf die Fundamentallinien $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ fällen kann. Somit ist, wie auch der Punkt O genommen sein mag, die Grösse

$$s_1 \alpha_1 + s_2 \alpha_2 + s_3 \alpha_3$$

immer dieselbe und dem doppelten Inhalt M des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ gleich. Für den im Innern des Dreiecks gewählten Punkt O erhellt diess ohne Weiteres; für einen ausserhalb gewählten Punkt genügt die Erinnerung, dass durch den Uebergang des Punktes O von der einen Seite einer Fundamentallinie $\alpha_1 = 0$ auf die andere der Werth des auf dieselbe bezüglichen Perpendikels sein Vorzeichen wechselt: in dem bezeichneten Falle geht die Grösse

$s_1 \alpha_1 + s_2 \alpha_2 + s_3 \alpha_3$ in $2(OA_3A_1 + OA_1A_2 - OA_2A_3) = 2 \Delta A_1 A_2 A_3$ über. Da die Grösse $\sin A_1$ zu s_1 proportional ist, so ist auch $\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3$ eine Constante. Man kann diess auch direct erweisen, indem man nach Art. 61 die trinomischen Werthe von α_1, α_2, α_3, mit $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, $\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ respective multiplicirt, addirt; denn die Coefficienten von x und y verschwinden und die Summe ist eine Constante. Ihr Werth ist $\frac{M_1 \sin A_1}{s_1}$ d. i. $\frac{M}{2R}$ für R als Halbmesser des dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kreises oder $\frac{2M^2}{s_1 s_2 s_3}$.

Das Theorem dieses Artikels erlaubt uns, jede Gleichung in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, auch der Form nach homogen zu machen; denn wenn z. B. eine Gleichung wie $\alpha_1 = 3$ gegeben wäre, so kann sie nun in der homogenen Form $M\alpha_1 = 3(s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3)$ geschrieben werden.

64. Man soll die Gleichung einer Parallelen zur geraden Linie $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ in Dreilinien-Coordinaten ausdrücken.

In Cartesischen Coordinaten sind parallele gerade Linien durch Gleichungen von der Form

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax + By + C' = 0$$

ausgedrückt, welche nur um eine Constante differiren; ebenso drückt die Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + k(\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3) = 0$$

eine zu $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ parallele Linie aus, weil die beiden Gleichungen nur um eine Constante differiren.

In demselben Falle ist $Ax + By + C + (Ax + By + C') = 0$ eine Gerade, welche den beiden gegebenen Geraden parallel ist und den Abstand derselben halbirt; wenn also zwei Gleichungen $P = 0$, $P' = 0$ in solcher Relation sind, dass $P - P' =$ const. ist, so bezeichnet $P + P' = 0$ eine Parallele zu P und P', welche mitten zwischen ihnen liegt.

Aufg. 1. Welches ist die Gleichung einer Parallellinie zur Basis eines Dreiecks durch die Spitze desselben?

Sie ist $\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 = 0$; denn diess ist eine durch den Punkt $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ gezogene Linie und der Basis parallel, weil man sie in der Form schreiben kann

$$\alpha_3 \sin A_3 - (\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3) = 0.$$

Die vier geraden Linien

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \sin A_1 \pm \alpha_2 \sin A_2 = 0$, deren letzte die von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Basis gezogene gerade Linie ist, bilden ein harmonisches Büschel; der Mittelpunkt einer geraden begrenzten Strecke und der unendlich entfernte Punkt derselben sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die Endpunkte der Strecke.

Aufg. 2. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks verbindet, ist zur Basis desselben parallel.

Ihre Gleichung ist nach Aufg. 2, Art. 60

$$\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 - \alpha_3 \sin A_3 = 0 \text{ oder}$$
$$2\alpha_3 \sin A_3 = \alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3.$$

Aufg. 3. Die gerade Linie $s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3 - s_4\alpha_4 = 0$ in Aufg. 5, Art. 54 geht durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_4$. Denn $(s_1\alpha_1 + s_3\alpha_3) + (s_2\alpha_2 + s_4\alpha_4)$ ist eine

constante Grösse, weil es die Hälfte der Fläche des Vierecks bezeichnet. In Folge dessen sind $s_1\alpha_1 + s_3\alpha_3 = 0$, $s_2\alpha_2 + s_4\alpha_4 = 0$ parallele Linien und $(s_1\alpha_1 + s_3\alpha_3) - (s_2\alpha_2 + s_4\alpha_4) = 0$ ist auch zu ihnen parallel und halbirt ihren Abstand von einander; sie halbirt also die Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1\alpha_3$ und $\alpha_2\alpha_4$, von denen der eine der ersten, der andere der zweiten Linie angehört.

Aufg. 4. Man soll die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$, $a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2 + a_3'\alpha_3 = 0$ bestimmen.

Aufl. Man berechnet die Coordinaten α_1', α_2', α_3' aus diesen Gleichungen und der Relation $s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3 = M$ und findet

$$\alpha_1' = \frac{M\,(a_2a_3' - a_2'a_3)}{s_1(a_2a_3' - a_2'a_3) + s_2(a_3a_1' - a_3'a_1) + s_3(a_1a_2' - a_1'a_2)},$$

und entsprechende Werthe von α_2', α_3'.

65. Man soll die Gleichung der geraden Verbindungslinie zweier Punkte $x'y'$, $x''y''$ in der Form $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ darstellen.

Wenn α_1' wie vorher die Grösse $x'\cos\alpha_1 + y'\sin\alpha_1 - p_1$ bezeichnet, so kann die Bedingung dafür, dass die Coordinaten x', y' der Gleichung $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ genügen, in der Form $a_1\alpha_1' + a_2\alpha_2' + a_3\alpha_3' = 0$ geschrieben werden. Ebenso hat man $a_1\alpha_1'' + a_2\alpha_2'' + a_3\alpha_3'' = 0$. Wenn man dann diese beiden Bedingungsgleichungen für $\frac{a_1}{a_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$ auflöst und die erhaltenen Werthe in die gegebene Form der Gleichung substituirt, so erhält man für die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte

$$\alpha_1(\alpha_2'\alpha_3'' - \alpha_2''\alpha_3') + \alpha_2(\alpha_3'\alpha_1'' - \alpha_3''\alpha_1') + \alpha_3(\alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2') = 0.$$

Aufg. 1. Die Gleichung der durch den Punkt $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ gehenden Parallelen zur Geraden $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ darzustellen.

Aufl. Sie ist von der Form

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = k\,(s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + s_3\alpha_3)$ und die Constante k bestimmt sich aus $a_1\alpha_1' + a_2\alpha_2' + a_3\alpha_3' = k\,(s_1\alpha_1' + s_2\alpha_2' + s_3\alpha_3')$.

Es ist zu bemerken, dass wir bei homogenen Gleichungen in Dreilinien-Coordinaten nicht die wirklichen Längen der Normalen von einem beliebigen Punkte auf die Fundamentallinien, sondern nur die gegenseitigen Verhältnisse dieser Normalen unter den α_1, α_2, α_3 zu verstehen haben. (Vergl. Art. 60.) Darum wird die vorige Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte nicht geändert, wenn wir $\varrho\alpha_1'$, $\varrho\alpha_2'$, $\varrho\alpha_3'$ für α_1', α_2', α_3' substituiren. Aus demselben Grunde darf man für einen Punkt, der als Durch-

schnittspunkt der Linien $\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_2} = \frac{\alpha_3}{a_3}$ gegeben ist, a_1, a_2, a_3 als Dreilinien-Coordinaten betrachten. Denn wenn ϱ der gemeinsame Werth dieser Brüche wäre, so sind die wirklichen Längen der Normalen vom Punkte auf α_1, α_2, α_3 durch $a_1\varrho$, $a_2\varrho$, $a_3\varrho$ ausgedrückt und ϱ ist zwar durch die Gleichung
$s_1 a_1 \varrho + s_2 a_2 \varrho + s_3 a_3 \varrho = M$ bestimmt, man hat aber nach dem Vorigen nicht nöthig, es zu berechnen. Wenn man also die obige Gleichung für die gerade Verbindungslinie zweier Punkte anwendet, so kann man als Coordinaten des Durchschnitts der Seitenhalbirungslinien $\sin A_2 \sin A_3$, $\sin A_3 \sin A_1$, $\sin A_1 \sin A_2$; als Coordinaten des Durchschnitts der Höhen $\cos A_2 \cos A_3$, $\cos A_3 \cos A_1$, $\cos A_1 \cos A_2$, als Coordinaten für das Centrum des eingeschriebenen Kreises 1, 1, 1 und als solche für das des umgeschriebenen Kreises $\cos A_1$, $\cos A_2$, $\cos A_3$ anwenden, etc.; während sie eigentlich für das Centrum des umgeschriebenen Kreises sind $R \cos A_1$, etc.; für das des eingeschriebenen Kreises
$\frac{M}{s_1 + s_2 + s_3}$, etc.

Aufg. 2. Man entwickle die Gleichung der geraden Verbindungslinie des Durchschnitts der Höhen mit dem Durchschnitt der Halbirungslinien der Seiten.

Aufl.
$$\alpha_1 \sin A_1 \cos A_1 \sin(A_2 - A_3) + \alpha_2 \sin A_2 \cos A_2 \sin(A_3 - A_1) + \alpha_3 \sin A_3 \cos A_3 \sin(A_1 - A_2) = 0.$$

Aufg. 3. Welches ist die Gleichung der Geraden, welche die Centra des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises verbindet?

Aufl.
$$\alpha_1 (\cos A_2 - \cos A_3) + \alpha_2 (\cos A_3 - \cos A_1) + \alpha_3 (\cos A_1 - \cos A_2) = 0.$$

66. Man soll die Entfernung zweier Punkte P', P'' durch ihre Dreilinien-Coordinaten $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ und $\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3''$ ausdrücken.

Wenn man $a_1 = \alpha_2'\alpha_3'' - \alpha_2''\alpha_3'$, $a_2 = \alpha_3'\alpha_1'' - \alpha_3''\alpha_1'$, $a_3 = \alpha_1'\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2'$ setzt, so ist $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ die Gleichung der geraden Verbindungslinie der betrachteten Punkte und es gelten zudem die Relationen
$$s_1\alpha_1' + s_2\alpha_2' + s_3\alpha_3' = M = s_1\alpha_1'' + s_2\alpha_2'' + s_3\alpha_3'',$$
aus denen man durch successive Elimination von s_1, s_2, s_3 erhält
$$a \begin{cases} s_2 a_3 - s_3 a_2 = M(\alpha_1' - \alpha_1''), \quad s_3 a_1 - s_1 a_3 = M(\alpha_2' - \alpha_2''), \\ s_1 a_2 - s_2 a_1 = M(\alpha_3' - \alpha_3''). \end{cases}$$

Denkt man nun die Punkte P', P'' mit der Ecke A_1 des

Fundamentaldreiecks verbunden und durch die Gerade $P'P''$ die Linie $A_1 A_2$ in P geschnitten, so ist jedenfalls

$$\Delta A_1 P' P'' = \Delta A_1 P P'' - \Delta A_1 P P',$$

und da die beiden letztern Dreiecke die gemeinschaftliche Basis $A_1 P$ und die zugehörigen Höhen α_3', α_3'' haben, für D als die Entfernung der Punkte P', P'' und d als die der Geraden $P'P''$ vom Punkte A_1 die Relation

$$Dd \frac{M a_1}{(s_1 a_2 - s_2 a_1)\sin A_1}(\alpha_3' - \alpha_3'') = \frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{2 a_1 R}{s_1}$$

gültig. Mit Hilfe des in Art. 61 gegebenen Ausdrucks für d und wenn man den Nenner desselben durch δ bezeichnet, hat man aber $d = \frac{a_1 M}{s_1 \delta}$ und daher $D = \frac{R}{M} 2\delta$ oder

$$D^2 = \frac{4R^2}{M^2}\delta^2 = \frac{4R^2}{M^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 a_2 a_3 \cos A_1 - 2 a_3 a_1 \cos A_2 - 2 a_1 a_2 \cos A_3).$$

Mit Hilfe der drei Relationen a) leitet man andere bequemere Formen für diese Entfernung ab. Quadrirt man jene, multiplicirt sie mit $s_1 \cos A_1$, $s_2 \cos A_2$, $s_3 \cos A_3$ respective und bildet die Summe der rechten und linken Seiten, so reducirt sich wegen $s_1 = s_2 \cos A_3 + s_3 \cos A_2$, etc. die Summe links auf $s_1 s_2 s_3 \delta^2$ und man erhält durch Substitution

$$D^2 = \frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}\left\{ s_1 \cos A_1 (\alpha_1' - \alpha_1'')^2 + s_2 \cos A_2 (\alpha_2' - \alpha_2'')^2 + s_3 \cos A_3 (\alpha_3' - \alpha_3'')^2 \right\}.$$

Multiplicirt man aber dieselben Relationen paarweis und bildet die Summe der respective mit s_1, s_2, s_3 vervielfachten Producte, so reducirt sich wegen $s_2^2 + s_3^2 - s_1^2 = 2 s_2 s_3 \cos A_1$, etc. die erste Summe auf $- s_1 s_2 s_3 \delta^2$ und folglich erhält man durch Substitution

$$D^2 = -\frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}\left\{ s_1 (\alpha_2' - \alpha_2'')(\alpha_3' - \alpha_3'') + s_2 (\alpha_3' - \alpha_3'')(\alpha_1' - \alpha_1'') + s_3 (\alpha_1' - \alpha_1'')(\alpha_2' - \alpha_2'') \right\}.$$

Man kann diese letztere Form des Werthes auch direct ableiten, indem man zuerst zeigt, dass das Quadrat der Entfernung durch eine Summe von Vielfachen der Producte der Differenzen der Coordinaten ausdrückbar sein muss und dann durch die Specialisirung derselben für die Ecken des Fundamentaldreiecks die Factoren jener Producte ermittelt. Endlich selbst nach der Methode der Substitution in den Art. 60, 61.

Aufg. Man soll den Inhalt des durch drei Punkte α_1', α_2', α_3'; α_1'', α_2'', α_3''; α_1''', α_2''', α_3''' bestimmten Dreiecks ausdrücken.

Aufl. Mit Hilfe der Bezeichnungen dieses Art. hat man für die Gerade $\alpha'\alpha''$ die Gleichung $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ und mit Benutzung der vorigen Ausdrücke für die Länge der Basis und die Beziehung derselben zur Höhe des Dreiecks für den doppelten Inhalt den Ausdruck

$$\frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}(a_1\alpha_1''' + a_2\alpha_2''' + a_3\alpha_3''').$$

67. Man beweist wie im Art. 7, dass die Länge der Normalen zur Linie $\alpha_1 = 0$ von dem Punkte aus, welcher die Verbindungslinie zweier Punkte in den Abständen α_1' und α_1'' im Verhältniss $l : m$ theilt, durch $\frac{l\alpha_1' + m\alpha_1''}{l + m}$ dargestellt wird. Daher sind die Coordinaten eines Punktes, welcher die Verbindungslinie der Punkte $\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'$, $\alpha_1''\alpha_2''\alpha_3''$ im Verhältniss $l : m$ theilt, $l\alpha_1' + m\alpha_1''$, $l\alpha_2' + m\alpha_2''$, $l\alpha_3' + m\alpha_3''$. Es ist überdiess offenbar, dass dieser Punkt in der Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegt; denn wenn $\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'$ sowohl als $\alpha_1''\alpha_2''\alpha_3''$ der Gleichung der Linie $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ genügen, so thun es auch $l\alpha_1' + m\alpha_1''$, etc.

Ohne Schwierigkeit ergiebt sich auch, dass $l\alpha_1' - m\alpha_1''$, etc. der vierte harmonische Punkt ist zu $l\alpha_1' + m\alpha_1''$, α_1', α_1''; dass das Doppelverhältniss von $\alpha_1' - k\alpha_1''$, $\alpha_1' - l\alpha_1''$, $\alpha_1' - m\alpha_1''$, $\alpha_1' - n\alpha_1''$ durch $\frac{k-l}{n-l} : \frac{k-m}{n-m}$ dargestellt ist; dass ferner die beiden Punktesysteme in verschiedenen Geraden $\alpha_1' - k\alpha_1''$, $\alpha_1' - l\alpha_1''$, etc. und $\alpha_1''' - k\alpha_1''''$, $\alpha_1''' - l\alpha_1''''$, etc. projectivisch sind, da das Doppelverhältniss von irgend vier Punkten der einen dem Doppelverhältniss der entsprechenden vier Punkte der andern gleich ist.

Aufg. Der Durchschnittspunkt der Höhen, der der Halbirungslinien der Seiten und das Centrum des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises liegen in einer geraden Linie.

Die Coordinaten dieser Punkte sind $\cos A_2 \cos A_3$, etc.; $\sin A_2 \sin A_3$, etc. und $\cos A_1$, etc. Der Satz wird daher durch die Bemerkung bewiesen, dass die letzteren Coordinaten in der Form $\sin A_2 \sin A_3 - \cos A_2 \cos A_3$, etc. darstellbar sind.

Der Punkt von den Coordinaten $\cos(A_2 - A_3)$, $\cos(A_3 - A_1)$, $\cos(A_1 - A_2)$ liegt offenbar in derselben Geraden und ist ein vierter harmonischer Punkt zu den drei vorigen. Wir werden weiterhin sehen, dass er das Centrum des Kreises ist, der die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks enthält.

68. Es ist von Interesse, zu untersuchen, welches die geome-

trische Bedeutung der Gleichung $\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3 = 0$ ist. Sie ist in der allgemeinen Form der Gleichung einer geraden Linie inbegriffen, kann aber nach dem Vorigen keine endlich bestimmbaren Punkte enthalten, weil für die Coordinaten jedes solchen die Grösse $\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3$ einer gewissen Constanten gleich, aber nicht Null wird. (Art. 63.)

In der allgemeinen Gleichung der geraden Linie $Ax + By + C = 0$ bestimmen $-C : A$ und $-C : B$ die Abschnitte, welche dieselbe in den Coordinatenaxen bildet; je kleiner also A und B werden, desto grösser sind diese Abschnitte bei unverändertem Werthe von C, desto weiter entfernt ist daher die durch $Ax + By + C = 0$ dargestellte Linie vom Ursprung. Für $A = 0$, $B = 0$ sind jene Abschnitte unendlich gross und alle Punkte der Linie sind in unendlicher Entfernung gelegen.

Nun ward im Art. 63 gezeigt, dass die betrachtete Gleichung mit $0x + 0y + C = 0$ äquivalent ist; obgleich sie also für endliche Werthe von x und y nicht erfüllt werden kann, so kann dies doch für unendlich grosse Werthe derselben geschehen, weil das Product $0 . \infty$ einen endlichen Werth haben kann. So erkennt man, dass $\alpha_1 \sin A_1 + \alpha_2 \sin A_2 + \alpha_3 \sin A_3 = 0$ eine gerade Linie darstellt, welche ganz in unendlicher Entfernung liegt; und zugleich, dass die Gleichung einer unendlich entfernten Geraden in Cartesischen Coordinaten $0 . x + 0 . y + C = 0$ ist. Wir werden die letztere Gleichung zur Abkürzung des Ausdrucks gelegentlich in der minder exacten Form $C = 0$ citiren.

Wir sahen im Art. 64, dass eine zur Linie $\alpha_1 = 0$ Parallele eine Gleichung von der Form $\alpha_1 + C = 0$ hat, und erkennen jetzt, dass dies nur ein weiteres Beispiel zu dem Princip des Art. 40 ist (vergl. Art. 61, Aufg. 4). Denn eine Parallele zur Geraden $\alpha_1 = 0$ kann als eine sie in unendlicher Entfernung schneidende Gerade betrachtet werden, und nach Art. 40 repräsentirt $\alpha_1 + C = 0$ eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der Geraden $\alpha_1 = 0$ und $C = 0$ oder durch den Schnitt der ersteren mit einer unendlich entfernten Geraden hindurchgeht.

69. Es ist noch hinzuzufügen, dass Cartesische Coordinaten nur ein specieller Fall von trimetrischen Coordinaten sind. Man glaubt vielleicht zuerst einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden darin zu finden, dass Gleichungen in trimetrischen Coor-

dinaten homogen sind, während man in den Gleichungen mit Cartesischen Coordinaten ein absolutes Glied von Gliedern des ersten, zweiten u. s. w. Grades unterscheidet. Aber eine einfache Ueberlegung zeigt, dass diese Differenz nur scheinbar ist, dass Gleichungen in Cartesischen Coordinaten in Wirklichkeit ebenfalls homogen sein müssen, wenn auch freilich nicht in der Form. Der Sinn der Gleichung $x = 3$ kann beispielsweise kein anderer sein, als dass die Linie x drei Fussen oder Zollen oder überhaupt drei Lineareinheiten gleich ist, während die Gleichung $xy = 9$ aussagt, dass das Rechteck xy gleich 9 Quadratfussen oder 9 Quadratzollen oder überhaupt gleich 9 Quadraten von einer gewissen Lineareinheit ist; etc. Um solche Gleichungen auch der Form nach homogen zu machen, kann man die Lineareinheit durch z bezeichnen und dann die Gleichung der geraden Linie in der Form schreiben $Ax + By + Cz = 0$.

Vergleicht man dies mit der Gleichung $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0$ und erinnert sich, dass nach Artikel 68 die Gleichung einer unendlich entfernten geraden Linie die Form $z = 0$ annimmt, so erkennt man, dass Gleichungen in Cartesischen Coordinaten nur die specielle Form sind, in welcher Gleichungen in trimetrischen Coordinaten erscheinen, wenn zwei der Fundamentallinien zu Coordinatenaxen gewählt werden, indess die dritte von ihnen in unendlicher Entfernung liegt.

Nachdem wir so in der aus der abkürzenden Symbolik hervorgegangenen Bezeichnungsweise des Art. 60 die wahrhaft allgemeine Form erkannt haben, die an Stelle des Cartesischen Coordinatensystems zu setzen ist*), soll nun auch das Symbol x an die Stelle der α treten, so dass x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Punktes sind. Die Uebertragung der Gleichungen in diese Bezeichnung ist selbstverständlich.

70. In dem Vorhergehenden ist eine wesentliche Erweiterung des ursprünglich angenommenen Begriffs der Coordinaten enthalten.

Man versteht hiernach leicht, wie jeder besondern Art,

*) Nach den Grundsätzen der Centralprojection liefert die Abbildung der Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem eben ein trimetrisches System.

die Lage eines Punktes in Bezug auf Punkte oder Linien zu bestimmen, deren Lage als bekannt vorausgesetzt wird, ein besonderes Coordinatensystem entsprechen muss; aber es ist hier nicht der Ort, diese Bemerkung weiter auszuführen. Nachdem die Bestimmung eines Punktes durch Coordinaten erlangt ist, wird jede gerade oder krumme Linie als eine Reihe von Punkten aufgefasst, und das Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Coordinaten durch eine Gleichung zwischen denselben dargestellt; so genügen die Cartesischen Coordinaten aller Punkte einer geraden Linie einer vollständigen Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen, die Dreilinien-Coordinaten derselben Punkte einer homogenen Gleichung des ersten Grades zwischen drei Veränderlichen, und diese Gleichungen stellen eben deshalb die gerade Linie dar.

Setzt man an die Stelle des Punktes als des ursprünglichen durch Coordinaten zu bestimmenden Raumelementes irgend ein andres geometrisches Gebilde, so erhält man dadurch in einem andern Sinne neue Coordinatensysteme. Immer aber stellen Gleichungen zwischen den Coordinaten die aus jenen Elementargebilden zusammengesetzten räumlichen Formen dar. Neben dem Punkte hat kein anderes geometrisches Gebilde so viel Berechtigung, als elementar betrachtet zu werden, und kein andres bietet so leicht die Möglichkeit, durch stetige Reihung neue Gebilde als zusammengesetzte aus sich hervorzutreiben, als die gerade Linie. Indem man jede gerade Linie in Bezug auf gewisse feste Punkte oder feste Linien von bekannter Lage durch Coordinaten in verschiedener Weise bestimmt, erhält man die verschiedenen Coordinatensysteme der geraden Linie.

Das erste Beispiel eines Coordinatensystems der geraden Linie gab das System des barycentrischen Calculs von Möbius (1827). Die vollständige Entwickelung dieses Gedankens ist das Verdienst Plücker's (Analytisch-geometrische Entwickelungen. II. 1831 und spätere Schriften) und es wurden durch dieselbe die wahren analytischen Ausdrucksformen für die Lehren Steiner's gefunden, welche den fruchtbaren und doch sich scheinbar widerstreitenden Methoden von Poncelet und Gergonne ihre wahre Grundlage und höhere Vereinigung gewonnen hatten. Von

da an verfolgen die analytische und die reine Geometrie von demselben Princip aus auf verschiedenen Wegen das gleiche Ziel.

Ehe wir in diese Entwickelung eintreten, soll ein wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchungen der analytischen Geometrie erklärt und gewonnen werden, die Lehre von den Determinanten*).

71. Zunächst ergiebt sich aus dem Bisherigen ein nützlicher Wink für die Bezeichnungsweise der in den analytisch-geometrischen Untersuchungen auftretenden Grössen. Das Coordinatensystem mit drei Fundamentallinien hat ergeben, dass die lineare homogene Gleichung zwischen drei Veränderlichen das abgeleitete Element, die gerade Linie ausdrückt. (Art. 60.) In Folge ihrer Symmetrie kann man diese Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ abkürzend in der Form $\sum_{i=3}^{i=1} a_i x_i = 0$ darstellen, wo Σ die Summe von drei gleichartigen Ausdrücken mit den Indices 1, 2, 3 respective bezeichnet; diess ein für allemal festgestellt, kann man die Angabe der Grenzen $i = 1$, $i = 3$ ersparen. Das nämliche Verfahren lässt sich auf viele der allgemeinen Ausdrücke der Art. 61 f. anwenden; man schreibt die Bedingung der Rechtwinkligkeit zweier Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$, $\Sigma a_i' x_i = 0$ (Art. 61) in der Form $\Sigma a_i a_i' - \Sigma (a_j a_k' + a_j' a_k) \cos A_i = 0$; die Länge der Entfernung vom Punkte x' auf die Gerade $\Sigma a_i x_i = 0$ (Art. 61) in der Form $\frac{\Sigma a_i x_i'}{\{\Sigma a_i^2 - 2\Sigma a_i a_j \cos A_k\}^{\frac{1}{2}}}$; den Ausdruck für die tan. des Winkels zweier Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$, $\Sigma a_i' x_i = 0$ (Art. 61, Aufg. 4) als $\tan \theta = \frac{\Sigma (a_i a_j' - a_i' a_j) \sin A_k}{\Sigma a_i a_i' - \Sigma (a_j a_k' + a_j' a_k) \cos A_i}$; die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte x', x'' (Art. 65) als $\Sigma x_i (x_j' x_k'' - x_j'' x_k') = 0$, die Coordinaten x' des Durchschnittspunktes zweier Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$, $\Sigma a_i' x_i = 0$ (Art. 64, Aufg. 4) in der Form $x_i' = \frac{M\,(a_j a_k' - a_j' a_k)}{\Sigma s_i\,(a_j a_k' - a_j' a_k)}$; die Gleichung der Geraden (Art. 65, Aufg. 2), welche die Durchschnittspunkte

*) Ueber dieselbe ist anzuführen als trefflich geeignet zu gründlichem Studium: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. 2. Aufl. Leipzig 1865.

der Höhen und der Seitenhalbirungslinien des Dreiecks verbindet, $\Sigma x_i \sin A_i \cos A_i \sin (A_j - A_k) = 0$ und die der Verbindungslinie der Centra des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises (Art. 65, Aufg. 3) $\Sigma x_i (\cos A_j - \cos A_k) = 0$. Die Unterscheidung der einzelnen in die Gleichungen eintretenden Grössen durch Indices, auf welche zunächst die Gleichartigkeit derselben natürlich geführt hat (Art. 53 f., Art. 60), ist dazu erforderlich und bequem. Diese Ausdrucksform wendet sich besonders leicht auf die allgemeinen Ausdrücke an, welche nicht durch specielle Wahl der Fundamentalpunkte verkürzt sind; und es ist schon in Art. 45 bemerkt worden, dass durch solche specielle Wahl der Gewinn der Kürze gewöhnlich durch Verlust an Symmetrie beeinträchtigt wird. Das wichtigste Mittel zur vollen Verwerthung des Vortheils der Homogeneität und Symmetrie bei der Benutzung der trimetrischen Coordinaten sind aber eben die für das ganze Gebiet der homogenen Functionen fundamentalen **Grundsätze der Determinantentheorie**. Sie werden auch für die wichtigsten Sätze der ersten beiden Kapitel die geeignetste Form darbieten.

72. Wenn n homogene Gleichungen vom ersten Grade mit n Veränderlichen gegeben sind, so kann man aus denselben die Veränderlichen eliminiren und dadurch ein nur die Coefficienten enthaltendes Aggregat bilden, welches die **Determinante dieser Gleichungen** genannt wird. Wir betrachten die beiden einfachsten Fälle der Gleichungen mit zwei und drei Veränderlichen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0,\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0;$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Der erste Index jedes Coefficienten bezieht sich auf die Gleichung, in der er und der zweite auf die Veränderliche, bei der er steht. Aus den beiden ersten Gleichungen eliminirt man durch Multiplication der ersten mit a_{22} und der zweiten mit $-a_{12}$ und Addition und erhält $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$.

Man schreibt diess gewöhnlich in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } (a_{11}a_{22}) = 0$$

und unterscheidet der ersten Schreibart gemäss die Horizontalreihen oder **Zeilen** von den Verticalreihen oder **Colonnen** der Determinante, nennt auch die einzelnen Coefficienten, die in denselben stehen, die **Elemente** und die einzelnen Producte von

solchen, welche sie als algebraische Summe bilden, die Glieder derselben. Die Entwickelung der Determinante ist ein Aggregat aller Producte, in deren jedes ein Element von jeder Zeile und eines von jeder Colonne als Factor eintritt. Offenbar ist

$$(a_{11}a_{22}) = -(a_{21}a_{12}) \text{ und } \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Man bestätigt leicht die Relationen

$a_{11}(a_{21}a_{32}) + a_{21}(a_{31}a_{12}) + a_{31}(a_{11}a_{22}) = 0$,

$a_{12}(a_{21}a_{32}) + a_{22}(a_{31}a_{12}) + a_{32}(a_{11}a_{22}) = 0$; man leitet sie ab, indem man aus den Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

nach einander x_2 und x_1 eliminirt und die so erhaltenen Werthe

$$(a_{11}a_{22})\,x_1 = (a_{12}a_{23})\,x_3, \quad (a_{11}a_{22})\,x_2 = (a_{13}a_{21})\,x_3$$

in die ursprünglichen Gleichungen substituirt.

Das führt aber auf den Weg zur Elimination zwischen dem System von drei Gleichungen mit drei Veränderlichen. Denn wenn wir die erste derselben mit $(a_{12}a_{23})$, die zweite mit $(a_{13}a_{21})$ und die dritte mit $(a_{11}a_{22})$ multipliciren und die Producte addiren, so verschwinden in Gemässheit der vorigen Relationen die Coefficienten von x_1, x_2 und man erhält

$$a_{13}(a_{21}a_{32}) + a_{23}(a_{31}a_{12}) + a_{33}(a_{11}a_{22}) = 0;$$

durch die beiden analogen andern Operationen mit x_2, x_3; x_3, x_1 respective entstehen die identischen Formen der Determinante

$a_{11}(a_{22}a_{33}) + a_{21}(a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23}) = 0$,

$a_{12}(a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{33}a_{11}) + a_{32}(a_{13}a_{21}) = 0$; man schreibt

sie in der Form $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ oder $(a_{11}a_{22}a_{33}) = 0$

und hat $(a_{21}a_{32}a_{13}) = (a_{11}a_{22}a_{33})$ und $(a_{11}a_{32}a_{23}) = -(a_{11}a_{22}a_{33})$.

Die Elimination aus den Gleichungen $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0$, $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$ giebt das nämliche Resultat, denn die Addition der Producte der ersten Gleichung mit $(a_{22}a_{33})$, der zweiten mit $(a_{23}a_{31})$ und der dritten mit $(a_{21}a_{32})$ giebt verschwindende Coefficienten von x_2 und x_3 und das Aggregat $a_{11}(a_{22}a_{33}) + a_{12}(a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}) = 0$, welches mit $(a_{11}a_{22}a_{33})$ identisch ist. Also ist

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

In derselben Weise wie vorher leitet man die Relationen

$$a_{11}(a_{12}a_{23}a_{34})-a_{12}(a_{13}a_{24}a_{31})+a_{13}(a_{14}a_{21}a_{32})-a_{14}(a_{11}a_{22}a_{33})=0,$$
$$a_{21}(a_{12}a_{23}a_{34})-a_{22}(a_{13}a_{24}a_{31})+a_{23}(a_{14}a_{21}a_{32})-a_{24}(a_{11}a_{22}a_{33})=0,$$
$$a_{31}(a_{12}a_{23}a_{34})-a_{32}(a_{13}a_{24}a_{31})+a_{33}(a_{14}a_{21}a_{32})-a_{34}(a_{11}a_{22}a_{33})=0,$$
$$a_{41}(a_{12}a_{23}a_{34})-a_{42}(a_{13}a_{24}a_{31})+a_{43}(a_{14}a_{21}a_{32})-a_{44}(a_{11}a_{22}a_{33})=0$$

ab und gelangt dadurch zur Elimination aus vier linearen homogenen Gleichungen mit vier Veränderlichen, indem man die erste mit $(a_{12}a_{23}a_{34})$, die zweite mit $-(a_{13}a_{24}a_{31})$, die dritte mit $(a_{14}a_{21}a_{32})$ und die vierte mit $-(a_{11}a_{22}a_{33})$ multiplicirt und die Producte addirt. Das Resultat ist $(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}) = 0$ und man kann alle die vorher erhaltenen Eliminationsresultate mit dem aus n Gleichungen mit n Veränderlichen in dem Ausdruck $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} = 0$ zusammenfassen, als dem Ausdruck einer Summe, in welcher jedes Glied alle ersten und zweiten Indices ohne Wiederholung und Auslassung enthält, während zugleich alle möglichen Producte dieser Art in ihr vorkommen. Die Zahl der Glieder ist daher gleich der Zahl der möglichen Permutationen unter n Elementen (den zweiten Indices etwa) d. i. $= 1 . 2 \ldots n$. In Bezug auf das Zeichen jedes Gliedes gilt die Regel: das Zeichen $+$ oder $-$ ist jedem Gliede beizulegen, jenachdem die Gruppe seiner Indices aus der des ersten Gliedes durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen abgeleitet werden kann.

Weil aber eine Determinante eine Function der Coefficienten allein ist, so ist es vorzuziehen, sie ohne Bezug auf Gleichungen und die Theorie der Elimination zu definiren, wie folgt: Wenn n^2 Elemente in ein Quadrat von n Zeilen und n Colonnen geordnet sind, so ist die Determinante dieser Grössen die Summe aller möglichen Producte von n Elementen der Gruppe mit ihrem nach der vorigen Regel bestimmten Vorzeichen, in denen aus jeder horizontalen und jeder verticalen Reihe ein Element als Factor auftritt. Sie heisst eine Determinante n^{ten} Grades.

73. Die folgenden Eigenschaften der Determinanten sind in dieser Definition begründet: Der Werth einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Colonnen als Zeilen geschrieben werden und umgekehrt. Wenn irgend zwei Zeilen oder zwei Colonnen mit einander vertauscht werden, so wird dadurch das Zeichen der

Determinante, d. h. es werden die Zeichen ihrer sämmtlichen Glieder geändert. Wenn also zwei Zeilen oder Colonnen einer Determinante identisch sind, so hat dieselbe den Werth Null.

Nach der Entwickelungsform der Determinante nach Producten aus den Elementen einer Zeile oder Colonne, welche schon vorher begründet ist, gelten ebenso die Sätze: Wenn alle Elemente einer Zeile oder Colonne mit dem nämlichen Factor multiplicirt werden, so ist die Determinante mit diesem Factor multiplicirt. Wenn alle Elemente einer Zeile oder Colonne als Summen zweier andern Elemente erscheinen, so ist die Determinante selbst als Summe zweier andern Determinanten darstellbar.

Denn wenn
$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}$$
ist, wo keine der Grössen A_{ji} ein Element aus der i^{ten} Colonne enthält, so ist
$$\begin{vmatrix} na_{11} \,.\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ na_{21} \quad a_{22} \quad a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ na_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{nn} \end{vmatrix} = n\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn},$$
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} \\ \alpha_{21} + a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{n1} + a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm \alpha_{11} a_{22} \ldots a_{nn} + \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Auf diese Eigenschaften gründet sich dann weiter der wichtige Satz: Das Product von zwei Determinanten ist eine Determinante, deren Elemente die Summen der Producte der Elemente irgend einer Reihe der einen mit den entsprechenden Elementen irgend einer Reihe der andern sind. Denn die Schlüsse des folgenden Beweises für den speciellen Fall $n = 3$ sind allgemein anwendbar, man hat

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}', & a_{12}', & a_{13}' \\ a_{21}', & a_{22}', & a_{23}' \\ a_{31}', & a_{32}', & a_{33}' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{11}'+a_{21}a_{21}'+a_{31}a_{31}', & a_{11}a_{12}'+a_{21}a_{22}'+a_{31}a_{32}', & a_{11}a_{13}'+a_{21}a_{23}'+a_{31}a_{33}' \\ a_{12}a_{11}'+a_{22}a_{21}'+a_{32}a_{31}', & a_{12}a_{12}'+a_{22}a_{22}'+a_{32}a_{32}', & a_{12}a_{13}'+a_{22}a_{23}'+a_{32}a_{33}' \\ a_{13}a_{11}'+a_{23}a_{21}'+a_{33}a_{31}', & a_{13}a_{12}'+a_{23}a_{22}'+a_{33}a_{32}', & a_{13}a_{13}'+a_{23}a_{23}'+a_{33}a_{33}' \end{vmatrix}$$

die Determinante rechts ist darstellbar als die Summe von 27 einfachen Determinanten, in deren jeder jede Colonne bei allen ihren Elementen einen Factor a_{ij}' zeigt, der als Factor ausgesondert werden kann; von den dann erhaltenen einfachen Determinanten verschwinden nur diejenigen nicht, deren Factoren die Elemente der zweiten linksstehenden Determinante sind und diese sind mit der ersten Determinante identisch. Es sind z. B. die ersten Glieder gedachter Zerlegung

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{11}', a_{11}a_{12}', a_{11}a_{13}' \\ a_{12}a_{11}', a_{12}a_{12}', a_{12}a_{13}' \\ a_{13}a_{11}', a_{13}a_{12}', a_{13}a_{13}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{11}', a_{11}a_{12}', a_{21}a_{23}' \\ a_{12}a_{11}', a_{12}a_{12}', a_{22}a_{23}' \\ a_{13}a_{11}', a_{13}a_{12}', a_{23}a_{23}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{11}', a_{21}a_{22}', a_{11}a_{13}' \\ a_{12}a_{11}', a_{22}a_{22}', a_{12}a_{13}' \\ a_{13}a_{11}', a_{23}a_{22}', a_{13}a_{13}' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}a_{11}', a_{21}a_{22}', a_{31}a_{33}' \\ a_{12}a_{11}', a_{22}a_{22}', a_{32}a_{33}' \\ a_{13}a_{11}', a_{23}a_{22}', a_{33}a_{33}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{11}', a_{31}a_{32}', a_{21}a_{23}' \\ a_{12}a_{11}', a_{32}a_{32}', a_{22}a_{23}' \\ a_{13}a_{11}', a_{33}a_{32}', a_{23}a_{23}' \end{vmatrix} + \text{etc.} =$$

$$a_{11}'a_{12}'a_{13}' \cdot 0 + a_{11}'a_{12}'a_{23}' \cdot 0 + a_{11}'a_{22}'a_{13}' \cdot 0 +$$
$$+ a_{11}'a_{22}'a_{33}' \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}'a_{32}'a_{23}' \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} + \text{etc.}$$

Man kann diess Theorem auch aussprechen, indem man die Determinanten desselben als Resultate der Elimination zwischen linearen Gleichungen entstanden denkt; dann lautet es: Wenn ein System von linearen Gleichungen $a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 = 0$, $a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3 = 0$, $a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3 = 0$ durch die Substitutionen $X_1 = a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3$, $X_2 = a_{21}'x_1 + a_{22}'x_2 + a_{32}'x_3$, $X_3 = a_{31}'x_1 + a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3$ transformirt wird, so ist die Determinante des transformirten Systems gleich dem Producte der Determinante $(a_{11}a_{22}a_{33})$ des Originalsystems in die Determinante $(a_{11}'a_{22}'a_{33}')$ der Substitution. Die letztere nennt man auch den Modul der Transformation.

74. Die Vortheile dieser Darstellungsweise gehen auf eine grosse Reihe der früher gewonnenen Resultate über, ebensowohl für das trimetrische Coordinatensystem wie für das Cartesische System. Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte $x'y'$ $x''y''$ erhält man aus den Gleichungen

$ax + by + c = 0,\ ax' + by' + c = 0,\ ax'' + by'' + c = 0$
durch Elimination von a, b, c in der Form

$$\begin{vmatrix} x, y, 1 \\ x', y', 1 \\ x'', y'', 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder für trimetrische Coordinaten } \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ x_1', x_2', x_3' \\ x_1'', x_2'', x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Vertauschung der Zeilen und Colonnen erscheint die erste Determinante als Resultat der Elimination von l, m, n zwischen den drei Gleichungen

$lx + mx' + nx'' = 0,\ ly + my' + ny'' = 0,\ l + m + n = 0;$
man erhält aus der letzten $l = -(m + n)$ und aus den ersten

$$x = -\frac{mx' + nx''}{l},\quad y = -\frac{my' + ny''}{l}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{mx' + nx''}{m + n},\quad y = \frac{my' + ny''}{m + n}. \quad \text{(Art. 7.)}$$

Auch die folgenden Darstellungen sind wie die vorhergehenden einfache Ergebnisse der Elimination zwischen linearen Gleichungen. Drei Punkte sind in einer geraden Linie, wenn die Coordinaten (x, y; x_1, x_2, x_3) des dritten derselben Relation in Determinantenform genügen. Sind sie nicht in gerader Linie, so ist der Werth derselben Determinante die Fläche des von ihnen gebildeten Dreiecks. Die Bedingungsgleichung des Art. 38 ist die Determinanten-Relation $\begin{vmatrix} A, B, C \\ A', B', C' \\ A'', B'', C'' \end{vmatrix} = 0$ und ihre drei Ausdrucksweisen sind verschiedene Entwickelungen derselben; man kann die Coefficienten in der Gleichung der Geraden oder die durch dieselben bestimmten Axenabschnitte derselben als ihre Coordinaten ansehen. Der Ausdruck des Art. 39 für den doppelten Inhalt des durch dieselben Geraden begrenzten Dreiecks ist daher auch

$$= \frac{\begin{vmatrix} A, B, C \\ A', B', C' \\ A'', B'', C'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A, B \\ A', B' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A', B' \\ A'', B'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A'', B'' \\ A''', B''' \end{vmatrix}}.$$

Die Bedingung des Parallelismus für die zwei Geraden

$$\Sigma a_i x_i = 0,\ \Sigma a_i' x_i = 0 \text{ ist } \begin{vmatrix} \sin A_1, & \sin A_2, & \sin A_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1', & a_2', & a_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe Determinante ist der Zähler des Ausdrucks für die Tan-

gente des Winkels zweier Geraden. Die Coordinaten x' des Durchschnittspunktes zweier Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$, $\Sigma a_i' x_i = 0$ bestimmen sich als drei Unbekannte aus drei linearen Gleichungen und zwar mittelst der Relation $\Sigma s_i x_i = M$ und für R als Symbol der Determinante $\begin{vmatrix} s_1, s_2, s_3 \\ a_1, a_2, a_3 \\ a_1', a_2', a_3' \end{vmatrix}$ durch folgende Ausdrücke

$$x_1' = \frac{M}{R}(a_2 a_3' - a_2' a_3),\quad x_2' = \frac{M}{R}(a_3 a_1' - a_3' a_1),\quad x_3' = \frac{M}{R}(a_1 a_2' - a_1' a_2),$$

in welchen man die binomischen Factoren als die Factoren der s_1, s_2, s_3 in der Entwickelung der Determinante R erkennt. Als die Gleichung der durch den Punkt x' gehenden Normale zur Geraden $\Sigma a_i x_i = 0$ erhält man leicht

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_1', & a_1 - a_2 \cos A_3 - a_3 \cos A_2 \\ x_2, & x_2', & -a_1 \cos A_3 + a_2 - a_3 \cos A_1 \\ x_3, & x_3', & -a_1 \cos A_2 - a_2 \cos A_1 + a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Elemente der letzten Colonne dieser Determinante sind den Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Normalen proportional. Man findet daraus natürlich z. B. für $a_1 = a_2 = 0$, $x_1' = x_3' = 0$ die Gleichung $x_1 + x_3 \cos A_2 = 0$ der Normalen auf $x_3 = 0$ in seinem Endpunkte A_2 wieder, die in der 1. Aufg. des Art. 61 gegeben ist. Man findet auch für das Quadrat der Entfernung zweier Punkte x', x'' den Ausdruck

$$D^2 = \left(\frac{s_1 s_2 s_3}{M^2}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & -\cos A_3, & -\cos A_2, & x_1'', & x_1' \\ -\cos A_3, & 1, & -\cos A_1, & x_2'', & x_2' \\ -\cos A_2, & -\cos A_1, & 1, & x_3'', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'', & 0, & 0 \\ x_1', & x_2', & x_3', & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Endlich sei bemerkt, dass die Fläche des durch drei Punkte x', x'', x''' als Ecken bestimmten Dreiecks für trimetrische Coordinaten

$$= \frac{s_1 s_2 s_3}{2M^2} \begin{vmatrix} x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \\ x_1''', & x_2''', & x_3''' \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

75. Wenn im Art. 39 die Fläche des durch drei gerade Linien bestimmten Dreiecks durch die Coefficienten ihrer Gleichungen gegeben ist, so kann auch diess für trimetrische Coordinaten und in Determinantenform ausgeführt werden; diese Entwickelung soll als eine Uebung hier dargelegt werden. Sind $\Sigma a_i' x_i = 0$, $\Sigma a_i'' x_i = 0$, $\Sigma a_i''' x_i = 0$ die Gleichungen der

Geraden und bezeichnen h_1, h_2, h_3 die Werthe, welche die linken Seiten derselben durch Substitution der Coordinaten der Gegenecken annehmen, so gilt die Gruppe

$$a_1'x_1'+a_2'x_2'+a_3'x_3'=h_1,\quad a_1'x_1''+a_2'x_2''+a_3'x_3''=0,$$
$$a_1'x_1'''+a_2'x_2'''+a_3'x_3'''=0,$$
$$a_1''x_1'+a_2''x_2'+a_3''x_3'=0,\quad a_1''x_1''+a_2''x_2''+a_3''x_3''=h_2,$$
$$a_1''x_1'''+a_2''x_2'''+a_3''x_3'''=0,$$
$$a_1'''x_1'+a_2'''x_2'+a_3'''x_3'=0,\quad a_1'''x_1''+a_2'''x_2''+a_3'''x_3''=0,$$
$$a_1'''x_1'''+a_2'''x_2'''+a_3'''x_3'''=h_3.$$

Wenn man in derselben aus den neun links stehenden Trinomen die Determinante bildet, so muss ihr Werth der Determinante der rechten Seiten gleich, d. i.

$$=\begin{vmatrix} h_1, & 0, & 0 \\ 0, & h_2, & 0 \\ 0, & 0, & h_3 \end{vmatrix}=h_1h_2h_3$$

sein; sie ist aber das Product der beiden Determinanten

$$A=\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \end{vmatrix} \text{ und } B=\begin{vmatrix} x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix},$$

und da die letztere nach dem Schlussresultat des vorigen Artikels für F als die doppelte Fläche des Dreiecks

$$=\frac{FM^2}{s_1s_2s_3} \text{ ist, so folgt } \frac{AM^2}{s_1s_2s_3}F=h_1h_2h_3.$$

Nun ist $s_1x_1'+s_2x_2'+s_3x_3'=M$, $s_1x_1''+s_2x_2''+s_3x_3''=M$, $s_1x_1'''+s_2x_2'''+s_3s_3'''=M$ und man kann zwischen je einer von diesen Gleichungen und den Gleichungen des bezüglichen Systems von drei Gleichungen oben die Coordinaten x', x'', x''' respective eliminiren. Diess giebt die Resultate

$$\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3', & h_1 \\ a_1'', & a_2'', & a_3'', & 0 \\ a_1''', & a_2''', & a_3''', & 0 \\ s_1, & s_2, & s_3, & M \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3', & 0 \\ a_1'', & a_2'', & a_3'', & h_2 \\ a_1''', & a_2''', & a_3''', & 0 \\ s_1, & s_2, & s_3, & M \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3', & 0 \\ a_1'', & a_2'', & a_3'', & 0 \\ a_1''', & a_2''', & a_3''', & h_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & M \end{vmatrix}=0$$

oder

$$h_1=\frac{MA}{\begin{vmatrix} a_1'', & a_2'', & a_3'' \\ a_1''', & a_2''', & a_3'''' \\ s_1, & s_2, & s_3 \end{vmatrix}},\quad h_2=\frac{MA}{\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ a_1''', & a_2''', & a_3''' \\ s_1, & s_2, & s_3 \end{vmatrix}},\quad h_3=\frac{MA}{\begin{vmatrix} a_1', & a_2', & a_3' \\ a_1'', & a_2'', & a_3'' \\ s_1, & s_2, & s_3 \end{vmatrix}}$$

und daher durch Substitution in $F=\frac{h_1h_2h_3s_1s_2s_3}{AM^2}$

$$F = \frac{s_1 s_2 s_3 M \begin{vmatrix} a_1', a_2', a_3' \\ a_1'', a_2'', a_3'' \\ a_1''', a_2''', a_3''' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_1'', a_2'', a_3'' \\ a_1''', a_2''', a_3''' \\ s_1, s_2, s_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1', a_2', a_3' \\ a_1''', a_2''', a_3''' \\ s_1, s_2, s_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1', a_2', a_3' \\ a_1'', a_2'', a_3'' \\ s_1, s_2, s_3 \end{vmatrix}}.$$

Man hätte diese Gestalt des Ausdrucks nach Art. 39 erwarten dürfen; denn die Determinante des Zählers verschwindet wie dort für drei Gerade, die durch einen Punkt gehen, und die Determinanten des Nenners geben durch ihr Verschwinden den Parallelismus von irgend zwei unter den drei Geraden.

An die Frage vom Inhalte des Dreiecks knüpfen wir noch ein Beispiel über die Verwendung an, welche die im Art. 73 gegebenen Eigenschaften der Determinanten in solchen Fragen gestatten. Man hat in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten die doppelte Fläche des Dreiecks $F = \begin{vmatrix} 1, x', y' \\ 1, x'', y'' \\ 1, x''', y''' \end{vmatrix}$ und kann dafür gleichmässig schreiben $\begin{vmatrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, x', y' \\ 0, 1, x'', y'' \\ 0, 1, x''', y''' \end{vmatrix}$ und $-\begin{vmatrix} 0, 1, 0, 0 \\ 1, 0, x', y' \\ 1, 0, x'', y'' \\ 1, 0, x''', y''' \end{vmatrix}$; man erhält aber durch Multiplication derselben

$$F^2 = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & x'x' + y'y', & x'x'' + y'y'', & x'x''' + y'y''' \\ 1, & x'x'' + y'y'', & x''x'' + y''y'', & x''x''' + y''y''' \\ 1, & x'x''' + y'y''', & x''x''' + y''y''', & x'''y''' + y'''y''' \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -2(x'x' + y'y'), & -2(x'x'' + y'y''), & -2(x'x''' + y'y''') \\ 1, & -2(x'x'' + y'y''), & -2(x''x'' + y''y''), & -2(x''x''' + y''y''') \\ 1, & -2(x'x''' + y'y'''), & -2(x''x''' + y''y'''), & -2(x'''x''' + y'''y''') \end{vmatrix};$$

denn durch Multiplication aller Elemente aller Zeilen mit 2 und nachherige Division derjenigen der ersten Zeile und Colonne mit 2 ist die ganze Determinante mit 4 multiplicirt worden. Addirt man nun zu den drei letzten Zeilen dieser Determinante die entsprechenden Elemente der ersten respective mit $x^{2\prime} + y^{2\prime}$, $x^{2\prime\prime} + y^{2\prime\prime}$, $x^{2\prime\prime\prime} + y^{2\prime\prime\prime}$ multiplicirt, und addirt man ebenso zu den drei letzten Colonnen die entsprechenden mit denselben Binomen multiplicirten Elemente der ersten, so entsteht

$$= -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0, & 1 & , & 1 & , & 1 \\ 1, & 0 & , & (x'-x'')^2+(y'-y'')^2 & , & (x'-x''')^2+(y'-y''')^2 \\ 1, & (x'-x'')^2+(y'-y'')^2 & , & 0 & , & (x''-x''')^2+(y''-y''')^2 \\ 1, & (x'-x''')^2+(y'-y''')^2 & , & (x''-x''')^2+(y''+y''')^2 & , & 0 \end{vmatrix}$$

d. h. für a, b, c als die Seiten des Dreiecks hat man das 16fache

$$\text{Quadrat seines Inhalts} = -\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2 \\ 1, & a^2, & 0, & c^2 \\ 1, & b^2, & c^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Eine einfache Umformung führt diesen Ausdruck auf eine sehr bekannte Formel zurück; man multiplicirt jede der vier Zeilen mit abc und dividirt darnach die drei letzten Zeilen und Colonnen mit ab, ac, bc respective, als wodurch man den Werth der Determinante nicht ändert, und erhält

$$-\begin{vmatrix} 0, & c, & b, & a \\ c, & 0, & a, & b \\ b, & a, & 0, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}.$$

Addirt man nun hier die Elemente der drei letzten Zeilen zu denen der ersten, so erkennt man, dass die Summe $(a+b+c)$ ein Factor der Determinante ist. In gleicher Weise findet man $-c+b+a$, $c-b+a$, $c+b-a$ als Factoren der Determinante und findet sodann, dass sich ihr Werth von dem Producte dieser vier Trinome nur durch den Factor -1 unterscheidet, d. h. man hat für die Fläche des Dreiecks den Ausdruck

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

identisch mit der bekannten elementaren Formel.

76. Im Art. 72 f. sind die Grundbegriffe und Eigenschaften der Determinanten aus der Elimination zwischen linearen Gleichungen abgeleitet worden. Das Verschwinden der Determinante der Coefficienten war die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten. **Die Auflösung des Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten** ergiebt sich aus der weiteren Betrachtung der Determinanten gleichfalls in der einfachsten Form und bietet ein neues Mittel zur Lösung von Problemen der analytischen Geometrie. Diese Auflösung knüpft sich an eine Darstellungsweise der Determinanten, die bereits in den Entwickelungen des Art. 72

hervorgetreten ist; wir sahen die Determinante $(a_{11}\, a_{22}\, a_{33})$ in den identischen Formen

$$\begin{gathered} a_{11}(a_{22}\, a_{33}) + a_{21}(a_{32}\, a_{13}) + a_{31}(a_{12}\, a_{23}), \\ a_{12}(a_{23}\, a_{31}) + a_{22}(a_{33}\, a_{11}) + a_{32}(a_{13}\, a_{21}), \\ a_{13}(a_{21}\, a_{32}) + a_{23}(a_{31}\, a_{12}) + a_{33}(a_{11}\, a_{22}) \end{gathered}$$

entstehen und der dort eingeschlagene Entwickelungsgang zeigt, dass jede Determinante in derselben Weise darstellbar sei als eine Summe von Producten aus den Elementen einer Reihe oder Zeile in Aggregate, welche von den Elementen dieser Reihe oder Zeile und von denen in der Zeile oder Reihe des Elements selbst keines enthalten, also in Determinanten der nächst niedern Ordnung; es ist allgemein

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{1i}\, A_{1i} + a_{2i}\, A_{2i} + \ldots + a_{ni}\, A_{ni} \\ &= a_{j1}\, A_{j1} + a_{j2}\, A_{j2} + \ldots + a_{jn}\, A_{jn}. \end{aligned}$$

Wenn man also in einer Determinante eine Reihe und eine Zeile unterdrückt und die aus den übrigen Reihen und Zeilen gebildete Determinante eine Unterdeterminante oder einen Minor der gegebenen Determinante nennt (insbesondere eine solche erster Stufe, wenn man die durch Unterdrückung von zwei, drei, etc. Reihen und Zeilen bleibende Determinante als Unterdeterminante zweiter, dritter, etc. Stufe unterscheiden will), so sind die Factoren der Elemente in den einzelnen Gliedern dieser Productensumme die mit Unterdrückung der Reihe und Zeile dieser Elemente selbst gebildeten Unterdeterminanten. Die Unterdeterminanten bilden ein mit dem der Determinante selbst ganz analoges Schema

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Offenbar ist jede derselben zugleich der in Bezug auf das entsprechende Element gebildete Differentialquotient der Originaldeterminante, verausgesetzt, dass alle Elemente derselben von einander unabhängig sind; d. h. für R als den Werth der Originaldeterminante ist

$$A_{ij} = \frac{dR}{da_{ij}} \text{ und } R = a_{1i}\frac{dR}{da_{1i}} + a_{2i}\frac{dR}{da_{2i}} + \ldots + a_{ni}\frac{dR}{da_{ni}}.$$

Betrachtet man dagegen die Summe $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n}$, so erkennt man sie als den Werth der Determinante für den Fall, dass $a_{21} = a_{11}$, $a_{22} = a_{12}$, ... $a_{2n} = a_{1n}$ sind, d. h. als den Werth einer Determinante mit zwei identischen Zeilen; also ist stets

$$a_{1i}\frac{dR}{da_{1j}} + a_{2i}\frac{dR}{da_{2j}} + \ldots + a_{ni}\frac{dR}{da_{nj}} = 0, \text{ und}$$

$$a_{i1}\frac{dR}{da_{j1}} + a_{i2}\frac{dR}{da_{j2}} + \ldots + a_{in}\frac{dR}{da_{jn}} = 0.$$

Mittelst dieser Relationen erhält man die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

in folgender Form. Ist R der Werth der aus den Coefficienten der linken Seite des Systems gebildeten Determinanten und sind A_{11}, A_{21}, ... A_{n1} die nach den Elementen a_{11}, a_{21}, ... a_{n1} gebildeten Unterdeterminanten, so multipliciren wir die Gleichungen des Systems der Reihe nach mit A_{11}, A_{21}, ... A_{n1} und addiren die Producte; dann verschwinden die Productensummen mit x_2, x_3, ... x_n und der Coefficient von x_1 wird

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = R,$$

so dass die Summe die Gleichung $Rx_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + \ldots + A_{n1}y_n$ giebt. Ebenso erhält man durch das analoge Verfahren mit den übrigen Reihen der Unterdeterminanten die Relationen

$$Rx_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + \ldots + A_{n2}y_n, \ldots$$

$Rx_n = A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + \ldots + A_{nn}y_n$ und damit die vollständige Auflösung des Systems. Jede Unbekannte ergiebt sich als Quotient von zwei Determinanten, deren eine, der Divisor, stets die Determinante der Coefficienten des Systems von Gleichungen ist, während die andere aus ihr gebildet wird, wenn man in ihr die Reihe der Coefficienten der eben zu bestimmenden Unbekannten durch die der entsprechenden absoluten Glieder des Systems der Gleichungen ersetzt.

In dem besonderen Falle, wo die absoluten Glieder sämmtlicher Gleichungen gleich Null sind, ist nothwendig $R = 0$ und man kommt damit auf den im Eingang dieses Art. erinnerten Fall des Art. 72 zurück. Verbindet man dann mit den Gleichungen des Systems die Relationen $a_{11} A_{i1} + a_{12} A_{i2} + \ldots + a_{1n} A_{in} = 0$, so findet man für diesen Fall die Verhältnisse der Unbekannten bestimmt durch $x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{i1} : A_{i2} : \ldots : A_{in}$.

Bei der Bestimmung des Durchschnittspunkts zweier Geraden hat man die Unbekannten x, y aus den Gleichungen $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ oder aus den Gleichungen $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$, $s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = M$ zu bestimmen und findet wegen $R = ab' - a'b$ im ersten Falle $x = \frac{-cb' + c'b}{ab' - a'b}$, $y = \frac{-ac' + a'c}{ab' - a'b}$ und im zweiten wegen

$$R = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1', & a_2', & a_3' \\ s_1, & s_2, & s_3 \end{vmatrix} \text{ und } y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = M$$

$$x_1 = \frac{M(a_2 a_3' - a_2' a_3)}{R},\ x_2 = \frac{M(a_3 a_1' - a_3' a_1)}{R},\ x_3 = \frac{M(a_1 a_2' - a_1' a_2)}{R},$$

wie in Aufg. 4, Art. 64. Schneiden sich drei gerade Linien

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,\ a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0,$$
$$a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0$$

in einem Punkte, so ist $R = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a_1', & a_2', & a_3' \\ a_1'', & a_2'', & a_3'' \end{vmatrix} = 0$ und die Verhältnisse der Coordinaten des Schnittpunktes sind bestimmt durch

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a_2' a_3'' - a_2'' a_3') : (a_3' a_1'' - a_3'' a_1') : (a_1' a_2'' - a_1'' a_2')$$
$$= (a_2'' a_3 - a_2 a_3'') : (a_3'' a_1 - a_3 a_1'') : (a_1'' a_2 - a_1 a_2'')$$
$$= (a_2 a_3' - a_2' a_3) : (a_3 a_1' - a_3' a_1) : (a_1 a_2' - a_1' a_2).$$

77. Mit den genannten Hilfsmitteln kehren wir nun, nachdem ihr Werth für das Vorhergegangene erläutert ist, zu dem am Schlusse des Artikel 70 ausgesprochenen Gedanken zurück, Coordinatensysteme der geraden Linie in analoger Weise zu denen des Punktes zu bilden.

Die Bildung des einfachsten Coordinatensystems dieser Art ist im Art. 51 bereits enthalten; denn nach dem dort Gezeigten ergiebt sich, dass die Gleichung $a\xi + b\eta + c = 0$, in welcher a, b, c Constanten und ξ, η Veränderliche sind, die gemein-

schaftliche Gleichung aller der geraden Linien ist, welche durch den Punkt $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ hindurchgehen, und sobald man unter ξ, η die reciproken Werthe der Abschnitte versteht, welche diese geraden Linien in den Axen vom Anfangspunkte aus abschneiden. Für $c = 1$ werden also $x = a$, $y = b$, und $x\xi + y\eta + 1 = 0$ ist die Gleichung des Punktes x, y, weil sie die Gleichung jeder von den Geraden ist, welche durch diesen Punkt gehen.

Man übersieht sofort, wie sich von dieser linearen Gleichung $a\xi + b\eta + c = 0$ des Punktes aus eine zu der der geraden Linie ganz analoge Untersuchung der analytischen Geometrie des Punktes anknüpfen lässt und dass dieselbe durch eine grosse Aehnlichkeit der analytischen Entwickelungen mit jener verbunden sein muss. Aufgaben wie die Bestimmung der Coordinaten der Verbindungslinie von zwei Punkten, etc. liefern leichte Beispiele dazu. Insbesondere, wenn eine Gleichung vom n^{ten} Grade zwischen den Coordinaten ξ, η gegeben ist, so erlaubt uns dieselbe für jeden bestimmten Werth ξ' von ξ eine Anzahl n von bestimmten Werthen von η zu ermitteln, welche mit ihm zusammen der Gleichung genügen; diese Gleichung ist somit für alle die n geraden Linien erfüllt, welchen jenes ξ und einer dieser n Werthe η_1', η_2', ... η_n' von η entspricht. Geht man von ξ' zu einem nächstbenachbarten Werthe ξ'' für ξ über, so erhält man abermals n Werthe von η und damit n gerade Linien, welche ebenfalls der Gleichung Genüge leisten. So wie im Art. 16 die Aufeinanderfolge aller der der Gleichung genügenden Punkte ein Polygon und durch die statthafte unbegrenzte Annäherung der benachbarten Punkte aneinander eine Curve mittelst eines eingeschriebenen Polygons von unbegrenzter Seitenzahl bei unendlicher Kleinheit aller einzelnen Seiten bildete, so entsteht hier aus der Aufeinanderfolge aller der der Gleichung genügenden Geraden mittelst eines umgeschriebenen Polygons eine Curve. Dort genügten die Coordinaten jedes Punktes der Curve der betrachteten Gleichung, hier sollen die Geraden, deren Coordinaten der betrachteten Gleichung Genüge thun, Tangenten der Curve heissen. Der Inbegriff dieser sämmtlichen Tangenten ist wie dort der der sämmtlichen Punkte die geometrische Bedeutung der Gleichung; sie stellt eine Curve dar als eingehüllt oder als Enveloppe von geraden Linien, so wie die Gleichung im Falle des Art. 16 eine Curve als Ort von

Punkten bezeichnet. Im Falle des Art. 16 bestimmt die Gleichung für jeden gegebenen Werth x' von x die zugehörigen y der m Punkte, welche die Curve mit der geraden Linie $x = x'$ gemein hat; jetzt bestimmt die Gleichung für jeden gegebenen Werth ξ' von ξ die zugehörigen η der n geraden Linien (Tangenten), welche die Curve mit dem Punkte $\xi = \xi'$ gemein hat. Und allgemein, wenn man zwischen einer Gleichung vom m^{ten} Grade in Punktcoordinaten x, y und einer Gleichung ersten Grades in x, y die gemeinschaftlichen Werthpaare der unbekannten x, y bestimmt, so erhält man die Coordinatenpaare der m Punkte, welche die durch jene Gleichung dargestellten Curve mit der durch diese dargestellten geraden Linie gemein hat; wenn man aber zwischen einer Gleichung n^{ten} Grades in Liniencoordinaten ξ, η und einer Gleichung ersten Grades in ξ, η die gemeinschaftlichen Werthpaare der Unbekannten ξ, η bestimmt, so erhält man die Coordinatenpaare der n geraden Linien (Tangenten), welche die durch jene Gleichung dargestellte Curve mit dem durch diese gegebenen Punkte gemein hat. Indem man unter Ordnung einer Curve den Grad ihrer Gleichung in Punktcoordinaten und unter Classe der Curve den Grad ihrer Gleichung in Liniencoordinaten versteht, darf man sagen, dass die Ordnungszahl der Curve die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden, die Classenzahl derselben aber die Zahl ihrer Tangenten aus einem Punkte bezeichnet.

78. Wenn man die linke Seite der Gleichung eines Punktes $x\xi + y\eta + c = 0$ durch das Symbol U abkürzend bezeichnet, und wenn U_1 ebenso die Gleichung eines zweiten Punktes $x_1\xi + y_1\eta + c_1 = 0$ darstellt, so ist durch $U - \lambda U_1 = 0$ ein Punkt in der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ausgedrückt. Allgemein und ganz wie in Art. 40: Wenn $\Sigma = 0$ und $\Sigma' = 0$ die Gleichungen von irgend zwei Enveloppen d. i. Gleichungen in Liniencoordinaten sind, so hat die durch $\Sigma + \lambda \Sigma' = 0$ dargestellte Enveloppe — für λ als eine beliebige Constante — jede gerade Linie zur Tangente, welche für die durch $\Sigma = 0$ und $\Sigma' = 0$ dargestellten Curven gleichzeitig Tangente ist. Denn Coordinatenwerthe ξ, η, welche der Gleichung $\Sigma = 0$ und gleichzeitig auch $\Sigma' = 0$ genügen, erfüllen nothwendig auch für jeden Werth von λ die Gleichung $\Sigma + \lambda \Sigma' = 0$. Sind die beiden gegebenen

Enveloppen Punkte, so ist ihre Verbindungslinie ihre einzige gemeinsame Tangente und $U - \lambda\ U_1 = 0$ kann als Gleichung eines Punktes nur die Gleichung eines Punktes dieser geraden Linie sein.

Wir untersuchen die Bedeutung des veränderlichen Parameters λ, der alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, indem der dargestellte Punkt die ganze Gerade beschreibt. Man hat $\lambda = \frac{U}{U_1} = \frac{x\xi + y\eta + c}{x_1\xi + y_1\eta + c_1}$ und wenn q, q_1 die senkrechten Abstände der gegebenen Punkte von irgend einer durch den dargestellten Punkt gehenden Geraden sind, so ist $q = \frac{\frac{x}{c}\xi + \frac{y}{c}\eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ d. i. $= \frac{U}{c\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$; $q_1 = \frac{\frac{x_1}{c_1}\xi + \frac{y_1}{c_1}\eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ d. i. $= \frac{U_1}{c_1\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$, oder $\frac{q}{q_1} = \frac{U}{U_1}\frac{c_1}{c} = \lambda\frac{c_1}{c}$, wo $c_1 : c$ eine für die verschiedenen, durch den Punkt gehenden Strahlen unveränderliche Constante ist. Die Grösse λ wird also ganz wie in den Betrachtungen des Art. 54 dem Verhältniss der Abstände proportional und folglich dem Theilungsverhältniss, nach dem der betrachtete Punkt die Strecke zwischen den beiden festen Punkten theilt. Daher ist, wie dort, für vier Punkte derselben Geraden $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_1 - \lambda U_2 = 0$, $U_1 - \lambda' U_2 = 0$ das Doppelverhältniss durch $\lambda : \lambda'$ ausgedrückt und die Punkte $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_1 + \lambda U_2 = 0$, $U_1 - \lambda U_2 = 0$ bilden eine harmonische Theilung. Die Entwickelungen des Art. 56 f. gehen auf Punktreihen über, wie diess nach dem Satze des Art. 57 natürlich ist. Dieser Satz von der Gleichheit des Doppelverhältnisses von vier Strahlen eines Büschels mit dem der vier Schnittpunkte desselben mit einer beliebigen Transversale ist hier eines einfachen analytischen Beweises fähig. Sind nämlich $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 - kA_2 = 0$ drei Strahlen des Büschels und ist durch $B = 0$ die Transversale dargestellt, so ist die Gleichung des Schnittpunktes zu ermitteln, den der bewegliche Strahl $A_1 - kA_2 = 0$ mit der Transversale bestimmt; sind x und y seine Coordinaten, so bestehen für diese gleichzeitig die Gleichungen $A_1 - kA_2 = 0$, $B = 0$ und $x\xi + y\eta + 1 = 0$; d. h. die Bedingung ihrer Gleichzeitigkeit drückt diesen Punkt aus, oder seine Gleichung ist durch die Gleichheit der Null mit der Determinante der vorigen drei ausgedrückt.

In der That ist die so entstehende Gleichung vom ersten Grade in ξ, η, da diese Grössen nur in einer Zeile auftreten und sie ist von der Form $U_1 - k U_2 = 0$, weil auch k nur in einer ihrer Zeilen erscheint, und für $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ als die Gleichungen der Schnittpunkte der Transversale mit den festen Strahlen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ oder die Resultate der Elimination von x, y zwischen $A_1 = 0$, $B = 0$ oder $A_2 = 0$, $B = 0$ und $x\xi + y\eta + 1 = 0$. Ist $A_1 - k' A_2 = 0$ die Gleichung eines vierten Strahls, so wird die Gleichung des Schnittpunkts desselben mit der Transversale durch $U_1 - k' U_2 = 0$ dargestellt sein. Dadurch ist bewiesen, dass das Doppelverhältniss der auf der Transversale entstehenden Punktreihe unabhängig von der Lage der Transversale und dem Doppelverhältniss des Strahlbüschels gleich sei.

Damit übertragen wir den im Art. 59 gegebenen Begriff der Projectivität oder Conformität auch auf die Punktreihen und erhalten die Sätze: Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$, $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projectivisch. Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $A_1 - \lambda A_2 = 0$ sind projectivisch. Zwei projectivische Punktreihen können stets in solche Lage gebracht werden, dass die geraden Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte in einem Punkte zusammentreffen. Und eine Punktreihe und ein mit ihr projectivisches Strahlbüschel können stets in solche Lage gebracht werden, dass die Strahlen des Büschels durch die entsprechenden Punkte der Reihe gehen. Diess ist die entsprechende Uebertragung des Begriffs der perspectivischen Lage. In Allem: Die Bedingung der Projectivität ist die Gleichheit des Doppelverhältnisses.

79. Geht man zur Betrachtung von drei Punkten weiter, die nicht in einer geraden Linie liegen, so lassen sich daran eine Reihe von Entwickelungen knüpfen, die ganz denen der Art. 60 f. analog sind. Ein Beispiel giebt die Betrachtung von drei Punkten in einer geraden Linie auf den Seiten des durch jene bestimmten Dreiecks. Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die drei festen Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, für welche also die Determinante ihrer Gleichungen nicht verschwindet, so sind $U_1 + \lambda U_2 = 0$, $U_2 + \mu U_3 = 0$, $U_3 + \nu U_1 = 0$ drei Punkte in den Seiten dieses Dreiecks und ihre gleichzeitige Erfüllung durch die Coordinaten einer geraden Linie fordert die Relation $\lambda\mu\nu = -1$ und diese giebt nach der Bedeutung von λ, μ, ν genau



die Relation des Art. *42 unter den Theilungsverhältnissen wieder, welche die drei Schnittpunkte in den Seiten des Dreiecks bestimmen.

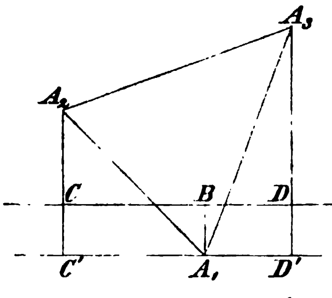
Ebenso lässt sich die Gleichung jedes beliebigen vierten Punktes $a\xi + b\eta + c = 0$ durch die von drei festen Punkten seiner Ebene $a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0 \equiv U_1$, $a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0 \equiv U_2$, $a_3\xi + b_3\eta + c_3 = 0 \equiv U_3$ in der Form $l_1 U_1 + l_2 U_2 + l_3 U_3 = 0$ ausdrücken. Man hat dazu nur den Bedingungen $l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 = a$, $l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3 = b$, $l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 = c$ zu genügen, und findet daher $l_1 . \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & a_2, & a_3 \\ b, & b_2, & b_3 \\ c, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$, etc.

Man erhält also entsprechend dem trimetrischen Punktcoordinatensystem auf ganz analogem Wege ein trimetrisches Liniencoordinatensystem und kann dasselbe in den Untersuchungen mit den nämlichen Vortheilen verwenden, wie jenes; denn es theilt mit ihm den Vorzug der Homogeneität der Gleichungen. Wir wollen die Coordinaten dieses Systems in der Folge durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 ausdrücken, so dass die gerade Linie ξ die durch die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 bestimmte gerade Linie sein wird. Nach dem Vorhergehenden können diese Coordinaten als die senkrechten Abstände der geraden Linie von den Fundamentalpunkten oder auch als die Verhältnisse derselben angesehen werden.

Wenn man mit s_1, s_2, s_3 wie früher die Seiten und mit A_1, A_2, A_3 die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet, so sind $\xi_2 + \xi_3 = 0$, etc. die Mittelpunkte, $s_2\xi_2 \pm s_3\xi_3 = 0$, etc. die Durchschnitte der Halbirungslinien der Winkel mit den Gegenseiten, $\xi_2 \tan A_2 + \xi_3 \tan A_3 = 0$, etc. die Fusspunkte der Höhenperpendikel. Es ist $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ der Schwerpunkt des Dreiecks, $\xi_1 \tan A_1 + \xi_2 \tan A_2 + \xi_3 \tan A_3 = 0$ der Durchschnitt der Höhen, $\xi_1 \sin 2A_1 + \xi_2 \sin 2A_2 + \xi_3 \sin 2A_3 = 0$ das Centrum des umgeschriebenen Kreises, $s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + s_3\xi_3 = 0$ das Centrum des eingeschriebenen Kreises, etc. Wie ein durch die allgemeine homogene Gleichung gegebener Punkt construirt werden kann, zeigt die nachfolgende Aufgabe 1; die Construction entspricht vollständig der des Art. 62 für die durch die allgemeine homogene Gleichung gegebene Gerade.

Aufg. 1. Man soll die in Aufg. 2 Art. 60 angewendeten Gleichungen nach dem System der trimetrischen Liniencoordinaten interpretiren. Sind $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ die Gleichungen der Punkte A, B, C, so können $l_2\xi_2 - l_3\xi_3 = 0$, $l_3\xi_3 - l_1\xi_1 = 0$, $l_1\xi_1 - l_2\xi_2 = 0$ die Gleichungen der Punkte L, M, N sein und es sind dann $l_2\xi_2 + l_3\xi_3 - l_1\xi_1 = 0$, $l_3\xi_3 + l_1\xi_1 - l_2\xi_2 = 0$, $l_1\xi_1 + l_2\xi_2 - l_3\xi_3 = 0$ die Gleichungen der Ecken desjenigen Dreiecks, welches die Geraden LA, MB, NC mit einander bilden und $l_1\xi_1 + l_2\xi_2 + l_3\xi_3 = 0$ stellt einen Punkt O dar,

in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken dieses neuen Dreiecks mit den entsprechenden des alten durchschneiden. Die Gleichungen $l_2\xi_2 + l_3\xi_3 = 0$, $l_3\xi_3 + l_1\xi_1 = 0$, $l_1\xi_1 + l_2\xi_2 = 0$ bezeichnen die Punkte D, E, F. Man erkennt endlich leicht die Punkte der Figur, welche zu diesen harmonisch conjugirt sind.



Aufg. 2. Wenn die Coordinaten der geraden Linie die senkrechten Abstände derselben von den drei Fundamentalpunkten sind, so besteht unter ihnen und den Seiten oder Winkeln des Fundamentaldreiecks eine Relation; man soll diese letztere entwickeln. Sind A_1, A_2, A_3 die Fundamentalpunkte und $A_1 B$, $A_2 C$, $A_3 D$ die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 der geraden Linie CD, so hat man $A_2 C' = \xi_2 - \xi_1$, $A_3 D' = \xi_3 - \xi_1$ und $\sin C' A_1 A_2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{s_3}$, $\sin D' A_1 A_3 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{s_2}$. Nun ist die Summe dieser Winkel $= \pi - A_1$, also

$$\cos C'A_1 A_2 \,.\, \cos D'A_1 A_3 - \sin C'A_1 A_2 \,.\, \sin D'A_1 A_3 = -\cos A_1 \text{ und}$$

$$\cos C'A_1 A_2 . \cos D'A_1 A_3 = \frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)}{s_2 s_3} - \cos A_1.$$ Bestimmt man nun aus

$$-\cos C'A_1 A_2 = \cos(A_1 + D'A_1 A_3) = \cos A_1 \cos D'A_1 A_3 - \frac{\xi_3 - \xi_1}{s_2} \sin A_1$$

$$\text{und } -\cos D'A_1 A_3 = \cos A_1 \cos C'A_1 A_2 - \frac{\xi_2 - \xi_1}{s_3} \sin A_1$$

die Werthe $\sin A_1 \cos C'A_1 A_2 = -\frac{\xi_3 - \xi_1}{s_2} + \frac{\xi_2 - \xi_1}{s_3} \cos A_1$,

$\sin A_1 \cos D'A_1 A_3 = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{s_3} + \frac{\xi_3 - \xi_1}{s_2} \cos A_1$, so erhält man durch Substitution unschwer

$$s_1^2(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) + s_2^2(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1) + s_3^2(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2) = M^2$$

für M als den doppelten Inhalt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$. Sie ist auch

$$s_1^2\xi_1^2 + s_2^2\xi_2^2 + s_3^2\xi_3^2 - (s_2^2 + s_3^2 - s_1^2)\xi_2\xi_3 - (s_3^2 + s_1^2 - s_2^2)\xi_3\xi_1 - (s_1^2 + s_2^2 - s_3^2)\xi_1\xi_2 = M^2$$

und kann endlich für h_1, h_2, h_3 als die den Seiten s_1, s_2, s_3 respective entsprechenden Höhen in der Form

$$\frac{\xi_1^2}{h_1^2} + \frac{\xi_2^2}{h_2^2} + \frac{\xi_3^2}{h_3^2} - \frac{2\,\xi_1\xi_2 \cos A_3}{h_1 h_2} - \frac{2\,\xi_2\xi_3 \cos A_1}{h_2 h_3} - \frac{2\,\xi_3\xi_1 \cos A_2}{h_3 h_1} = 1$$

geschrieben werden.

80. Das Hervorstechendste und Wichtigste in den vorhergehenden Entwickelungen ist die grosse Analogie, die zwischen den beiden Systemen der homogenen oder trimetrischen Coordinaten für den Punkt und die gerade Linie stattfindet. Diese Analogie vervollständigt sich noch weiter bei einer Begründungsweise dieser Systeme, in der man voraussetzt und zum Ausgangspunkte macht, was vorher schon (Art. 65, 79) begründet ist, dass nämlich die

Coordinaten nicht sowohl die senkrechten Abstände selbst, als vielmehr die Verhältnisse derselben bedeuten.

Setzt man $x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}$, $y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$, so sind offenbar x', y' die Parameter von zwei Strahlbüscheln, welche durch die geraden Linien $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ und $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ bestimmt werden. Werden nun x_1, x_2, x_3 so bestimmt, dass $x' = \frac{x_1}{x_3}$, $y' = \frac{x_2}{x_3}$ ist, so sind die x_1, x_2, x_3 Zahlen, die sich verhalten, wie die Abstände des Punktes von den Seiten des Dreiecks $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ multiplicirt mit einer beliebig gewählten Constanten. Es gelten also die Relationen $\mu x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1$; $\mu x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2$, $\mu x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3$, so dass umgekehrt x und y durch Auflösung dieser Gleichungen ausgedrückt werden, wie folgt

$$x = \frac{\mu \left\{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3\right\}}{R}, \quad y = \frac{\mu \left\{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3\right\}}{R},$$

$R = \mu \left\{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3\right\}$, wenn man durch A_1, B_1, C_1, etc. die den Elementen a_1, b_1, c_1, etc. entsprechenden Unterdeterminanten der Determinante R der Coefficienten der rechten Seite der Gleichungen bezeichnet; oder durch Reduction

$$x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}, \quad y = \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}.$$

Man sieht daraus, dass die Relation $C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0$ die unendlich entfernten Punkte characterisirt und kommt damit auf die Vorstellung zurück, dass die unendlich entfernten Punkte der Ebene sich auf einer Geraden befinden. Die Ausdrücke von x und y zeigen auch, dass durch die Substitution derselben jede vollständige Gleichung n^{ten} Grades in x und y in eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in x_1, x_2, x_3 übergehen muss.

Substituirt man dann, um zu Liniencoordinaten überzugehen die Werthe von x, y in die Gleichung $x\xi + y\eta + 1 = 0$, so erhält man durch Wegschaffung der Nenner und Anordnung nach x_1, x_2, x_3 die Gleichung

$$x_1 (A_1 \xi + B_1 \eta + C_1) + x_2 (A_2 \xi + B_2 \eta + C_2) + x_3 (A_3 \xi + B_3 \eta + C_3) = 0,$$

d. h. als Gleichung der Geraden in der Form $x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0$, wenn man setzt $\nu \xi_1 = A_1 \xi + B_1 \eta + C_1$, $\nu \xi_2 = A_2 \xi + B_2 \eta + C_2$, $\nu \xi_3 = A_3 \xi + B_3 \eta + C_3$. Dann ist aber wie oben durch Auflösung

$$\xi = \frac{\nu\left\{\mathbf{A}_1\xi_1 + \mathbf{A}_2\xi_2 + \mathbf{A}_3\xi_3\right\}}{\mathbf{R}}, \quad \eta = \frac{\nu\left\{\mathbf{B}_1\xi_1 + \mathbf{B}_2\xi_2 + \mathbf{B}_3\xi_3\right\}}{\mathbf{R}},$$

$$\mathbf{R} = \nu\left\{\mathbf{C}_1\xi_1 + \mathbf{C}_2\xi_2 + \mathbf{C}_3\xi_3\right\},$$

wenn $\mathbf{R}$ die Determinante der A_1, B_1, C_1, etc. und $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, etc. die Unterdeterminanten derselben nach den Elementen A_1, B_1, etc. bezeichnen; also durch Reduction

$$\xi = \frac{\mathbf{A}_1\xi_1 + \mathbf{A}_2\xi_2 + \mathbf{A}_3\xi_3}{\mathbf{C}_1\xi_1 + \mathbf{C}_2\xi_2 + \mathbf{C}_3\xi_3}, \quad \eta = \frac{\mathbf{B}_1\xi_1 + \mathbf{B}_2\xi_2 + \mathbf{B}_3\xi_3}{\mathbf{C}_1\xi_1 + \mathbf{C}_2\xi_2 + \mathbf{C}_3\xi_3}.$$

Die Entwicklung dieser Ausdrücke giebt eine wesentliche Vereinfachung mittelst eines allgemeinen Satzes der Determinantentheorie. Wenn man nämlich aus dem Schema der Unterdeterminanten $\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$ der Originaldeterminante $R = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$ die Determinante $\mathbf{R}$ bildet — man nennt sie die **Reciprocaldeterminante** oder die **Determinante des adjungirten Systems** — und ihre Unterdeterminanten $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, etc. ermittelt, so sind diese für n als die Ordnungszahl der Determinante gleich den Producten der entsprechenden Elemente der Originaldeterminante a_1, b_1, etc. in die $(n-2)^{\text{te}}$ Potenz dieser Originaldeterminante.

Der Beweis dieses Gesetzes knüpft sich sehr einfach an die Multiplicationsregel der Determinanten (Art. 73) und die Auflösung der linearen Gleichungen (Art. 76). Wenn man die Originaldeterminante mit der Determinante des adjungirten Systems multiplicirt

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2 \ldots \\ a_3, & b_3, & c_3 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, \ldots \\ A_2, & B_2, & C_2, \ldots \\ A_3, & B_3, & C_3, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

so erhält man das Product in Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+\ldots, & a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1+\ldots, & a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1+\ldots, \ldots \\ a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2+\ldots, & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2+\ldots, & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2+\ldots, \ldots \\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3+\ldots, & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3+\ldots, & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3+\ldots, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

in welcher nach den Relationen des Art. 76 alle Elemente Null sind, mit Ausnahme der Elemente des ersten Gliedes, deren jedes

nach denselben Relationen $= R$ ist; daher ist $R \cdot \mathbf{R} = R^n$, d. h. $\mathbf{R} = R^{n-1}$. Betrachten wir nun das System der Auflösungen eines Systems von linearen Gleichungen $a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots = y_1$, $a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots = y_2$, etc., nämlich das System

$$\begin{aligned} R x_1 &= A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \ldots \\ R x_2 &= B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 + \ldots \\ R x_3 &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

so muss dasselbe nach y aufgelöst die ursprünglichen Werthe von $y_1, y_2, \ldots$ selbst wieder hervorbringen; man erhält aber $\mathbf{R} y_1 = \mathbf{A}_1 R x_1 + \mathbf{B}_1 R x_2 + \ldots$, $\mathbf{R} y_2 = \mathbf{A}_2 R x_1 + \mathbf{B}_2 R x_2 + \ldots$, und erhält wegen $\mathbf{R} = R^{n-1}$, etc. die Relationen $\mathbf{A}_1 = R^{n-2} a_1$, $\mathbf{B}_1 = R^{n-2} b_1$, etc., wie der Satz verlangt. Durch Substitution dieser Werthe von $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, etc. in die oben entwickelten Werthe von ξ und η erhält man einfach durch Reduction

$$\xi = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3}{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3}, \quad \eta = \frac{b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3}{c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3}.$$

Daraus folgt sofort, dass $\frac{\xi_1}{\xi_2}, \frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}$ die Parameter der auf den Seiten des Fundamentaldreiecks liegenden Punktreihen sind, d. h. dass sich die Liniencoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 verhalten wie die Abstände der Geraden von den Fundamentalpunkten multiplicirt mit einer Constanten. Hinsichtlich der Form der Ausdrücke ist die Bemerkung nützlich, dass die Werthe von ξ, η und die Relationen der x_1, x_2, x_3 und ebenso die Werthe der x, y und die Relationen der Liniencoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 je dieselben Coefficienten enthalten, aber in der Weise, dass in der einen Gruppe dieselben Coefficienten in Zeilen geordnet sind, die in der andern in Reihen erscheinen.

81. Im vorigen Artikel ist die vollständige Analogie der trimetrischen homogenen Coordinatensysteme begründet und damit ein Princip von umfassender Wichtigkeit analytisch bewiesen, das Princip der Dualität, welches nach Poncelet's Vorarbeiten Gergonne zuerst ausgesprochen und Plücker zuerst auf analytische Basis gestellt hat. J. Steiner hat es dann als eine Folge der einfachsten Beziehungen der von ihm aufgestellten Grundgebilde, der Punktreihen und Strahlbüschel, geometrisch erwiesen und die vorhergehenden Entwickelungen haben gezeigt, dass diese nämlichen Elementarformen, Punktreihen und Strahlbüschel in ihrer analytischen Ausdrucksweise den einfachsten Weg zur Beweisführung

darbieten. Das Princip selbst ergiebt sich so in voller Allgemeinheit und Bestimmtheit; es kann ausgesprochen werden, wie folgt: Die analytische Geometrie entwickelt geometrische Sätze durch analytische Operationen; diese Sätze sind die geometrischen Auslegungen oder Bedeutungen ihrer Rechnungsresultate. Nach der vollständigen Analogie der beiden hier begründeten Coordinatensysteme wird überall bei Anwendung der homogenen Gleichungen jede analytische Untersuchung mit einem Rechnungsresultat zwei geometrische Sätze liefern, von denen der eine die Interpretation dieses Ergebnisses nach dem Systeme der Punktcoordinaten und der andere die Interpretation desselben Ergebnisses nach dem System der Liniencoordinaten ist*); wo in dem einen Punkte und gerade Linien, Curven n^{ter} Ordnung oder Classe, wo Punktreihen oder Strahlbüschel, etc. auftreten, da werden im andern gerade Linien und Punkte, Curven n^{ter} Classe oder Ordnung, Strahlbüschel oder Punktreihen, etc. erscheinen. Jedem Satze und jedem Problem entspricht so im Allgemeinen ein dualistisches Gegenbild und die analytische Arbeit ist für beide nur einfach zu leisten. Beispiele für diesen dualistischen Character der geometrischen Wahrheiten sind in dem Bisherigen schon zahlreich enthalten und werden im Folgenden in grosser Zahl auftreten.

82. Das Multiplicationsgesetz der Determinanten ist im Art. 73 unter dem Gesichtspunkt einer linearen Substitution in ein System linearer Gleichungen ausgesprochen worden und diese Betrachtungsweise hat in der That besondern Werth für die analytische Geometrie. Dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden oder drei Punkte in einer geraden Linie liegen, ist eine Eigenschaft der von jenen Linien oder Punkten gebildeten Figur, welche von der Lage des Coordinatensystems völlig unabhängig ist; wenn das Vorhandensein dieser Eigenschaft durch das Verschwinden irgend einer Function der in den Gleichungen jener geraden Linien z. B. auftretenden Constanten angezeigt wird, so muss diese Relation auch nach jeder beliebigen Coordinatentransformation noch

*) Jedes andere Coordinatensystem lehrt die analytischen Formen auf eine neue Weise interpretiren; in der Vervielfältigung der Coordinatenbestimmung liegt also ein wichtiges Hilfsmittel zur Erweiterung der geometrischen Kenntnisse.

fortbestehen, weil die geometrische Beziehung, die sie ausdrückt, dadurch nicht gestört worden ist. Die allgemeine Coordinatentransformation entspricht aber genau dem, was vorher als lineare Substitution bezeichnet worden ist; an die Stelle der ursprünglichen Fundamentallinien oder Punkte treten neue; die Variabeln x oder ξ sind zu ersetzen durch lineare homogene Functionen der neuen Variabeln y oder η, abgeleitet aus Gleichungen, welche die neuen Fundamentallinien oder Punkte in Bezug auf das alte System darstellen. Man hat

$$m y_1 = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3, \quad n\eta_1 = b_{11}\xi_1 + b_{21}\xi_2 + b_{31}\xi_3,$$
$$m y_2 = b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3, \quad n\eta_2 = b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + b_{32}\xi_3,$$
$$m y_3 = b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3; \quad n\eta_3 = b_{13}\xi_1 + b_{23}\xi_2 + b_{33}\xi_3;$$

wieder mit der am Schlusse des Art. 80 bemerkten Verwandlung der Coefficientenreihen in Zeilen. Da nun die Determinante der transformirten Gleichungen der drei geraden Linien z. B. das Product ist aus der Determinante der ursprünglichen Gleichungen in die Determinante der Substitution, so ist sie stets mit jener zugleich Null; d. h. die analytische Bedingung dafür, dass jene drei geraden Linien einen Punkt gemein haben, bleibt ungestört.

Bei der Transformation von einem Systeme rechtwinkliger Axen Ox, Oy zu einem neuen Systeme rechtwinkliger Axen von demselben Anfangspunkt OX, OY ist nach Art. 9 die erforderliche Substitution $y = X \sin\theta + Y\cos\theta$, $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$ bei gleichem Drehungssinn der positiven Axen und $y = X\sin\theta - Y\cos\theta$, $x = X\cos\theta + Y\sin\theta$ bei ungleichem Drehungssinn. Die Determinanten dieser Substitutionen sind somit respective gleich ± 1, ihr Quadrat ist also stets der positiven Einheit gleich.

In der 5. Aufg. des Art. 10 ist bemerkt, dass bei einer solchen Transformation die Summe der Quadrate der alten Veränderlichen von der Summe der Quadrate der neuen Veränderlichen nicht verschieden sein kann. Diese und die vorhin erwähnte Eigenschaft, wonach das Quadrat der Determinante der Substitution $= +1$ ist, bedingen einander; Substitutionen dieser Art sind allgemein ohne Beschränkung der Zahl der Veränderlichen möglich und werden als orthogonale Substitutionen bezeichnet. Die Substitution

$$x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3, \quad x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3,$$
$$x_3 = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3$$

ist eine orthogonale Substitution, für drei Veränderliche, wenn

identisch $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ ist. Diess ergiebt unmittelbar die Coefficientenrelationen

$$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1,\quad a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1,\quad a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1,$$
$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0,\quad a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}=0,$$
$$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0,$$

indem man die Werthe von x substituirt und die Coefficienten der entsprechenden x auf beiden Seiten der Identität vergleicht. Bildet man nun das Quadrat der Substitutionsdeterminante

nach Reihen $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2, & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}, & a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}+a_{32}a_{31}, & a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2, & a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}, & a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}+a_{33}a_{32}, & a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 \end{vmatrix},$$

d. h. nach den vorher geschriebenen Relationen $=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}=1.$

Da die Coefficienten dieser Substitution durch sechs Bedingungsgleichungen beschränkt sind, so können sie als Functionen von drei unbestimmten Grössen angesehen und dargestellt werden. Man sieht überdiess, dass als eine Folge des vorhergehenden Beweises, d. h. auch als Folge der oben aufgestellten Relationen die analogen Relationen

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1,\quad a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1,$$
$$a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1,\quad a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0,\ \text{etc.}$$

Geltung haben müssen.

83. Die allgemeine lineare Substitution kann aber noch unter einem andern Gesichtspunkte betrachtet werden. Unter dem Gesichtspunkt der Coordinatentransformation bezieht sich die neue durch Vollzug der Substitution erhaltene Gleichung auf die ursprüngliche Curve (geometrische Figur) als Ausdruck derselben in Beziehung zum neuen Coordinatensystem; alle die geometrischen Eigenschaften derselben müssen sich aus der neuen Gleichung ganz ebenso wie aus der alten herauslesen und entwickeln lassen. Man kann aber auch die neue Gleichung, welche aus der Substitution hervorgeht, auf das alte Coordinatensystem beziehen; dann ist sie die Gleichung einer neuen Curve (geometrischen Figur), welche zu der alten in gewissen einfachen Beziehungen steht.

Offenbar gilt der Satz des Artikel 11 allgemein, durch eine lineare Substitution wird der Grad einer Gleichung nicht geändert; daher ist die neue Curve von derselben Ordnung mit der alten, wenn die Untersuchung in Punktcoordinaten und von derselben Classe mit der alten, wenn dieselbe in Liniencoordinaten geführt wird. Jedem Punkte der einen Curve entspricht ein Punkt der andern Curve, derjenige nämlich, dessen Coordinaten durch Einsetzung der Coordinaten des ersten in die Substitutionsgleichungen gefunden werden; jeder geraden Linie der einen Figur eine gerade Linie der andern. Einem Punkt (einer geraden Linie) entspricht ein Punkt (eine gerade Linie) beim Uebergang vom ersten zum zweiten, wie bei dem vom zweiten zum ersten System, weil nicht nur die Substitutionsgleichungen selbst, sondern auch die durch Auflösung derselben nach den Veränderlichen der linearen Ausdrücke erhaltenen Gleichungen linear sind. Man sagt die beiden Curven oder Figuren stehen in einer Verwandtschaft. Insbesondere entspricht jedem Strahlbüschel der einen ein Strahlbüschel der andern und jeder Punktreihe der einen eine Punktreihe der andern; und wenn $A_1 + \lambda A_2 = 0$ die Gleichung des einen Strahlbüschels ist, so wird sie durch Ausführung jener linearen Substitutionen in eine Gleichung von der Form $B_1 + \lambda B_2 = 0$ übergeführt, weil das Abstandsverhältniss λ vom Coordinatensystem unabhängig ist. Somit sind die entsprechenden Strahlbüschel und ebenso die entsprechenden Punktreihen der beiden verwandten Systeme von gleichem Doppelverhältniss oder projectivisch. Da diess von allen Büscheln und Reihen derselben gilt, so nennt man die Systeme selbst projectivisch und ihre Verwandtschaft die projectivische oder die der Projectivität. Durch die lineare Substitution treten also zu einer beliebigen geometrischen Figur (Curve) alle die zu ihr projectivischen Figuren (Curven) hinzu und die geometrischen Eigenschaften der einen liefern, sofern sie von der Coordinatenbeziehung unabhängig sind, die geometrischen Eigenschaften aller so vereinigten Figuren. Wir kehren zur Ausführung dieser Gedanken zurück, sobald die Untersuchung der Gleichungen zweiten Grades Material geliefert haben wird, an welchem sie in allen Beziehungen entwickelt werden können.

Fünftes Kapitel.

Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen.

---

84. Ehe wir dazu übergehen, von den Curven zu handeln, welche durch Gleichungen, deren Grad den ersten übersteigt, dargestellt werden, wollen wir einige Fälle untersuchen, in denen diese Gleichungen gerade Linien repräsentiren.

Wenn eine Anzahl von Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0\ldots$ Seite für Seite mit einander multiplicirt werden, so dass daraus die Gleichung $LMN\ldots.=0$ entsteht, so bezeichnet diese die Vereinigung aller der durch ihre Factoren repräsentirten Linien, denn sie wird durch die Werthe der Coordinaten befriedigt, welche irgend einen ihrer Factoren gleich Null machen. Wenn umgekehrt eine Gleichung höheren Grades in ein Product mehrerer anderen von niedrigeren Graden aufgelöst werden kann, so repräsentirt sie ebenfalls die Vereinigung aller durch ihre Factoren dargestellten geometrischen Oerter. Eine Gleichung vom n^{ten} Grade, die in n Factoren vom ersten Grade zerlegt werden kann, repräsentirt daher n gerade Linien.

85. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen zwei Veränderlichen repräsentirt n gerade Linien, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen.

Denn ist die Gleichung

$$x^n - px^{n-1}y + qx^{n-2}y^2 - \ldots. \pm ty^n = 0,$$

so erhalten wir durch Division mit y^n

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - p\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + q\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} - \ldots. = 0,$$

eine Gleichung, welche durch Auflösung für $\frac{x}{y}$ n Werthe liefert: bezeichnen wir dieselben durch a, b, c ...., so kann diese Gleichung in Factoren zerlegt werden

$$\left(\frac{x}{y} - a\right)\left(\frac{x}{y} - b\right)\left(\frac{x}{y} - c\right)\ldots. = 0$$

und die ursprüngliche Gleichung ist dann in die Form

$$(x - ay)\,(x - by)\,(x - cy) \ldots . = 0$$

gebracht; sie repräsentirt also n gerade Linien

$$x - ay = 0,\ x - by = 0 \ldots .,$$

welche nach der Form ihrer Gleichungen alle durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen.

So repräsentirt insbesondere die homogene Gleichung $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ die zwei geraden Linien

$$x - ay = 0,\ x - by = 0,$$

wenn a und b die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - p\left(\frac{x}{y}\right) + q = 0 \text{ sind.}$$

In derselben Art erkennt man, dass die Gleichung

$$(x-a)^n - p(x-a)^{n-1}(y-b) + q(x-a)^{n-2}(y-b)^2 \ldots . + t(y-b)^n = 0$$

n gerade Linien bezeichnet, welche durch den Punkt $x=a,\ y=b$ geht.

Aufg. 1. Welcher Ort ist durch die Gleichung $xy=0$ dargestellt?
Die beiden Coordinatenaxen; weil der Gleichung durch jede der beiden Voraussetzungen $x=0,\ y=0$ genügt wird.

Aufg. 2. Welcher Ort ist durch $x^2 - y^2 = 0$ dargestellt?
Die beiden Halbirungslinien der von den Coordinatenaxen gebildeten Winkel $x \pm y = 0$. (Art. 35.)

Aufg. 3. Welches ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0?$$

Sie repräsentirt die beiden geraden Linien

$$x - 2y = 0,\ x - 3y = 0.$$

Aufg. 4. Welcher Ort wird dargestellt durch

$$x^2 - 2xy \sec\theta + y^2 = 0? \qquad x = y \tan(45^0 \pm \tfrac{1}{2}\theta).$$

Aufg. 5. Welche gerade Linien sind durch $x^2 - 2xy\tan\theta - y^2 = 0$ ausgedrückt?

Aufg. 6. Welche geraden Linien repräsentirt

$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = 0?$$

86. Es ist nützlich, die drei Fälle näher zu untersuchen, welche die Auflösung der Gleichung $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ darbietet; die Wurzeln derselben können r e e l l u n d v e r s c h i e d e n, r e e l l u n d g l e i c h und sie können i m a g i n ä r sein.

Der erste Fall hat keinerlei Schwierigkeiten; a und b sind, wenn man rechtwinklige Coordinaten voraussetzt, die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Linien mit der Axe der y bilden, p ist daher die Summe dieser Tangenten und q ist ihr Product.

Im zweiten Falle, wo $a=b$ ist, bezeichnet man oft die Gleichung $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ als die Repräsentantin einer e i n z i g e n

geraden Linie $x - ay = 0$. Aber es hat mancherlei Vorzüge, den Sprachgebrauch der Geometrie dem der Algebra völlig entsprechend zu machen und ebenso, wie man nicht sagt, dass jene Gleichung nur eine Wurzel, sondern vielmehr, dass sie zwei gleiche Wurzeln habe, auch nicht zu sagen, dass sie nur eine gerade Linie, sondern dass sie zwei zusammenfallende gerade Linien darstelle.

Man denke drittens die beiden Wurzeln imaginär. In diesem Falle können keine reellen Coordinaten gefunden werden, die der Gleichung genügen, ausgenommen die Coordinaten des Ursprungs $x = 0$, $y = 0$; man sagt daher in diesem Falle wohl, dass die Gleichung keine geraden Linien repräsentire, sondern dass sie die Gleichung des Coordinatenanfangspunktes sei. Diese Ausdrucksweise ist offenbar verwerflich, denn wir sahen (Art. 14), dass zur Bestimmung irgend eines Punktes zwei Gleichungen erforderlich sind und können nicht ausnahmsweise eine einzelne Gleichung als Gleichung eines Punktes anerkennen wollen. Wir sind überdiess gewohnt, zu finden, dass zwei verschiedene Gleichungen auch immer zwei verschiedene geometrische Bedeutungen haben, hier aber müssten unzählig viele verschiedene Gleichungen alle denselben Punkt unterschiedslos bedeuten, denn es ist dann offenbar unwesentlich, welches die Werthe von p und q sind, sobald sie nur imaginäre Wurzelwerthe liefern, d. h. sobald $p^2 < 4q$ ist. Deshalb ziehen wir vor, die Ausdrucksweise der analytischen Geometrie genau der Sprache der Algebra entsprechend zu machen; wie wir also nicht sagen, dass die Gleichung $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ keine Wurzeln hat, wenn $p^2 < 4q$, sondern dass sie zwei imaginäre Wurzeln hat, so sagen wir auch nicht, dass sie in diesem Falle keine geraden Linien repräsentirt, sondern dass zwei imaginäre gerade Linien durch sie dargestellt werden.

Somit repräsentirt die Gleichung $x^2 - pxy + qy^2 = 0$, welche stets auf die Form $(x - ay)(x - by) = 0$ reducirt werden kann, in jedem Falle zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene gerade Linien; sie sind reell, wenn a und b reell sind, fallen zusammen, wenn a und b gleich sind, und sind imaginär, wenn a und b imaginär sind. Wenn es hier ohne grosse Bedeutung scheinen mag, welchen Sprachgebrauch wir annehmen, so werden wir im weiteren Fortschreiten doch vielfach erkennen, dass uns in vielen Fällen die Einfachheit und Strenge des Aus-

drucks und manche wichtige Analogien verloren gehen müssten, wenn wir den hier empfohlenen Sprachgebrauch nicht annehmen.

Dieselben Bemerkungen gelten für die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

welche auf die Form $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ einfach dadurch reducirt wird, dass man sie mit dem Coefficienten von x^2 dividirt; sie repräsentirt immer zwei durch den Coordinatenanfang gehende gerade Linien, welche reell sind, so lange $(B^2 - 4AC)$ positiv ist, zusammenfallen für $B^2 - 4AC = 0$ und imaginär sind, wenn $(B^2 - 4AC)$ negativ ist.

Wir wenden endlich dieselbe Ausdrucksweise an, wenn wir gleiche oder imaginäre Wurzeln in der Auflösung der allgemeinen homogenen Gleichung des n^{ten} Grades antreffen.

87. Den Winkel zu finden, welcher von den durch die Gleichung $x^2 - pxy + qy^2 = 0$ dargestellten geraden Linien gebildet wird.

Wenn die Gleichung auf die Form $(x - ay)(x - by) = 0$ gebracht ist, so ist nach Art. 25 die trigonometrische Tangente des von ihnen gebildeten Winkels $\frac{a-b}{1+ab}$; aber das Product der Wurzeln der gegebenen Gleichung ist $= q$ und die Differenz derselben $= \sqrt{(p^2 - 4q)}$; man erhält somit für jene Tangente den Ausdruck

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{(p^2 - 4q)}}{1 + q}.$$

Ist die Gleichung in der Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ gegeben, so findet man ebenso $\tan\varphi = \frac{\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A + C}$ *).

Zusatz. Die beiden geraden Linien schneiden sich rechtwinklig, d. h. $\tan\varphi$ wird unendlich gross, wenn $q = -1$ oder wenn $A + C = 0$ ist.

Aufg. Welches ist der Winkel zwischen den Linien, welche dargestellt sind durch

$x^2 + xy - 6y^2 = 0$? 45^0. $x^2 - 2xy\sec\theta + y^2 = 0$? θ.

---

*) Für schiefwinklige Axen ergiebt sich auf dieselbe Weise zur Bestimmung des fraglichen Winkels die Formel

$$\tan\varphi = \frac{\sin\omega\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A + C - B\cos\omega}.$$

88. **Welches ist die Gleichung der Halbirungslinien des Winkels, den die durch die Gleichung**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

dargestellten geraden Linien mit einander bilden?

Sind $x - ay = 0$ und $x - by = 0$ die Gleichungen der geraden Linien, welche jene Gleichung repräsentirt und bezeichnet man durch $x - \mu y = 0$ die Gleichung der Halbirungslinie ihres Winkels, so bestimmt sich die Grösse μ durch die einfache Bemerkung, dass sie die Tangente des Winkels ist, den die gesuchte Winkelhalbirungslinie mit der Axe der y bildet und dass dieser Winkel der halben Summe der Winkel gleich ist, welche von jenen geraden Linien mit dieser Axe gebildet werden. Durch Vergleichung der Tangente des doppelten Winkels mit der Tangente der Summe zweier Winkel ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Nach der Theorie der Gleichungen ist aber

$$a + b = -B : A \text{ und } ab = C : A,$$

somit $$\frac{2\mu}{1-\mu^2} = -\frac{B}{A-C} \text{ oder } \mu^2 - 2\frac{A-C}{B}\mu - 1 = 0.$$

Von den Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, welche zur Bestimmung von μ dient, ist die eine die Tangente des Winkels, den die innere Halbirungslinie des Winkels der beiden durch die Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ gegebenen geraden Linien mit der Axe der y bildet und die andre die Tangente des Winkels, den die äussere Halbirungslinie des nämlichen Winkels mit derselben Axe macht.

Indem wir in diese quadratische Bestimmungsgleichung für μ seinen Werth $x : y$ substituiren, erhalten wir die Gleichung beider Winkelhalbirungslinien $x^2 - 2\frac{A-C}{B}xy - y^2 = 0$. Die Form dieser Gleichung zeigt (Artikel 87), dass die beiden Halbirungslinien rechtwinklig zu einander sind.

Man kann diese Gleichung auch erhalten, indem man nach Art. 35 für die beiden geraden Linien $x - ay = 0$, $x - by = 0$ die Gleichungen der innern und äussern Winkelhalbirungslinien bildet, und diese mit einander multiplicirt; man erhält so

$$\frac{(x-ay)^2}{1+a^2} = \frac{(x-by)^2}{1+b^2}$$

und durch Beseitigung der Brüche und Substitution der in A, B, C ausgedrückten Werthe von ab und $(a + b)$ die oben gefundene Gleichung.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Wurzeln dieser Gleichung stets reell sind, selbst dann, wenn die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ imaginär waren. Ein Paar von imaginären geraden Linien hat somit ein Paar reelle Winkelhalbirungslinien.

Es ist die Existenz solcher Beziehungen zwischen reellen und imaginären geraden Linien, welche die Betrachtung der letzteren besonders nützlich macht.

89. Die Bedingung zu finden, unter welcher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt.

Wir schreiben die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in der Form

$$a_{11}x^2 + 2(a_{12}y + a_{13})x + (a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}) = 0.$$

Durch die Auflösung derselben für x finden wir die Wurzeln

$$a_{11}x = -(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{\{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})y^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})y + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})\}}.$$

Dieser Werth von x kann nicht auf die Form $x = my + n$ reducirt werden, wenn nicht die Grösse unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist. Die Bedingung, unter welcher diess allein der Fall ist, wird bekanntlich ausgedrückt durch

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) = (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2.$$

Die Ausführung der angedeuteten Operationen liefert nach einer Division durch a_{11}

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

als die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt.

Aufg. 1. Repräsentirt die Gleichung

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ gerade Linien und welche?

Indem man wie im Vorhergehenden für x auflöst, erhält man für die durch die Gleichung dargestellten geraden Linien die Gleichungen

$$x - y - 1 = 0, \quad x - 4y + 2 = 0.$$

Aufg. 2. Repräsentirt die Gleichung

$(\alpha x + \beta y - r^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2)$ gerade Linien und welche?

Aufg. 3. Welche gerade Linien sind durch die Gleichung

$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$ dargestellt?

Aufl. Die imaginären geraden Linien $x+\theta y+\theta^2=0$, $x+\theta^2 y+\theta=0$, wenn θ eine der imaginären Cubicwurzeln der Einheit ist.

Aufg. 4. Man soll die Grösse a_{12} so bestimmen, dass die Gleichung $x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ gerade Linien darstellt.

Indem man die Werthe der Coefficienten in die allgemeine Bedingungsgleichung substituirt, erhält man für a_{12} die quadratische Gleichung $12a_{12}^2 - 35a_{12} + 25 = 0$, aus welcher für a_{12} die Werthe $a_{12}' = \frac{5}{3}$, $a_{12}'' = \frac{5}{4}$ hervorgehen.

*90. Die in dem vorigen Artikel angewendete Methode, obgleich die einfachste in dem Fall der Gleichung zweiten Grades, ist auf Gleichungen höherer Grade nicht anwendbar; wir geben daher in dem Folgenden noch eine andre Auflösung derselben Aufgabe.

Dieselbe verlangt, zu erkennen, ob die gegebene Gleichung des zweiten Grades mit dem Product der Gleichungen zweier geraden Linien $(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0$ identisch werden kann.

Wir schreiben hierzu die allgemeine Gleichung des zweiten Grades in der Form

$$\frac{a_{11}}{a_{33}} x^2 + \frac{2a_{12}}{a_{33}} xy + \frac{a_{22}}{a_{33}} y^2 + \frac{2a_{13}}{a_{33}} x + \frac{2a_{23}}{a_{33}} y + 1 = 0$$

und vergleichen die Coefficienten ihrer Glieder mit den entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung jenes Products; dadurch erhalten wir fünf Bedingungsgleichungen, von denen vier die Bestimmung der vier unbestimmten Grössen α, β, α', β' liefern müssen. Durch die Substitution der erhaltenen Werthe in die fünfte Bedingungsgleichung finden wir die verlangte Bedingung. Jene fünf Gleichungen sind

$$\alpha\alpha' = \frac{a_{11}}{a_{33}},\ \alpha+\alpha' = -\frac{2a_{13}}{a_{33}},\ \beta\beta' = \frac{a_{22}}{a_{33}},\ \beta+\beta' = -\frac{2a_{23}}{a_{33}},\ \alpha\beta' + \alpha'\beta = \frac{2a_{12}}{a_{33}}.$$

Die vier ersten liefern sofort zwei quadratische Gleichungen zur Bestimmung von α, α', β, β'. Wir können dieselben auch durch die Bemerkung erhalten, dass diese vier Grössen die Reciproken der Abschnitte sind, welche durch die geraden Linien in den Coordinaten-Axen gebildet werden und dass die von dem durch die Gleichung $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ dargestellten Orte in den Axen gebildeten Abschnitte dadurch bestimmt werden, dass man in derselben nach einander $x = 0$, $y = 0$ setzt, wodurch sich ergeben

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0,\quad a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Bezeichnen wir durch L, L', M, M' die vier so erhaltenen Durchschnittspunkte des bezeichneten Ortes mit den Axen, so müssen, wenn derselbe aus geraden Linien zusammengesetzt ist, diese entweder das Paar LM, $L'M'$ oder das Paar LM', $L'M$ sein; die Gleichungen derselben sind $(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1) = 0$ und $(\alpha x + \beta' y - 1)(\alpha' x + \beta y - 1) = 0$ und die gleichmässige Berechtigung derselben lehrt, dass für $\frac{2a_{12}}{a_{33}}$ nicht allein der oben gegebene Werth $\alpha\beta' + \alpha'\beta$, sondern auch der andere $\alpha\beta + \alpha'\beta$ gelten muss. Die Summe beider Grössen ist

$$= (\alpha + \alpha')(\beta + \beta') = \frac{4\,a_{23}\,a_{13}}{a_{33}^2} \text{ und ihr Product}$$

$$\alpha\alpha'(\beta^2 + \beta'^2) + \beta\beta'(\alpha^2 + \alpha'^2) = \frac{a_{11}(4a_{23}^2 - 2a_{22}a_{33})}{a_{33}^3} + \frac{a_{22}(4a_{13}^2 - 2a_{11}a_{33})}{a_{33}^3},$$

und es ergiebt sich daher zur Bestimmung von $\frac{a_{12}}{a_{33}}$ die quadratische Gleichung

$$\frac{a_{12}^2}{a_{33}^2} - \frac{a_{13}\,a_{23}^2}{a_{33}^2} \cdot \frac{2\,a_{12}}{a_{33}} + \frac{a_{11}\,a_{23}^2 + a_{22}\,a_{13}^2 - a_{11}\,a_{22}\,a_{33}}{a_{33}^3} = 0,$$

welche, von Brüchen befreit, die im vorigen Artikel erhaltene Bedingungsgleichung wiedergiebt.

Aufgabe. Man soll die Grösse a_{12} so bestimmen, dass $x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ gerade Linien darstelle.

Die Abschnitte in den Axen sind durch die Gleichungen $x^2 - 5x + 6 = 0$, $y^2 - 7y + 6 = 0$ gegeben, deren Wurzeln $x' = 2$, $x'' = 3$; $y' = 1$, $y'' = 6$ sind. Indem wir die Gleichungen der geraden Verbindungslinien der so gefundenen Punkte bilden, sehen wir, dass die Gleichung, wenn sie gerade Linien darstellt, entweder von der Form $(x + 2y - 2)(2x + y - 6) = 0$, oder von der Form $(x + 3y - 3)(3x + y - 6) = 0$ sein muss. Daraus ergeben sich durch Ausführung der angedeuteten Multiplicationen die Werthe von a_{12}.

Mit Hilfe der Grundsätze der Determinantentheorie und im Anschluss an die Untersuchungen der Art. 72 f. lässt sich die nämliche Bedingung in folgender Weise finden und darstellen. Wenn die linke Seite der Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

das Product von zwei linearen Factoren sein soll, so müssen in der mit ihr identischen Form

$$x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ + x_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

die drei linearen Functionen

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$.

zu einander in constantem Verhältniss sein, etwa $= m_1 : m_2 : m_3$; denn dann ist sie das Product von zwei zu $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$ proportionalen Factoren. Die zu erfüllende Bedingung ist also die Erfüllung der Gleichheiten

$$\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{m_1} = \frac{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{m_2} = \frac{a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3}{m_3}$$

für alle Werthe von x_1, x_2, x_3 oder die Existenz solcher Werthe von x_1, x_2, x_3, für welche gleichzeitig $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$, $a_{13}x_3 + a_{23}x_3 + a_{33}x_3 = 0$ sind. Die Elimination von x_1, x_2, x_3 zwischen diesen Gleichungen giebt nach Art. 72 diese Bedingung, also die Bedingung des Problems der vorigen Art., in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ mit } a_{ij} = a_{ji}.$$

Die entwickelte Form ergiebt die Relation wie vorher.

*91. Man soll angeben, wie viele Bedingungsgleichungen erfüllt sein müssen, damit die allgemeine Gleichung des n^{ten} Grades gerade Linien darstellt.

Die Zahl derselben wird durch das Verfahren des vorigen Artikels leicht erhalten; wir vergleichen die allgemeine Gleichung des n^{ten} Grades, nachdem wir in ihr das absolute Glied der Einheit gleichgemacht haben, mit dem Product von n linearen Gleichungen

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1)(\alpha'' x + \beta'' y - 1) \ldots = 0.$$

Ist die Zahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung $= N$, so erhalten wir durch die Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten in ihr und in der Entwickelung dieses Productes $N-1$ Gleichungen. Von denselben dienen $2n$ zur Bestimmung der $2n$ unbekannten Grössen, α, α', ... β, β', ..., und die so erhaltenen Werthe derselben liefern in die übriggebliebenen Gleichungen substituirt $N - 1 - 2n$ Bedingungen.

Da aber die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades in der Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} & A \\ & + Bx + Cy \\ & + Dx^2 + Exy + Fy^2 \\ & + Gx^3 + Hx^2y + Kxy^2 + Ly^3 + \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

so ist die Zahl ihrer Glieder die Summe der arithmetischen Reihe

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1),$$

also $$N = \frac{(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2}.$$

Daher ergiebt sich die Anzahl der nöthigen Bedingungen

$$N - 1 - 2n = \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2}.$$

Sechstes Kapitel.

Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung.

92. Die allgemeinste Form der Gleichung zweiten Grades ist

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

worin a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{12} Constanten sind.

Die Natur der durch diese Gleichung dargestellten Curven ist von den speciellen Werthverhältnissen der Constanten abhängig. Wie das vorige Kapitel gezeigt hat, in welchen Fällen sie zwei gerade Linien darstellt, so ist es die Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels, die verschiedenen Curven zu classificiren, welche durch Gleichungen der angezeigten allgemeinen Form dargestellt werden können und einige der Eigenschaften zu entwickeln, welche ihnen allen gemeinsam sind*).

Fünf Relationen zwischen den Coefficienten sind hinreichend, eine Curve zweiten Grades zu bestimmen. Zwar enthält die allgemeine Gleichung sechs Constanten, aber es ist offenbar, dass die Natur der Curve nicht von der absoluten Grösse dieser

*) Wir werden später beweisen, dass der durch eine Ebene in einen Kegel über circularer Basis gemachte Schnitt eine Curve vom 2. Grade ist, und umgekehrt, dass es keine Curve des zweiten Grades giebt, welche nicht als ein Kegelschnitt betrachtet werden kann. Unter diesem Gesichtspunkte sind die Curven des zweiten Grades zuerst von den Geometern untersucht worden. Wir gedenken dieser Eigenschaften, weil wir es oft passend finden werden, die Bezeichnung „Kegelschnitt" statt der längeren Benennung „Curve zweiten Grades" zu gebrauchen.

Coefficienten abhängt, weil die Gleichung, wenn wir sie mit irgend einer Constanten n multipliciren oder dividiren, immer dieselbe Curve darstellt; wir können daher die Gleichung durch a_{33} dividiren, um das absolute Glied $= 1$ zu machen und sie ist daher durch 5 Constante bestimmt.

So z. B. kann ein Kegelschnitt durch 5 Punkte beschrieben werden. Indem wir in die Gleichung die Coordinaten x', y', u. s. w. jedes Punktes substituiren, durch welchen die Curve gehen muss, erhalten wir fünf Relationen zwischen den Coefficienten, welche zur Bestimmung der fünf Grössen $\frac{a_{11}}{a_{33}}$, u. s. w. genügen.

93. Weil wir in diesem Kapitel oft Gelegenheit haben, die Methode der Coordinatentransformation anzuwenden, so ist es nützlich, im Voraus die Veränderungen anzuzeigen, welche die allgemeine Gleichung durch die Transformation zu parallelen Axen durch einen neuen Ursprung x', y' erfährt. Wir bilden die neue Gleichung, indem wir $x + x'$ für x, $y + y'$ für y einsetzen (Art. 8) und erhalten

$$a_{11}(x + x')^2 + 2a_{12}(x + x')(y + y') + a_{22}(y + y')^2 + 2a_{13}(x + x') + 2a_{23}(y + y') + a_{33} = 0.$$

Indem wir diese Gleichung nach den Potenzen der Veränderlichen ordnen, finden wir, dass die Coefficienten von x^2, xy, y^2 dieselben sind, wie vorher a_{11}, $2a_{12}$, a_{22}; dass

das neue a_{13} $\quad a_{13}' = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}$;

das neue a_{23} $\quad a_{23}' = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}$;

das neue a_{33} $\quad a_{33}' = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}$;

d. h. wenn die Gleichung einer Curve des zweiten Grades zu parallelen Axen durch einen neuen Ursprung transformirt wird, so bleiben die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen ungeändert, während das neue absolute Glied das Resultat der Substitution der Coordinaten des Ursprungs in die Original-Gleichung ist*).

94. Jede gerade Linie schneidet eine Curve zweiten Grades in zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten.

---

*) Dies gilt ganz ebenso für Gleichungen von beliebigen Graden.

Wir erkennen diess daran, dass wir zur Bestimmung der Punkte, in denen eine gerade Linie $y = mx + n$ die Curve schneidet, eine quadratische Gleichung erhalten; durch Substitution dieses Werthes von y an Stelle desselben in die Gleichung zweiten Grades insbesondere eine solche zur Bestimmung der Abscissen x der Durchschnittspunkte. Die Punkte, in denen die Curve die Axen schneidet, sind, bestimmt durch die quadratischen Gleichungen $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$, $a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Eine scheinbare Ausnahme hiervon tritt in dem Falle ein, wo die Gleichung zweiten Grades das Quadrat der einen Veränderlichen nicht oder mit verschwindendem Coefficienten enthält; z. B. erhalten wir aus der Gleichung zweiten Grades $xy + 2y^2 + x + 5y + 3 = 0$ für $y = 0$ eine Gleichung ersten Grades zur Bestimmung der Abscissen der Schnittpunkte des dargestellten Ortes mit der Axe x. Wenn aber in einer Gleichung zweiten Grades $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ der Coefficient C verschwindet, so sagen wir darum nicht, dass dieselbe sich auf eine lineare Gleichung reducirt habe, sondern wir betrachten sie noch immer als eine quadratische Gleichung, deren eine Wurzel $x = 0$ ist, während die andere den Werth $x = -2B : A$ hat. Diese quadratische Gleichung kann aber auch in der Form $C\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2B\left(\frac{1}{x}\right) + A = 0$ geschrieben werden und wir erkennen nun, dass wir sie auch beim Verschwinden von A noch immer als eine quadratische Gleichung zu betrachten haben, von deren Wurzeln die eine den Werth $1 : x = 0$, oder $x = \infty$, die andere aber den Werth $1 : x = -2B : C$ oder $x = -C : 2B$ hat. Dasselbe Resultat ergiebt sich durch die Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, die man in jeder der beiden Formen $x = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - AC)}}{A} = \frac{C}{-B \mp \sqrt{(B^2 - AC)}}$ erhalten kann, je nachdem man für x oder für die Reciproke $1 : x$ auflöst; die Aequivalenz beider Formen ergiebt sich auch durch die kreuzweise Multiplication ihrer Zähler und Nenner. Je kleiner aber A ist, desto weniger unterscheidet sich der Werth der Wurzelgrösse von $\pm B$ und die letztere Form der Lösung zeigt damit, dass die eine Wurzel der Gleichung um so mehr wächst, je kleiner A ist und dass mit dem Verschwinden von A die eine Wurzel der Gleichung unendlich gross wird. Wenn wir also eine lineare Gleichung zur Bestimmung der Punkte erhalten, in welchen eine

Gerade die Curve schneidet, so haben wir sie als den Grenzfall einer quadratischen Gleichung von der Form $0.x^2+2Bx+C=0$ anzusehen, für welchen die eine der Wurzeln unendlich gross ist, d. h. als Ausdruck des Umstandes, dass der eine der Schnittpunkte der Geraden mit der Curve unendlich entfernt sei. So repräsentirt die als Beispiel gewählte Gleichung, die in der Form $(y+1)(x+2y+3)=0$ darstellbar ist, zwei gerade Linien, deren eine die Axe der x in einem endlichen Punkt schneidet, während die andere den unendlich fernen Punkt mit ihr gemein hat.

In derselben Art sagen wir, dass in einer quadratischen Gleichung $Ax^2+2Bx+C=0$, in der sowohl B als C verschwinden, beide Wurzeln gleich 0 seien, und dass beide Wurzeln x unendlich gross sind, wenn B und A zugleich verschwinden. Es ist ferner hinzuzufügen, dass die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, abgesehen von diesen Grenzwerthen, reell oder imaginär sein können. Darnach sagen wir, um die Sprache der analytischen Geometrie mit der der Algebra in Uebereinstimmung zu setzen, dass jede gerade Linie eine Curve zweiten Grades in zwei reellen oder imaginären Punkten schneidet. Die imaginären Werthe, welche man für die Wurzeln der Gleichung erhält, sind stets bestimmte imaginäre Werthe. Anstatt dann zu sagen, die Gerade schneide die Curve nicht, werden wir sagen, sie schneide sie in zwei imaginären Punkten, ganz ebenso wie wir nicht sagen, die betreffende quadratische Gleichung habe keine Wurzeln, sondern sie habe zwei imaginäre Wurzeln. Wir verstehen unter einem imaginären Punkt nichts mehr als einen Punkt, welcher eine imaginäre Coordinate oder zwei imaginäre Coordinaten besitzt; es ist eine analytische Vorstellung und wir unternehmen nicht, einen solchen Punkt geometrisch darzustellen; ebensowenig, wie die imaginären Wurzeln einer Gleichung arithmetisch dargestellt werden. Die Beachtung dieser imaginären Punkte erweist sich aber als nothwendig, um unsern Raisonnements die Allgemeinheit zu bewahren; wir werden sogar Gelegenheit haben, zu sehen, dass die Verbindungslinie von zwei imaginären Punkten reell sein und alle die geometrischen Eigenschaften besitzen kann, die der entsprechenden Verbindungslinie in dem Falle reeller Punkte angehören. In Rücksicht auf diese Erklärungen und bei steter Beachtung sowohl der unendlich fernen als der imaginären Punkte

können wir aussprechen, dass jede gerade Linie eine Curve zweiten Grades in zwei Punkten durchschneidet.

95. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

liefert durch Transformation zu Polar-Coordinaten (Art. 12*)

$$(a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)\varrho^2 + 2(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)\varrho + a_{33} = 0;$$

die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind die beiden Werthe des Radius vector, welche irgend einem Werthe von θ entsprechen. Nun haben wir im letzten Artikel gesehen, dass der eine dieser Werthe unendlich gross wird, d. h. dass der Radius vector die Curve in einem unendlich entfernten Punkte schneidet, wenn der Coefficient von ϱ^2 verschwindet. Diese Bedingung wird aber für zwei Werthe von θ erfüllt, nämlich für diejenigen, welche die quadratische Gleichung $a_{11} + 2a_{12}\tan\theta + a_{22}\tan^2\theta = 0$ liefert. Demnach können durch den Anfangspunkt der Coordinaten zwei gerade Linien gezogen werden, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneiden; jede dieser Linien schneidet die Curve auch in einem Punkte in endlicher Entfernung und der Abstand desselben vom Anfangspunkt ist durch die Gleichung $2(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)\varrho + a_{33} = 0$ bestimmt. Multiplicirt man die Gleichung

$a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta = 0$ mit ϱ^2 und setzt für $\varrho\cos\theta$, $\varrho\sin\theta$ ihre Werthe x und y ein, so erhält man als die Gleichung der beiden in Rede stehenden Geraden

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Es giebt zwei Richtungen, nach welchen durch jeden Punkt Gerade gezogen werden können, die die Curve in unendlicher Entfernung schneiden; denn man kann durch Transformation der Coordinaten den gedachten Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten machen und den vorhergehenden Beweis anwenden. Im Art. 93 ward aber bewiesen, dass die Grössen $a_{11}\, a_{12}\, a_{22}$ bei einer solchen Transformation vollkommen ungeändert bleiben und jene Richtungen werden daher stets durch die nämliche qua-

*) Die folgenden Prozesse gelten gleichmässig auch dann, wenn die ursprüngliche Gleichung auf schiefwinklige Coordinaten bezogen ist. Wir substituiren dann $m\varrho$ für x und $n\varrho$ für y, wo $m = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}$ und $n = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}$ (Art. 12) ist und verfahren wie im Text.

dratische Gleichung $a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta = 0$ bestimmt. Wenn also durch irgend einen Punkt zwei reelle Gerade gezogen werden können, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneiden, so schneiden auch die durch irgend einen andern Punkt zu ihnen gezogenen Parallelen die Curve in unendlicher Entfernung*).

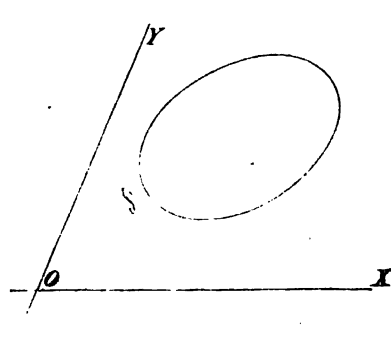
96. Die wichtigste Frage, die wir betreffs der Form der durch irgend eine Gleichung dargestellten Curve thun können, ist, ob sie in jeder Richtung begrenzt ist, oder ob sie sich in irgend einer Richtung ins Unendliche erstreckt. Das Beispiel unbegrenzter Ausdehnung giebt der Fall, in welchem sie ein Paar gerade Linien darstellt. Es ist daher nothwendig, ein Kennzeichen zu finden, wodurch wir unterscheiden können, welcher Classe von Oertern die durch irgend eine specielle Gleichung zweiten Grades dargestellte Curve angehört. Ein solches Kennzeichen ist uns aber durch den letzten Artikel geliefert. Denn wenn die Curve in jeder Richtung begrenzt wäre, so kann kein durch den Ursprung gezogener Radius vector der Curve einen unendlichen Werth haben; wir fanden aber im letzten Artikel, dass wir, damit der Radius vector unendlich werde, haben müssen

$$a_{11} + 2 a_{12} \tan \theta + a_{22} \tan^2 \theta = 0.$$

1.) Wenn wir nun voraussetzen, $a_{12}{}^2 - a_{11} a_{22}$ sei negativ, so sind die Wurzeln dieser Gleichung imaginär und es kann kein reeller Werth von θ gefunden werden, welcher der Bedingung

$$a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta = 0$$

genügt. In diesem Falle kann daher keine reelle gerade Linie gezogen werden, die die Curve im Unendlichen schneidet, und die Curve ist in jeder Richtung begrenzt. Wir werden im zehnten Kapitel zeigen, dass ihre Form die in der Figur dargestellte ist. Eine Curve dieser Classe wird Ellipse genannt.



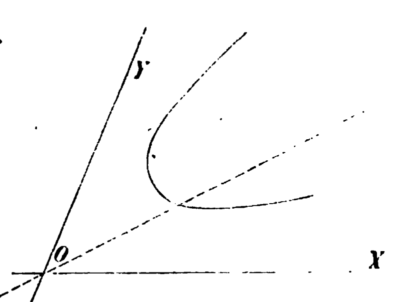
*) Diess ist geometrisch evident, weil parallele Linien als solche betrachtet werden können, welche sich in unendlicher Entfernung schneiden.

2.) Wenn $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ positiv ist, so sind die Wurzeln der Gleichung $a_{11} + 2a_{12} \tan\theta + a_{22} \tan^2\theta = 0$ reell und verschieden; folglich giebt es zwei reelle Werthe von θ, welche den Radius vector des einen der Punkte unendlich machen, wo die Linie die Curve schneidet.

Also können in diesem Falle zwei reelle gerade Linien dargestellt durch
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$
durch den Ursprung gezogen werden, die die Curve im Unendlichen schneiden.

Eine Curve dieser Classe wird eine Hyperbel genannt und wir zeigen im zehnten Kapitel, dass ihre Form die in der Figur dargestellte ist.

3.) Wenn $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung $a_{11} + 2a_{12} \tan\theta + a_{22} \tan^2\theta = 0$ reell und einander gleich und die zwei Richtungen, in welchen eine gerade Linie gezogen werden kann, die die Curve in unendlicher Entfernung schneidet, fallen zusammen.



Eine Curve dieser Classe wird eine Parabel genannt und wir zeigen im elften Kapitel, dass ihre Form die hier dargestellte ist. Die gefundene Bedingung kann ausgedrückt werden, indem man sagt, dass die Curve eine Parabel ist, wenn die ersten drei Glieder ihrer Gleichung ein vollständiges Quadrat bilden.

97. Es scheint nützlich, die Ableitung der Figur der Curve aus der Gleichung hier folgen zu lassen, ohne dass vorher durch Transformation diese Gleichung auf ihre einfachste Form reducirt worden wäre. Die allgemeine Wahrheit der vorher gewonnenen Ergebnisse lässt sich in der That auch darthun, indem man nach der im Art. 16 angegebenen Art die durch die Gleichung dargestellte Figur construirt. Wenn man y durch x aus-

drückt, so erhält man wie in Art. 89

$$a_{22}\, y = -(a_{12}\, x + a_{23})$$
$$\pm \sqrt{\left\{(a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) x^2 + 2(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13})\, x + (a_{23}^2 - a_{22} a_{33})\right\}}.$$

Da nun nach der Theorie der quadratischen Gleichungen jede Grösse von der Form $x^2 + px + q$ dem Product von zwei reellen oder imaginären Factoren $(x - \alpha)\,(x - \beta)$ äquivalent ist, so kann die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse in der Form $(a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22})\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$ dargestellt werden. Ist daher $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ negativ, so ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen negativ und daher y imaginär, wenn die Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$ entweder beide positiv oder beide negativ sind; reelle Werthe von y werden nur für solche Werthe von x gefunden, die zwischen α und β gelegen sind und die Curve existirt daher nur in dem zwischen den geraden Linien $x = \alpha$, $x = \beta$ gelegenen Raume. (Vergl. Art. 16, Aufg. 3.) Das Umgekehrte findet statt, wenn $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ positiv ist; man erhält reelle Werthe von y für alle die Werthe von x, welche die Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$ entweder beide positiv oder beide negativ machten, nicht aber für solche, die den einen positiv und den andern negativ werden lassen. Die Curve besteht in diesem Falle aus zwei Zweigen, welche im positiven und negativen Sinne ins Unendliche gehen, aber durch einen zwischen den Linien $x = \alpha$ und $x = \beta$ gelegenen Raum getrennt sind, in dem kein Theil der Curve liegt. Wenn $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ den Werth Null hat, so ist die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse entweder $x - \alpha$ oder $\alpha - x$; in dem einen Falle erhält man reelle Werthe von y, so lange x grösser ist als α, und in dem andern, so lange x kleiner ist als α; die Curve besteht daher aus einem einzigen Zweig, der auf der rechten oder linken Seite der Geraden $x = \alpha$ sich ins Unendliche erstreckt.

Sind die Wurzeln α und β imaginär, so kann die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse stets in die Form $(a_{12}^2 - a_{11} a_{22})\left\{(x - \gamma)^2 + \delta^2\right\}$ gebracht werden. Ist $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ positiv, so ist diese Grösse stets positiv, und gerade Linien, welche der Axe der y parallel sind, schneiden die Curve stets. So schneiden in der Figur der Hyperbel im vorigen Artikel gerade Linien, welche der Axe y parallel sind, die Curve stets, während Parallelen zur Axe x existiren, welche sie nicht treffen. Andererseits ist für den negativen Werth von $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ die Grösse

unter dem Wurzelzeichen immer negativ und die Gleichung repräsentirt keine reelle Figur.

Aufg. 1. Construire wie in Art. 16 die Figuren und bestimme die Gattung der durch folgende Gleichungen dargestellten Curven:

$3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 7y - 4 = 0.$ Ellipse.
$5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0.$ Hyperbel.
$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 10 = 0.$ Parabel.

Aufg. 2. Welches ist die Gattung der Curve für $a_{12} = 0$?

Aufl. Eine Ellipse für gleiche Vorzeichen von a_{11} und a_{22} und eine Hyperbel für entgegengesetzte Vorzeichen dieser Grössen.

Aufg. 3. Man bestimme die Gattung der Curve für verschwindendes a_{11} oder a_{22}.

Aufl. Eine Parabel, wenn zugleich $a_{12}=0$ ist; sonst eine Hyperbel. Wenn $a_{11}=0$ ist, so schneidet die Axe x die Curve in unendlicher Ferne und für $a_{22} = 0$ die Axe y.

Aufg. 4. Welche Curve wird durch

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0 \text{ dargestellt?}$$

Aufl. Eine Parabel, welche die Axen in den Punkten $x = a$ und $y = b$ berührt.

98. Wenn in einer quadratischen Gleichung $Ax^2+2Bx+C=0$ der Coefficient B verschwindet, so sind die beiden Wurzeln derselben gleich gross mit entgegengesetzten Zeichen. Diess wird also in der Gleichung

$$(a_{11}\cos^2\theta+2a_{12}\cos\theta\sin\theta+a_{22}\sin^2\theta)\,\varrho^2+2(a_{13}\cos\theta+a_{23}\sin\theta)\varrho+a_{33}=0$$

eintreten, wenn der Radius vector in der durch die Gleichung $a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta = 0$ bestimmten Richtung gezogen ist. Die Punkte, welche gleichen und entgegengesetzten Werthen von ϱ entsprechen, sind gleich weit entfernt und auf entgegengesetzten Seiten vom Anfangspunkt der Coordinaten; die durch die Gleichung $a_{13}x + a_{23}y = 0$ dargestellte Sehne wird also im Anfangspunkt der Coordinaten halbirt. Durch jeden Punkt kann somit im Allgemeinen eine Sehne der Curve so gezogen werden, dass sie im Anfangspunkt halbirt wird.

99. Es giebt jedoch einen Fall, in welchem mehr als eine Sehne der Curve durch den gegebenen Punkt gezogen werden kann, welche in ihm halbirt wird. Wenn in der allgemeinen Gleichung $a_{13}=0$, $a_{23}=0$ ist, so hat die Grösse $a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta$ den Werth Null, unabhängig von dem Werthe von θ und wie im letzten Art. wird erkannt, dass dann *jede* durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene Gerade in ihm halbirt wird.

Der Anfangspunkt wird dann das Centrum der Curve genannt. Nun kann man im Allgemeinen durch Transformation der Gleichung zweiten Grades zu einem neuen Anfangspunkt den Coefficienten a_{13} und a_{23} derselben den Werth Null geben. Denn wenn man die im Art. 93 gegebenen Werthe für das neue a_{13} und a_{23} gleich Null setzt, so findet man, dass die Coordinaten des neuen Anfangspunktes den Bedingungen $a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13} = 0$, $a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23} = 0$ genügen müssen. Diese Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung von x' und y' und da sie linear sind, so können sie nur durch einen Werth von x' und y' befriedigt werden, d. h. ein Kegelschnitt besitzt im Allgemeinen nur ein Centrum. Die Coordinaten desselben werden gefunden, indem man die vorigen Bedingungsgleichungen auflöst und sind daher $x' = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$, $y' = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$. Für die Ellipse und Hyperbel ist nach Art. 96 die Grösse $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ stets endlich, für die Parabel ist $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ und die Coordinaten des Centrums sind unendlich gross. Die Ellipse und Hyperbel sind deshalb wohl zusammen als Centralcurven bezeichnet worden, während die Parabel eine Curve ohne Centrum genannt worden ist.

Der Anfänger muss jedoch dabei sich erinnern, dass genau gesprochen, jede Curve des zweiten Grades ein Centrum hat, obgleich in dem Fall der Parabel dieses Centrum in einer unendlichen Entfernung gelegen ist.

100. Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen zu finden, die bei einer Curve des zweiten Grades einer gegebenen geraden Linie parallel sind.

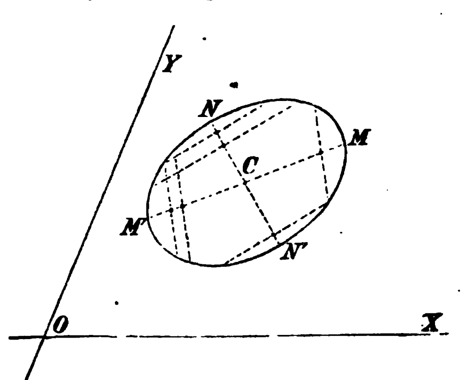
Wir sahen (Artikel 98), dass eine Sehne durch den Anfangspunkt der Coordinaten in ihm halbirt wird, wenn $a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta = 0$ ist. Verlegen wir nun den Anfangspunkt nach irgend einem andern Punkte, so erhellt in derselben Art, dass eine zu jener parallele Sehne in dem neuen Anfangspunkt halbirt wird, wenn die Summe der Producte des neuen Coefficienten a_{13} in $\cos\theta$ und des neuen Coefficienten a_{23} in $\sin\theta$ gleich Null ist, oder (Art. 93) wenn $\cos\theta\,(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + \sin\theta\,(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}) = 0$ ist. Diess ist daher eine Relation, welcher durch die Coordinaten des neuen Anfangspunktes genügt werden muss, wenn derselbe der Mittelpunkt einer Sehne sein soll, die den Winkel θ

mit der Axe x einschliesst. Also muss der Mittelpunkt irgend einer zu ihr parallelen Sehne in der geraden Linie

$$\cos\theta\,(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \sin\theta\,(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

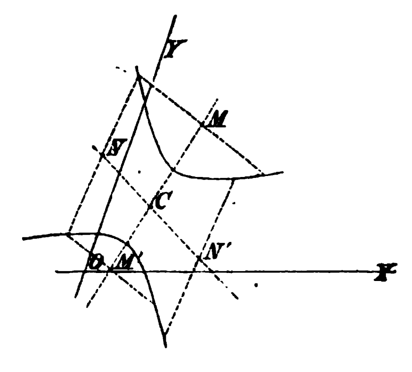
liegen und diese ist somit der verlangte geometrische Ort.

Jede gerade Linie, die ein System von parallelen Sehnen einer Curve halbirt, wird ein **Durchmesser** derselben genannt, und die Sehnen, welche er halbirt, heissen seine **Ordinaten**.



Die Form der Gleichung zeigt (Artikel 40), dass jeder Durchmesser durch den Durchschnitt der zwei geraden Linien gehen muss, welche die Gleichungen $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$, $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ darstellen; diess aber sind die Gleichungen, durch welche in Artikel 99 die Coordinaten des Centrums bestimmt wurden und man erkennt, **dass jeder Durchmesser durch das Centrum der Curve geht.** Für die Werthe von θ gleich Null und gleich 90^0 erhellt aus der obigen Gleichung, dass

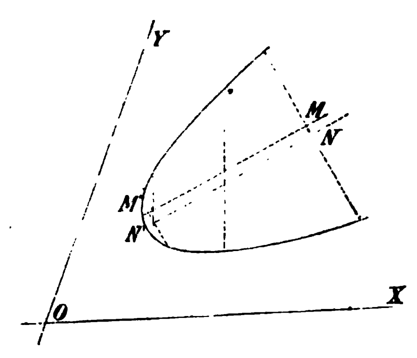
$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$



die Gleichung des Durchmessers ist, welcher die zur Axe x parallelen Sehnen halbirt, und ebenso $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ die Gleichung desjenigen Durchmessers, der die zur Axe y parallelen Sehnen halbirt*).

*) Die Gleichung des Art. 97, die von der Form $a_{22}y = -(a_{12}x + a_{23}) \pm R$ ist, wird am leichtesten construirt, indem man zuerst die gerade Linie $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ darstellt und dann in jeder Ordinate MP derselben über und unter P Strecken PQ, PQ' abträgt, welche gleich R sind; daraus erkennt man, dass $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ jede dieser Ordinaten halbirt.

Für die Parabel ist $a_{12}^2 = a_{11} a_{22}$ oder $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$, also die gerade Linie $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ der Geraden $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$ parallel; daher sind alle Durchmesser der Parabel einander parallel. Ebendiess folgt indessen schon aus der Nothwendigkeit, dass alle Durchmesser eines Kegelschnitts durch das Centrum desselben gehen und daraus, dass im Falle der Parabel eben diess Centrum unendlich entfernt ist; denn parallele Gerade können als solche betrachtet werden, die sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden*).



Das vertraute Beispiel des Kreises reicht hin, dem Anfänger die Natur der Durchmesser der Curven zweiten Grades zu erläutern. Er muss nur bemerken, dass die Durchmesser nicht im Allgemeinen, wie im Fall des Kreises, ihre Ordinaten unter rechten Winkeln durchschneiden. In der Parabel z. B. wo die Richtung der Durchmesser unveränderlich ist, kann die der Ordinaten jede beliebige sein und der Winkel zwischen beiden jeden möglichen Werth annehmen.

101. **Die Durchmesser der Parabel haben dieselbe Richtung, wie die geraden Linien durch den Anfangspunkt der Coordinaten, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneiden.**

Denn die Linien durch den Ursprung, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneiden, sind (Art. 95) durch die Gleichung $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$, oder indem wir für

*) Wenn ein Theil des Kegelschnitts genau verzeichnet ist, so kann man sein Centrum und seine Gattung nach dem Vorigen bestimmen. Denn je zwei parallele Sehnen bestimmen durch ihre Halbirungspunkte einen Durchmesser; in derselben Art erhält man durch zwei andere parallele Sehnen einen zweiten Durchmesser. Sind beide Durchmesser parallel, so ist der Kegelschnitt eine Parabel; schneiden sie sich auf der concaven Seite des Curvenbogens, so ist er eine Ellipse und im entgegengesetzten Falle eine Hyperbel.

a_{12} seinen Werth $\sqrt{(a_{11}a_{22})}$ schreiben, $(x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}})^2 = 0$ ausgedrückt. Aber die Durchmesser sind nach dem letzten Artikel parallel zu $a_{11}x + a_{12}y = 0$, welches, wenn wir für a_{12} denselben Werth schreiben, sich auch auf $x\sqrt{a_{11}} + y\sqrt{a_{22}} = 0$ reducirt. Also schneidet jeder Durchmesser der Parabel die Curve in einem unendlich entfernten Punkte und kann daher nur einen endlichen Punkt mit ihr gemein haben.

102. Wenn zwei Durchmesser eines Kegelschnittes so liegen, dass einer von ihnen alle zu dem andern parallele Sehnen halbirt, so halbirt auch der zweite alle Sehnen, welche dem ersten parallel sind.

Die Gleichung des Durchmessers, welcher die Sehnen halbirt, welche einen Winkel θ mit der Axe x bilden, ist nach Art. 100

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \tan\theta = 0.$$

Nach Art. 21 ist für den Winkel θ', welchen diese Gerade mit der Axe x bildet, $\tan\theta' = -\frac{a_{11} + a_{12}\tan\theta}{a_{12} + a_{22}\tan\theta}$, oder es ist

$a_{22}\tan\theta\tan\theta' + a_{12}(\tan\theta + \tan\theta') + a_{11} = 0$. Die Symmetrie dieser Gleichung in Bezug auf θ, θ' zeigt an, dass die Sehnen, welche mit der Axe x den Winkel θ' bilden, ihrerseits von einem Durchmesser halbirt werden, der mit der Axe x den Winkel θ einschliesst.

Zwei Durchmesser, die so auf einander bezogen sind, dass jeder die zu dem andern parallelen Sehnen halbirt, heissen **conjugirte Durchmesser** *).

Ist in der allgemeinen Gleichung $a_{12} = 0$, so sind die Axen zu einem Paar conjugirter Durchmesser parallel.

Denn der Durchmesser, welcher die zur Axe der x parallelen Sehnen halbirt, wird in diesem Falle $a_{11}x + a_{13} = 0$ und daher zur Axe der y parallel; in gleicher Weise wird der Durchmesser, welcher die zur Axe der y parallelen Sehnen halbirt, in diesem Falle $a_{22}y + a_{23} = 0$ und daher zur Axe der x parallel.

103. Wir haben bemerkt, dass die Ordinaten eines Durchmessers oder der ihm conjugirte Durchmesser im Allgemeinen nicht rechtwinklig zu ihm stehen und untersuchen daher jetzt die

*) Nur die Centralcurven können conjugirte Durchmesser haben, weil bei der Parabel die Richtung aller Durchmesser dieselbe ist.

Frage, welchen Bedingungen ein Paar conjugirte Durchmesser genügen müssen, wenn sie sich rechtwinklig durchschneiden sollen.

Für zwei zu einander rechtwinklige conjugirte Durchmesser hat man nach Art. 25 $\tan\theta' = -\frac{1}{\tan\theta}$, zur Bestimmung von θ also $a_{12}\tan^2\theta + (a_{11} - a_{22})\tan\theta - a_{12} = 0$, eine quadratische Gleichung. $a_{12}\sin^2\theta + (a_{11} - a_{22})\sin\theta\cos\theta - a_{12}\cos^2\theta = 0$ ergiebt $a_{12}\cos 2\theta - \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin 2\theta = 0$, also $\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$. Ist für die betrachtete Curve zweiten Grades gleichzeitig $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, so ist $\tan 2\theta$ eine unbestimmte Grösse, d. h. jeder Durchmesser der Curve ist rechtwinklig zu dem ihm conjugirten; die besondere Curve zweiten Grades, die man so erhält, ist der Kreis.

Geht man für die Gleichung $a_{12}\tan^2\theta + (a_{11} - a_{22})\tan\theta - a_{12} = 0$ zu den Coordinaten x und y zurück, indem man $\varrho\cos\theta$ und $\varrho\sin\theta$ durch x und y in der mit ϱ^2 multiplicirten Gleichung ersetzt, so erhält man $a_{12}x^2 - (a_{11} - a_{22})\,xy - a_{12}y^2 = 0$, nach Art. 87 die Gleichung von zwei zu einander rechtwinkligen Geraden und erkennt daraus, dass jeder Kegelschnitt mit einem Centrum zwei und nur zwei zu einander rechtwinklig conjugirte Durchmesser hat. Wir nennen dieselben die Axen der Curve und die Punkte, in denen sie die Curve schneiden, die Scheitel derselben. Die Entwickelungen des Artikel 88 zeigen überdiess, dass die Gleichung der Axen mit der Gleichung derjenigen beiden geraden Linien übereinstimmt, welche den innern und äussern Winkel zwischen den beiden durch die Gleichung $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ repräsentirten Geraden halbirt. Wir haben im Artikel 95 gesehen, dass jede dieser beiden geraden Linien die Curve in einem unendlich entfernten Punkte schneidet und überdiess in einem Punkte in der Entfernung $\varrho = -\frac{a_{33}}{2(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)}$ vom Anfangspunkt der Coordinaten. Ist dieser Anfangspunkt das Centrum der Curve, so sind (Artikel 99) $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, d. h. der Radius vector auch des zweiten, sonst in endlicher Entfernung gelegenen Schnittpunktes wird unendlich. Durch das Centrum der Curve können demnach zwei gerade Linien gezogen werden, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten in unendlicher Entfernung

treffen. Sie werden **die Asymptoten der Curve** genannt und sind reell im Falle der Hyperbel und imaginär im Falle der Ellipse.

Nach dem Vorigen sind **die Axen der Curve diejenigen Durchmesser derselben, welche die von ihren Asymptoten gebildeten Winkel halbiren**, und sie sind reell, gleichviel ob die Asymptoten reell oder imaginär sind*).

104. Wenn in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades $a_{33} = 0$ ist, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein Punkt der Curve, weil die ihm entsprechenden Werthe $x = 0$, $y = 0$ der Gleichung genügen**). In Uebereinstimmung damit ist eine der Wurzeln der entsprechenden quadratischen Gleichung
$(a_{11}\cos^2\theta + 2\,a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)\,\varrho^2 + 2\,(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)\,\varrho = 0$
immer $\varrho = 0$. Die zweite Wurzel ist ebenfalls $\varrho = 0$, wenn $a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta = 0$ ist, d. h. in diesem Falle schneidet der Radius vector die Curve im Anfangspunkt in zwei zusammenfallenden Punkten. Die Multiplication der Gleichung mit ϱ giebt wegen $\varrho\cos\theta = x$, $\varrho\sin\theta = y$ in $a_{13}\,x + a_{23}\,y = 0$ die Gleichung der geraden Linie, welche mit der Curve im Anfangspunkt der Coordinaten zwei unendlich nahe benachbarte Punkte gemein hat. Man nennt eine solche gerade Linie, welche zwei unendlich nahe Punkte mit der Curve gemein hat, eine **Tangente** derselben und die Vereinigung dieser Punkte den **Berührungspunkt**.

Aufg. 1. Der Punkt (1, 1) ist in der Curve

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0;$$

transformire die Gleichung zu parallelen Axen durch diesen Punkt und finde die Gleichung der Tangente in ihm.

Aufl. Sie ist $9x - 5y = 0$ bezogen zu den neuen Axen und $9(x-1) - 5(y-1) = 0$ bezogen auf die alten.

Durch dasselbe Verfahren kann man die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte $x'y'$ bestimmen.

Wenn man zu parallelen Axen durch den Punkt $x'y'$ transformirt, so verschwindet a_{33}' nach dem Vorigen und die Gleichung der Tangente ist $a_{13}'x + a_{23}'y = 0$ in Bezug auf die neuen

---

*) Vergl. die Schlussbemerkung des Art. 88.

**) Der nämliche Grund beweist, dass die durch eine Gleichung von beliebigem Grade repräsentirte Curve den Anfangspunkt der Coordinaten enthält, wenn sie kein absolutes Glied besitzt.

oder $a_{13}'(x - x') + a_{23}'(y - y') = 0$ in Bezug auf die alten Axen, also nach den Werthen von a_{13}', a_{23}' im Art. 93

$$(x - x')(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}) + (y - y')(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}) = 0.$$

Addirt man auf beiden Seiten die Identität

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0$$

so erhält man die einfachere Form

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23})y + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0$$

oder

$$a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + a_{13}(x + x') + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0.$$

Die nämliche Gleichung wird erhalten, indem man die Gleichung der Verbindungslinie zweier einander unendlich nahe gelegenen Punkte $x'y'$, $x''y''$ der Curve $\dfrac{y - y'}{x - x'} = \dfrac{y' - y''}{x' - x''}$ bildet. Wenn die Punkte $x'y'$, $x''y''$ in der Curve zweiten Grades liegen, so gelten die Relationen

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0,$$

$a_{11}x''^2 + \ldots + a_{33} = 0$ und liefern durch Subtraction

$$a_{11}(x'^2 - x''^2) + 2a_{12}(x'y' - x''y'') + a_{22}(y'^2 - y''^2) + 2a_{13}(x' - x'') + 2a_{23}(y' - y'') = 0;$$

diess geht durch Division mit $(x' - x'')$ über in

$$a_{11}(x' + x'') + 2a_{12}\left(y' + x''\frac{y' - y''}{x' - x''}\right) + a_{22}(y' + y'')\frac{y' - y''}{x' - x''}$$
$$+ 2a_{13} + 2a_{23}\frac{y' - y''}{x' - x''} = 0$$

und giebt für $\dfrac{y' - y''}{x' - x''}$ den Werth

$$-\frac{a_{11}(x' + x'') + 2a_{12}y' + 2a_{13}}{a_{22}(y' + y'') + 2a_{12}x'' + 2a_{23}},$$

also für das Zusammenfallen von $x'y'$ mit $x''y''$ die Gleichung der Tangente

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}},$$

welche auf die vorige Form zurückkommt.

Aufg. 2. Man bestimme die Tangente in (2, 1) zu
$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$.

Aufl. $9x + 10y = 28$.

105. Man kann die Gleichung der geraden Verbindungslinie von irgend zwei Punkten der Curve

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ in der Form

$$a_{11}(x - x')(x - x'') + 2a_{12}(x - x')(y - y'') + a_{22}(y - y')(y - y'')$$
$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

schreiben, in welcher die Glieder vom zweiten Grade in x und y

sich gegenseitig aufheben und die offenbar durch die Coordinaten der beiden Punkte $x'y'$, $x''y''$ befriedigt wird. Indem man $x''=x'$, $y''=y'$ setzt, erhält man die Gleichung der Tangente in der Form $a_{11}(x-x')^2+2a_{12}(x-x')(y-y')+a_{22}(y-y')^2$
$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$
oder $2a_{11}x'x+2a_{12}(x'y+y'x)+2a_{22}y'y+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$
$=a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2$. Addirt man endlich beiderseits die Glieder $2a_{13}x'+2a_{23}y'+a_{33}$ und beachtet, dass x', y' der Gleichung der Curve genügen müssen, so findet man die vorige Form $a_{11}x'x+a_{12}(x'y+y'x)+a_{22}y'y+a_{13}(x+x')+a_{23}(y+y')+a_{33}=0$. Man bemerke, dass dieselbe aus der Gleichung der Curve hervorgeht, indem man die Grössen x^2, y^2, $2xy$ durch xx', yy' und $(x'y+y'x)$ sowie $2x$ und $2y$ durch $x+x'$, $y+y'$ ersetzt.

Aufg. Man bestimme die Gleichungen der Tangenten der Curven $xy=a_{33}{}^2$ und $y^2=px$.

Aufl. $x'y+y'x=2a_{33}{}^2$ und $2y'y=p(x+x')$.

106. Die allgemeine Gleichung der Tangente
$$a_{11}x'x+a_{12}(x'y+y'x)+a_{22}y'y+a_{13}(x'+x)+a_{23}(y'+y)+a_{33}=0$$
drückt eine Relation aus, welche zwischen den Coordinaten xy eines beliebigen Punktes der Tangente und denen des Berührungspunktes $x'y'$ besteht. Wenn wir die Coordinaten des Berührungspunktes als unbekannt und die eines Punktes der Tangente ausser ihm als bekannt ansehen, so wird diess durch den Wechsel der Indices ausgedrückt; aber wir bemerken, dass die vorige Gleichung, als nach x, y und x', y' symmetrisch, dadurch gar nicht verändert wird*). Dieselbe Gleichung also, welche für $x'y'$ als einen in der Curve gelegenen Punkt die Tangente der Curve in diesem Punkte darstellt, repräsentirt für $x'y'$ als einen nicht in der Curve gelegenen Punkt eine gerade Linie, welche durch die Berührungspunkte der reellen oder imaginären Tangenten hindurchgeht, die sich von $x'y'$ an dieselbe ziehen lassen. Diese Linie wird die **Polare des Punktes** $x'y'$ in Bezug auf die Curve zweiten Grades genannt. Der Punkt $x'y'$ heisst ebenso der **Pol dieser Geraden**. Wenn wir x', y' für x, y in die Gleichung der

*) Wenn die Gleichung der Tangente einer Curve im Punkte $x'y'$ ist $xx'^2+yy'^2=r^3$, so liegen die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte $x'y'$ an die Curve gezogenen Tangenten in der Curve $x'x^2+y'y^2=r^3$. Nur in dem Falle der Curven zweiten Grades ist die Gleichung, welche den Ort der Berührungspunkte bestimmt, von derselben Form mit der Gleichung der Tangente.

Polare substituiren, so erhalten wir das nämliche Resultat, wie durch Substitution derselben Werthe in die Gleichung der Curve; diess Substitutionsresultat verschwindet also, wenn $x'y'$ in der Curve selbst liegt. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt geht nur dann durch diesen Punkt, wenn derselbe in der Curve liegt; die Polare desselben ist dann die Tangente der Curve in diesem Punkte. Da die Berührungspunkte der von $x'y'$ ausgehenden Tangenten die Durchschnittspunkte einer geraden Linie mit der Curve sind, so folgt nach Art. 94, dass durch irgend einen Punkt $x'y'$ zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre Tangenten an die Curve gezogen werden können*).

Zusatz. Die Polare des Anfangspunkts der Coordinaten hat die Gleichung $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$.

Diese Linie ist offenbar der Sehne $a_{13}x + a_{23}y = 0$ parallel, welche im Anfangspunkt der Coordinaten halbirt wird (Art. 98) und diese letztere ist eine Ordinate des durch den Anfangspunkt gehenden Durchmessers. Also ist die Polare irgend eines Punktes den Ordinaten des durch ihn gehenden Durchmessers parallel und insbesondere: Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel den Ordinaten dieses Durchmessers. Und da in dem Falle der Centralcurven die Ordinaten irgend eines Durchmessers dem zu ihm conjugirten Durchmesser parallel sind, so erkennen wir, dass die Polare eines Punktes in einem Durchmesser einer Centralcurve zu dem conjugirten Durchmesser parallel ist.

107. Die Gleichung der Curve zweiten Grades in Polarcoordinaten

$$(a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)\varrho^2 + 2(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)\varrho + a_{33} = 0$$

(Art. 95) führt zu den nämlichen Resultaten, wenn man nach den Punkten fragt, in welchen der Radius vector zwei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein hat. Die in ϱ quadratische Gleichung besitzt zwei gleiche Wurzeln, wenn

$$(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)^2 = a_{33}(a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)$$

ist; man erhält also zwei Werthe von θ, d. h. zwei reelle, zu-

*) Man sagt von einer Curve, sie sei von der n^{ten} Classe, wenn durch irgend einen Punkt n Tangenten an die Curve gezogen werden können. Ein Kegelschnitt ist nach den nun gewonnenen Resultaten eine Curve zweiten Grades und zweiter Classe. Bei höheren Curven stimmen in der Regel Grad und Classe nicht überein.

sammenfallende oder imaginäre Tangenten der Curve, die vom Coordinatenanfangspunkt ausgehen.

Multiplicirt man die gefundene Bedingungsgleichung mit ϱ^2, und ersetzt man $\varrho \cos\theta$ und $\varrho \sin\theta$ durch x und y, so erhält man die Gleichung dieses Tangentenpaars in der Form

$$(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)x^2+2(a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23})xy+(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)y^2=0.$$

Stellt man endlich die Bedingung für die Gleichheit der Wurzeln für diese Gleichung auf, so erhält man

$$(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)=(a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23})^2 \text{ oder}$$
$$a_{33}(a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2)=0;$$

d. h. die beiden vom Coordinatenanfangspunkt ausgehenden Tangenten fallen zusammen für $a_{33}=0$, d. i. wenn dieser Punkt der Curve angehört; oder irgend ein Punkt in der Curve ist als der Durchschnittspunkt von zwei zusammenfallenden Tangenten der Curve anzusehen, ebenso wie jede Tangente als die Verbindungslinie von zwei zusammenfallenden Punkten erklärt worden ist. Aber auch für $a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2+a_{33}a_{12}^2-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{23}a_{13}a_{12}=0$; d. h. wenn die Curve auf ein Paar von geraden Linien degenerirt (Art. 89), so ist die einzige Gerade, die sie in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden kann, die nach dem Durchschnittspunkt dieser geraden Linien gezogene, oder beide an eine solche Curve zweiten Grades gehende Tangenten fallen mit dieser Linie zusammen.

Der Werth der unter obiger Bedingung vorhandenen gleichen Wurzeln von

$$(a_{11}\cos^2\theta+2a_{12}\cos\theta\sin\theta+a_{22}\sin^2\theta)\varrho^2+2(a_{13}\cos\theta+a_{23}\sin\theta)\varrho+a_{33}=0$$

ist $\varrho=-\dfrac{a_{33}}{a_{13}\cos\theta+a_{23}\sin\theta}$, oder es gilt für die Berührungspunkte die Relation $\varrho(a_{13}\cos\theta+a_{23}\sin\theta)+a_{33}=0$ oder im Uebergange zu Parallelcoordinaten $a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0$; es ist dieselbe Form der Gleichung der Polare des Coordinatenanfangs, die oben schon gefunden ist. Es sei hier nur noch bemerkt, dass für den Anfangspunkt als Centrum der Curve wegen $a_{23}=0$, $a_{13}=0$ die Gleichung der Polare auf $a_{33}=0$ reducirt wird, welches nach Art. 68 die unendlich entfernte gerade Linie bezeichnet; und dazu erinnert an das Ergebniss des Art. 103, wonach vom Centrum der Curve zwei gerade Linien gezogen werden können, die die Curve in unendlicher Ferne berühren: Die Polare des Centrums — die unendlich entfernte Gerade — ist die Berührungssehne der Asymptoten.

108. Die allgemeine Gleichung des Art. 106

$$a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + a_{13}(x' + x) + a_{23}(y' + y) + a_{33} = 0$$

lässt einige wichtige Eigenschaften der Pole und Polaren erkennen. Wenn ein Punkt A in der Polare von B liegt, so liegt auch B in der Polare von A. Denn die Bedingung, unter welcher der Punkt $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt, ist

$$a_{11}x'x'' + a_{12}(x'y'' + y'x'') + a_{22}y'y'' + a_{13}(x' + x'') + a_{23}(y' + y'') + a_{33} = 0$$

und dieselbe Formel ist auch die Bedingung, unter welcher der Punkt $x'y'$ in der Polare von $x''y''$ liegt. Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Wenn die Polare von B durch einen festen Punkt A geht, so ist der Ort von B die Polare von A; oder die Polare eines Punktes, der längs einer geraden Linie fortschreitet, dreht sich um einen festen Punkt, den Pol dieser Geraden. Die Gleichungsform

$$(a_{11}x'' + a_{12}y'' + a_{13})x' + (a_{12}x'' + a_{22}y'' + a_{23})y' + (a_{13}x'' + a_{23}y'' + a_{33}) = 0$$

(Art. 104) lässt diess in Erinnerung an Art. 51 direct erkennen. Dem Vorigen entspricht die Umkehrung: Der Pol einer Geraden, welche sich um einen festen Punkt dreht, beschreibt eine gerade Linie, die Polare dieses Punktes. Ferner: Der Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien ist der Pol der Geraden, welche ihre Pole verbindet und umgekehrt: Die gerade Verbindungslinie von zwei Punkten ist die Polare des Durchschnittspunktes der Polaren dieser Punkte. Denn wenn man in der Polare von A zwei beliebige Punkte wählt, so durchschneiden sich ihre Polaren in A.

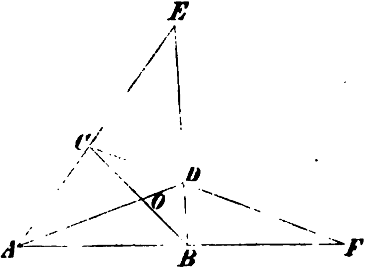
Man beweist ferner den Satz: Wenn zwei aus einem Punkte O gezogene Gerade eine Curve zweiten Grades je in zwei Punkten schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte P und Q der beiden andern Paare von Geraden, welche diese Schnittpunkte verbinden, in der Polare von O. Wenn die beiden festen Geraden die Coordinatenaxen sind und in ihnen durch den Kegelschnitt die Abschnitte λ, λ', μ, μ' bestimmt werden, so sind

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0, \quad \frac{x}{\lambda'} + \frac{y}{\mu'} - 1 = 0;$$

$$\frac{x}{\lambda'} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0, \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu'} - 1 = 0$$

die Gleichungen der beiden Paare von Geraden, welche jene Punkte verbinden. Die Gleichung der Verbindungslinie von P und Q ist aber dann $\frac{x}{\lambda}+\frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu}+\frac{y}{\mu'}-2=0$; denn diese Gerade geht nach Artikel 40 ebenso durch den Durchschnittspunkt von $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}-1=0$, $\frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu'}-1=0$ als auch durch den von $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu'}-1=0$, $\frac{x}{\lambda'}+\frac{y}{\mu}-1=0$. Aus der Gleichung des Kegelschnitts $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ bestimmen sich endlich die Parameter λ, λ'; μ, μ' als Wurzeln der Gleichungen $a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33}=0$, $a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0$ respective, man hat also $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}=-\frac{2a_{13}}{a_{33}}$, $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}=-\frac{2a_{23}}{a_{33}}$ und somit die Gleichung von PQ $a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0$, nach Artikel 106 die Gleichung der Polare des Anfangspunktes O. Wenn also der Punkt O gegeben ist und die beiden durch ihn gehenden Geraden veränderlich gedacht werden, so ist der Ort der Punkte P und Q die Polare des Punktes O.

Wenn beide Linien zusammenfallen, so entsteht als ein Specialfall der Satz: Wenn durch einen Punkt O eine Gerade OR gezogen wird, so schneiden sich die Tangenten der Curve in den Punkten R' und R'' in der Polare von O. Dieselbe Eigenschaft geht auch aus den Ergebnissen des Art. 106 hervor; denn weil $R'R''$, die Polare von P, durch O geht, so muss P in der Polare von O liegen. Man kann hiernach die Polare eines Punktes als den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangentenpaare der Curve definiren, welche in den Endpunkten der durch ihn gehenden Sehnen an dieselbe gezogen werden können. Die Definitionen dieses Artikels sind unabhängig von der Lage des Pols gegen den Kegelschnitt.



Das Resultat der Aufgabe 7 des Art. 48 erscheint als ein specieller Fall des Vorigen, entsprechend der Degeneration des Kegelschnitts in zwei gerade Linien.

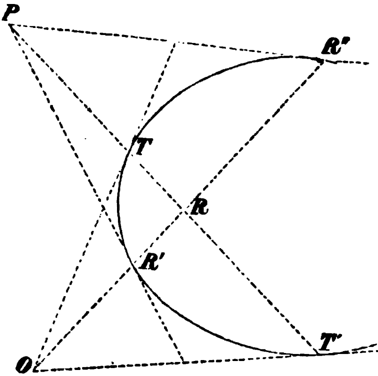
Aufg. 1. Wenn ein Viereck $ABCD$ einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so ist jeder der

Punkte E, F, O der Pol der geraden Linie, welche die beiden andern Punkte verbindet.

Aufl. Da EC, ED zwei durch den Punkt E gezogene Gerade sind, und CD, AB das eine Paar der Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte mit der Curve, AD und CB aber das andere Paar derselben sind, so liegen die respectiven Schnittpunkte F und O dieser Paare in der Polare von E in Bezug auf den Kegelschnitt. Ebenso beweist man den Satz für die beiden andern Paare von Pol und Polare.

Aufg. 2. Man soll an einen Kegelschnitt mit Hilfe des Lineals allein die Tangenten aus einem beliebigen Punkte E seiner Ebene ziehen.

Aufl. Man zieht durch den gegebenen Punkt E zwei den Kegelschnitt schneidende Gerade ECA, EDB und vervollständigt das Viereck $ABCD$ wie in der Figur; so ist OF die Polare von E und bestimmt also mit dem Kegelschnitt zwei Schnittpunkte, welche durch Verbindung mit E die gesuchten Tangenten liefern.



109. Wenn in einem durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogenen Radius vector das harmonische Mittel OR zwischen den durch die Curve in ihm bestimmten Abschnitten OR', OR'' genommen wird, so ist der Ort von R die Polare des Anfangspunktes.

Die Radien vectoren OR', OR'' sind nach Art. 95 als Wurzeln der Gleichung

$$(a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta)\varrho^2 + 2(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)\varrho + a_{33} = 0$$

bestimmt und man erhält daher nach der Theorie der Gleichungen

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OR'} + \frac{1}{OR''} = -\frac{2\,(a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta)}{a_{33}}$$

und bei Ersetzung von $OR\cos\theta$ durch x und von $OR\sin\theta$ durch y als Gleichung des Ortes von R $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$, nach Art. 105 die Polare des Anfangspunktes. Also wird in jeder durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogenen Geraden die zwischen den Durchschnittspunkten mit der Curve enthaltene Strecke durch ihn und den Schnittpunkt derselben mit seiner Polare harmonisch getheilt.

Endlich ergiebt sich, dass eine Gerade OR mit den beiden von O ausgehenden Tangenten OT, OT' des Kegelschnitts und

der Geraden OP, welche den Punkt O mit dem Pol P von OR verbindet, ein harmonisches Büschel bildet. Denn da OR die Polare von P ist, so ist die Gruppe von Punkten P, T, R, T' harmonisch und die Geraden OP, OT, OR, OT' bilden somit ein harmonisches Büschel.

Aufg. Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt ungeschrieben ist, so ist jede Diagonale die Polare des Durchschnittspunktes der beiden andern Diagonalen.

Aufl. Wir beweisen diesen Satz, wie auch der der Aufg. 1 im Art. 108 bewiesen werden konnte, mittelst der harmonischen Eigenschaften des Vierecks. In Art. 60, Aufg. 1 ist gezeigt worden, dass die Linien EA, EO, EB, EF ein harmonisches Büschel bilden. Weil also EA, EB nach der Voraussetzung zwei Tangenten eines Kegelschnitts sind und EF eine Gerade durch ihren Schnittpunkt ist, so muss nach dem Vorigen EO auch durch den Pol von EF gehen, aus demselben Grunde FO durch den Pol von EF; daher muss O dieser Pol sein.

110. Der Hauptsatz des vorigen Art. und mit ihm ein grosser Theil der vorgetragenen Theorie kann auch durch ein Verfahren abgeleitet werden, welches aus dem im Art. 42 angewendeten hervorgeht. Wir können das Verhältniss suchen, in welchem die Verbindungslinie zweier Punkte durch die Curve geschnitten wird. Nach Artikel 7 hat jeder Punkt in der geraden Verbindungslinie zweier Punkte $x'y'$ und $x''y''$, welchem das Theilungsverhältniss $l:m$ entspricht, die Coordinaten $\dfrac{lx''+mx'}{l+m}$, $\dfrac{ly''+ly'}{l+m}$; wenn diese Werthe für x und y in die Gleichung der Curve eingesetzt werden, so ergiebt sich zur Bestimmung des Theilungsverhältnisses, in welchem die Verbindungslinie der Punkte $x'y'$ und $x''y''$ durch die Curve geschnitten wird, die quadratische Gleichung

$$l^2(a_{11}x''^2+2a_{12}x''y''+a_{22}y''^2+2a_{13}x''+2a_{23}y''+a_{33})+$$
$$2lm\{a_{11}x'x''+a_{12}(x'y''+x''y')+a_{22}y'y''+a_{13}(x'+x'')+a_{23}(y'+y'')+a_{33}\}$$
$$+m^2(a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2a_{13}x'+2a_{23}y'+a_{33})=0.$$

Wenn nun $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt, so verschwindet der Coefficient von lm, die linearen Factoren der Gleichung sind von der Form $l \pm \mu m$ und die Verbindungslinie der Punkte $x'y'$ und $x''y''$ wird durch die Curve harmonisch getheilt.

Dieselbe Gleichung erlaubt uns, die Gleichung der beiden Tangenten zu bilden, welche man von irgend einem Punkte aus an die Curve ziehen kann. Denn wenn $x''y''$ in einer der Tangenten durch $x'y'$ liegt, so muss die Gleichung für $l:m$ gleiche

Wurzeln haben und $x'' \; y''$ muss daher der Gleichung genügen:

$$(a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}) \times$$
$$(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33})$$
$$= \{a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + a_{13}(x' + x) + a_{23}(y' + y) + a_{33}\}^2.$$

Für $x' = y' = 0$ entspringt daraus die Gleichung des vom Anfangspunkt der Coordinaten ausgehenden Tangentenpaars in der Form (Art. 107)

$$a_{33}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}) = (a_{13}x + a_{23}y + a_{33})^2$$
oder $(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x^2 + 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})xy + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)y^2 = 0.$

111. Wenn durch irgend einen Punkt O zwei Sehnen gezogen werden, die die Curve in den Punkten R', R''; S', S'' schneiden, so ist das Verhältniss $\frac{OR'.OR''}{OS'.OS''}$ der Rechtecke aus den durch die Curve gebildeten Abschnitten dieser Sehnen für jede Lage des Punktes O das nämliche, sobald die Richtungen der Sehnen OR, OS dieselben bleiben.

Denn aus der zur Bestimmung von ϱ in Artikel 95 gegebenen Gleichung folgt,

$$OR'.OR'' = \frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta}.$$

In gleicher Art ist

$$OS'.OS'' = \frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\theta' + 2a_{12}\cos\theta'\sin\theta' + a_{22}\sin^2\theta'}, \text{ also}$$
$$\frac{OR'.OR''}{OS'.OS''} = \frac{a_{11}\cos^2\theta' + 2a_{12}\cos\theta'\sin\theta' + a_{22}\sin^2\theta'}{a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta}.$$

Da aber die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} in der allgemeinen Gleichung unverändert bleiben, wenn die Axen nach einem neuen Anfangspunkt verlegt werden (Art. 93) und θ, θ' constant sind, so lange die Radien vectoren ihre Richtung beibehalten, so ist die Unveränderlichkeit des Verhältnisses $\frac{OR'.OR''}{OS'.OS''}$ unter den ausgesprochenen Voraussetzungen bewiesen.

Der Satz dieses Artikels kann auch so ausgesprochen werden: Wenn durch zwei feste Punkte O und O' irgend zwei parallele Linien OR und $O'\varrho$ gezogen werden, so ist das Verhältniss der Rechtecke $\frac{OR'.OR''}{O'\varrho'.O'\varrho''}$ constant, welches auch die Richtung dieser Linien sei.

Denn diese Rechtecke sind

$$\frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta} \text{ und } \frac{a_{33}'}{a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta},$$

wenn a_{33}' der Werth ist, welchen das absolute Glied der allgemeinen Gleichung annimmt, indem man den Anfangspunkt der Coordinaten von O nach O' verlegt.

Das Verhältniss dieser Rechtecke ist daher $= \frac{a_{33}}{a_{33}'}$, und daher von θ unabhängig. Dieser Satz ist die Verallgemeinerung der Sätze 35, 36 im 3. Buch des Euklid.

112. Das Theorem des vorigen Artikels schliesst verschiedene specielle Fälle ein, welche getrennt anzuzeigen nützlich ist.

I. Ist O' das Centrum der Curve, so ist $O'\varrho' = O'\varrho''$ und die Grösse $O'\varrho'$, $O'\varrho''$ wird das Quadrat des zu OR' parallelen Halbdurchmessers. Also verhalten sich die Rechtecke aus den Abschnitten zweier sich schneidender Sehnen zu einander, wie die Quadrate der zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser.

II. Wäre die Linie OR eine Tangente, so ist $OR' = OR''$ und die Grösse $OR' . OR''$ wird das Quadrat der Tangente; und weil zwei Tangenten durch den Punkt O gezogen werden können, so können wir aus dem eben gefundenen Verhältniss die Quadratwurzel ausziehen und schliessen, dass die Längen zweier durch einen Punkt gezogenen Tangenten sich zu einander verhalten, wie die Längen der Durchmesser, zu welchen sie parallel sind

III. Sei die Linie OO' ein Durchmesser und OR, $O'\varrho$ parallel zu seinen Ordinaten, so ist $OR' = OR''$ und $O'\varrho' = O'\varrho''$. Schneide der Durchmesser die Curve in den Punkten A, B, so ist

$$\frac{OR^2}{AO\,.\,OB} = \frac{O'\varrho^2}{AO'\,.\,O'B},$$

d. h. die Quadrate der Ordinaten irgend eines Durchmessers sind den Rechtecken aus den Segmenten proportional, welche sie im Durchmesser bestimmen.

113. Es giebt aber einen Fall, in welchem der Satz des Artikels 111 nicht länger gültig bleibt, nämlich, wenn die Linie OS parallel zu einer von den Linien ist, die die Curve im Unendlichen schneiden. Das Segment OS'' ist dann unendlich und OS schneidet die Curve nur in einem endlichen Punkt. Wir

prüfen im gegenwärtigen Artikel die naheliegende Vermuthung, ob in diesem Falle das Verhältniss $\frac{OS'}{OR'.OR''}$ constant ist. Nehmen wir zur grössern Einfachheit die Linie OS zur Axe der x und die Linie OR zur Axe der y. Weil die Axe der x parallel zu einer der Linien ist, die die Curve im Unendlichen schneiden, so ist $a_{11}=0$ (Art. 97, Aufg. 3) und die Gleichung der Curve demnach von der Form $2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$.

Indem wir $y=0$ machen, wird der Abschnitt in der Axe der x gefunden $OS'=-\frac{a_{33}}{2a_{13}}$ und indem wir $x=0$ machen, das Rechteck unter den Abschnitten in der Axe der $y=\frac{a_{33}}{a_{22}}$. Also ist $\frac{OS'}{OR'.OR''}=-\frac{a_{22}}{2a_{13}}$. Wenn wir nun die Axen zu irgend andern parallelen Axen transformiren (Art. 93), so bleibt a_{22} unverändert und das neue a_{13} wird $=a_{12}y'+a_{13}$. Also verändert sich jenes Verhältniss $-\frac{a_{22}}{2a_{13}}$ in $-\frac{a_{22}}{2(a_{12}y'+a_{13})}$. Wenn die Curve aber eine Parabel ist, so ist $a_{12}=0$ und das Verhältniss ist constant; d. h. **wenn in einer Parabel eine gerade Linie irgend einen Durchmesser schneidet, so ist das Rechteck unter den in ihr bestimmten Segmenten zu dem durch sie im Durchmesser gebildeten Abschnitt in constantem Verhältniss, so lange ihre Richtung dieselbe bleibt.**

Wenn die Curve eine Hyperbel ist, so ist das Verhältniss nur constant, solange y' constant ist. **Also sind die durch zwei parallele Sehnen einer Hyperbel in einer Parallelen zu einer Asymptote gebildeten Abschnitte proportional den Rechtecken unter den Segmenten der Sehnen.**

*114. **Die Bedingung zu finden, unter welcher die gerade Linie $\xi x+\eta y+\zeta=0$ den durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt berührt.** Indem wir für y aus $\xi x+\eta y+\zeta=0$ auflösen und in die allgemeine Gleichung einsetzen, finden wir die Abscissen der Punkte, wo diese Linie den Kegelschnitt schneidet, durch die Gleichung bestimmt

$$(a_{11}\eta^2-2a_{12}\xi\eta+a_{22}\xi^2)x^2+2(a_{13}\eta^2-a_{12}\eta\zeta-a_{23}\eta\xi+a_{22}\xi\zeta)x$$
$$+(a_{33}\eta^2-2a_{23}\eta\zeta+a_{22}\zeta^2)=0.$$

Wenn die gerade Linie den Kegelschnitt berührt, so muss diese quadratische Gleichung gleiche Wurzeln haben, oder die Bedingung $(a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^2)(a_{33}\eta^2 - 2a_{23}\eta\zeta + a_{22}\zeta^2) = (a_{13}\eta^2 - a_{12}\eta\zeta - a_{23}\eta\xi + a_{22}\xi\zeta)^2$ erfüllt sein. Indem wir ausmultipliciren, wird diese Gleichung durch η^2 dividirbar und kann geordnet werden, wie folgt:

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2)\,\xi^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}{}^2)\,\eta^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2)\,\zeta^2 + 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\,\eta\zeta + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\,\zeta\xi + 2(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})\,\xi\eta = 0.$$

Wir werden später andere Methoden zur Bildung dieser Gleichung angeben, die als die Tangentialgleichung des Kegelschnitts $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ bezeichnet werden kann, weil jede Tangente desselben durch die Coefficienten ihrer Gleichung ξ, η, ζ oder durch ihre Parameterverhältnisse sie befriedigen muss. Zur Abkürzung ihres Ausdrucks schreiben wir sie zuweilen in der Form

$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{13}\xi\zeta + 2A_{12}\xi\eta = 0$, welche ganz der Form $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy = 0$ entspricht, und in welcher man die Coefficienten $A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2$, $A_{22} = a_{33}a_{11} - a_{13}{}^2$, etc. am einfachsten durch folgende Regel erhält: Sei $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}{}^2 - a_{22}a_{13}{}^2 - a_{33}a_{12}{}^2$, die im Vorigen mehrfach aufgetretene Function, welche man die Discriminante der Gleichung zweiten Grades zu nennen pflegt, so sind die A_{ij} die den Elementen derselben entsprechenden Unterdeterminanten; oder es ist A_{11} die derivirte Function von Δ in Bezug auf a_{11} als Veränderliche, A_{22} in Bezug auf a_{22}; A_{33}, $2A_{23}$, $2A_{13}$, $2A_{12}$ sind die derivirten Functionen von Δ in Bezug auf a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{12}.

Aufg. 1. Die Gleichung des Kegelschnitts zu finden, welcher die Abschnitte λ, λ', μ, μ' in den Axen bildet.

Die Abschnitte in den Axen sind durch die quadratischen Gleichungen gegeben $x^2 - (\lambda + \lambda')\,x + \lambda\lambda' = 0$, $y^2 - (\mu + \mu')\,y + \mu\mu' = 0$. Diese sind aber das, was die allgemeine Gleichung wird, wenn man darin $y = 0$, $x = 0$ macht, es ist also diese Gleichung

$\mu\mu'x^2 + 2a_{12}xy + \lambda\lambda'y^2 - \mu\mu'(\lambda + \lambda')\,x - \lambda\lambda'(\mu + \mu')\,y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0$, wo a_{12} unbestimmt bleibt, so lange nicht noch eine weitere Bedingung gegeben ist. So z. B. können zwei Parabeln durch die vier Punkte gelegt werden, da dann $a_{12} = \pm\sqrt{(\lambda\lambda'\mu\mu')}$ sein muss.

Aufg. 2. Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so geht die Polare eines festen Punktes durch einen festen Punkt.

Nehmen wir zwei Gegenseiten des durch die Punkte gebildeten Vier-

ecks zu Axen, bilden dann nach Art. 106 die Gleichung der Polare des Punktes $x'y'$ in Bezug auf den Kegelschnitt, so enthält dieselbe die unbestimmte Grösse a_{12} im ersten Grad und die Polare geht daher immer durch einen festen Punkt. Wenn vier dieser Kegelschnitte betrachtet werden, so kann man aus den Gleichungen der vier Polaren, welche dem gewählten Punkte in Bezug auf dieselben entsprechen, das Doppelverhältniss des von ihnen gebildeten Büschels ableiten. Man findet es unabhängig von den Coördinaten dieses Punktes. Man darf darnach von dem Doppelverhältniss von vier Kegelschnitten sprechen, sofern sie durch dieselben vier Punkte gehen.

Aufg. 3. Finde den Ort des Centrums eines Kegelschnitts, der durch vier gegebene Punkte geht.

Das Centrum des Kegelschnitts in Beisp. 1 ist durch die Gleichungen gegeben $2\mu\mu' x + 2a_{12}y - \mu\mu'(\lambda+\lambda') = 0$, $2\lambda\lambda' y + 2a_{12}x - \lambda\lambda'(\mu+\mu') = 0$.

Eliminiren wir a_{12}, so ist der Ort

$$2\mu\mu' x^2 - 2\lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda+\lambda')x + \lambda\lambda'(\mu+\mu')y = 0,$$

ein Kegelschnitt, welcher durch den Durchschnittspunkt jedes der 3 Linienpaare geht, welche durch die vier Punkte gezogen werden, und durch die Mittelpunkte dieser Linien. Der Ort ist eine Hyperbel, wenn λ, λ' und μ, μ' beide entweder gleiche oder beide ungleiche Vorzeichen haben, und er ist eine Ellipse im entgegengesetzten Falle. Wenn also die zwei Punkte der einen Axe auf derselben Seite des Anfangspunktes und die der andern Axe auf entgegengesetzten Seiten desselben liegen, so ist die Curve eine Ellipse; d. h. wenn das durch die vier Punkte gebildete Viereck einen einspringenden Winkel hat. Diess ist auch geometrisch evident, denn ein Viereck mit einem einspringenden Winkel kann nicht in eine elliptische oder parabolische Linie eingeschrieben werden; der umgeschriebene Kegelschnitt muss eine Hyperbel sein, deren entgegengesetzten Aesten die Punkte angehören. Und da das Centrum einer Hyperbel nie unendlich entfernt sein kann, so muss der Ort der Centra in diesem Falle eine Ellipse sein. Im andern Falle sind zwei Lagen des Centrums in unendlicher Ferne, entsprechend den beiden Parabeln, welche durch die gegebenen Punkte gehen.

Siebentes Kapitel.

Der Kreis.

115. Wir haben im Artikel 103 den Kreis als diejenige Curve zweiten Grades bezeichnet, in welcher jeder Durchmesser auf seinem conjugirten rechtwinklig ist, und die Coefficientengleichheit $a_{11} = a_{22}$ als die analytische Bedingung dieser Eigenthüm-

lichkeit erkannt. In Folge dessen ist seine allgemeine Gleichung unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

Für rechtwinklige Axen, als welche zu einem Paare conjugirter Durchmesser parallel sind, verschwindet das Glied $2a_{12}xy$ und die allgemeine Gleichung geht über in

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Wählen wir endlich das Centrum der Curve zum Anfangspunkt der Coordinaten, so verschwinden die Glieder $2a_{13}x$ und $2a_{23}y$, und die allgemeine Gleichung reducirt sich auf

$$a_{11}(x^2 + y^2) + a_{33}' = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = -\frac{a_{33}'}{a_{11}}.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass das Centrum des Kreises nicht allein der Halbirungspunkt aller durch dasselbe gezogenen Sehnen des Kreises ist, sondern auch weiter, dass alle Punkte des Kreises vom Centrum gleichweit entfernt sind; denn $x^2 + y^2$ ist das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes (xy) der Curve vom Coordinatenanfang und der Werth derselben ist einer Constanten gleich. Diese geradlinige Entfernung aller Punkte der Kreislinie vom Centrum heisst der Radius des Kreises und soll in den folgenden Entwicklungen stets durch r bezeichnet werden.

116. Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Centrum der Punkt $\alpha\beta$ und dessen Radius r ist.

Indem wir ausdrücken, dass die Entfernung eines beliebigen Punktes x, y der Curve vom Centrum dem Radius gleich ist, erhalten wir für rechtwinklige Coordinaten: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, und für schiefwinklige $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega = r^2$ als Gleichung des Kreises*). Daraus ergiebt sich als Gleichung eines Kreises, dessen Centrum der Anfangspunkt der Coordinaten ist, $x^2 + y^2 = r^2$. Ist die Axe der x ein Durchmesser des Kreises und die Axe der y die in einem seiner Endpunkte auf ihm errichtete Senkrechte, so geht die allgemeine Gleichung durch die Substitution $\alpha = r$, $\beta = 0$ für rechtwinklige Coordinaten (vergl. Artikel 104) in $x^2 + y^2 = 2rx$ über. Diese einfachsten

*) Da von schiefwinkligen Axen in der Theorie des Kreises selten Gebrauch zu machen ist, so werden wir im Folgenden zumeist nur die Gleichungen für rechtwinklige Axen berücksichtigen.

Formen der Kreisgleichung kommen in den Anwendungen am häufigsten vor.

Durch Vergleichung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit den allgemeinen Formen der Kreisgleichung erhalten wir die Bedingungen, unter welchen jene einen Kreis repräsentirt, wir folgt. Für rechtwinklige Coordinaten $a_{12}=o$, $a_{11}=a_{22}$ und für schiefwinklige Coordinaten $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=a_{11}\cos\omega$.

117. Wenn im ersteren Falle eine quadratische Gleichung den aufgestellten Bedingungen entspricht, so bringt man sie auf die Form $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ durch ein der Auflösung quadratischer Gleichungen ganz analoges Verfahren. Man macht den Coefficienten von x^2 und y^2 der Einheit gleich durch Division der Gleichung mit demselben, vereinigt dann die Glieder mit x und y auf der linken und setzt das absolute Glied auf die rechte Seite, vervollständigt endlich die Quadrate durch Addition der Quadrate der halben Coefficienten von x und y auf beiden Seiten der Gleichung.

Aufg. Man reducire die Gleichungen
$x^2+y^2-2x-4y=20$, $3x^2+3y^2-5x-7y+1=0$
auf die Form $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$.

Aufl. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$; $(x-\frac{5}{6})^2+(y-\frac{7}{6})^2=\frac{62}{36}$. Die Coordinaten des Centrums und der Halbmesser sind im ersten Falle $(1, 2)$ und 5; im zweiten $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$ und $\frac{1}{6}\sqrt{62}$.

Wenn man die Gleichung $a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ in derselben Weise behandelt, so erhält man

$$\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2=\frac{a_{13}^2+a_{23}^2-a_{11}a_{33}}{a_{11}^2};$$

die Coordinaten des Centrums sind $\frac{-a_{13}}{a_{11}}$, $\frac{-a_{23}}{a_{11}}$ und der Radius ist $\frac{1}{a_{11}}\sqrt{(a_{13}^2+a_{23}^2-a_{11}a_{33})}$. Wenn $a_{13}^2+a_{23}^2$ kleiner ist als $a_{11}a_{33}$, so ist der Radius des Kreises imaginär und die mit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+r^2=0$ äquivalente Gleichung kann durch keine reellen Werthe von x und y befriedigt werden.

Ist $a_{13}^2+a_{23}^2=a_{11}a_{33}$, so ist der Radius Null und die Gleichung als mit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$ äquivalent wird durch keinen andern Werth von x und y als durch α und β befriedigt. Man ist versucht, die Gleichung in diesem Falle als die Gleichung des Punktes $\alpha\beta$ zu bezeichnen; aber aus den im Art. 78 gegebenen Gründen ziehen wir vor, sie als die G l e i c h u n g eines

unendlich kleinen Kreises zu bezeichnen, der diesen Punkt zum Centrum hat. Im Art. 86 ist auch gezeigt, dass sie als die Gleichung von zwei imaginären geraden Linien $(x-\alpha) \pm (y-\beta)i = 0$*) durch den Punkt $\alpha\beta$ anzusehen ist. In derselben Weise kann die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ eben so wohl als Gleichung eines unendlich kleinen Kreises aus dem Anfangspunkt der Coordinaten wie als Gleichung der beiden imaginären geraden Linien $x \pm yi = 0$ angesehen werden. Für die Gleichung des Kreises in schiefwinkligen Coordinaten erhält man zur Bestimmung der Coordinaten des Centrums und des Radius die Bedingungsgleichungen

$$\alpha + \beta \cos\omega = -\frac{a_{13}}{a_{11}},\ \beta + \alpha\cos\omega = -\frac{a_{23}}{a_{11}},\ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\omega - r^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}.$$

Da α und β aus den beiden ersten Gleichungen allein bestimmt sind, welche a_{33} nicht enthalten, so sind zwei Kreise concentrisch, deren Gleichungen nur im constanten Gliede von einander abweichen.

In der Untersuchung der Eigenschaften des Kreises ziehen wir es vor, auch solche unter ihnen, welche aus den allgemeinen Entwickelungen des vorigen Kapitels leicht als specielle Fälle hergeleitet werden könnten, unabhängig von denselben auf dem Wege zu entwickeln, welcher durch die besondere Natur des Kreises sich empfiehlt; die angedeutete Ableitung aus den allgemeinen Eigenschaften der Curve zweiten Grades überlassen und empfehlen wir dem Leser als eine vorzüglich nützliche Uebung.

118. Die Coordinaten der Punkte zu finden, in denen eine gegebene gerade Linie einen gegebenen Kreis schneidet.

Sei die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ und die der geraden Linie $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$. Indem wir die Werthe von y aus beiden entwickeln und mit einander vergleichen, erhalten wir zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{p - x\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

oder durch Reduction $r^2 - 2px\cos\alpha + p^2 - r^2\sin^2\alpha = 0$;

also $$x = p\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{(r^2 - p^2)}.$$

Ebenso bestimmt sich $y = p\sin\alpha \mp \cos\alpha\sqrt{(r^2 - p^2)}$.

Der Leser mag, indem er diese Werthe in die gegebenen

*) Das Zeichen i steht für $\sqrt{-1}$.

Gleichungen substituirt, sich selbst überzeugen, dass das negative Zeichen in dem Werth von y dem positiven in dem Werth von x entspricht und umgekehrt.)

Weil wir eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von x oder y erhalten, so müssen wir, um unsere Sprache mit der Sprache der Algebra übereinstimmend zu machen, behaupten, dass jede gerade Linie einen Kreis in zwei Punkten schneidet. Wir unterscheiden die drei Fälle dieser Auflösung:

1.) Wenn p, d. h. die Entfernung der geraden Linie vom Centrum des Kreises, kleiner ist als der Radius, so erhalten wir zwei reelle Werthe für x und y, und die gerade Linie schneidet den Kreis in zwei reellen Punkten.

2.) Wenn $p = r$ d. h. die Entfernung der geraden Linie vom Centrum gleich dem Radius ist, so führt die Analysis zu dem geometrisch wohlbekannten Ergebnisse, dass die gerade Linie eine Tangente des Kreises ist; denn die zwei Werthe von x sind in diesem Falle gleich, und ebenso die zwei Werthe von y. Die beiden Durchschnittspunkte fallen in einen einzigen zusammen, und die Tangente wird als die gerade Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte der Curve betrachtet.

3.) Sei p grösser als r. In diesem Falle ist es gebräuchlich zu sagen, dass die gerade Linie den Kreis nicht schneidet. Aber die Analysis ersetzt die reellen Werthe für x und y durch imaginäre Werthe, und wir finden es daher passender, zu sagen, dass in diesem Falle die gerade Linie den Kreis in zwei imaginären Punkten schneidet. (Vergl. Art. 94).

Wenn die gerade Linie durch $Ax + By + C = 0$ gegeben ist, so führt die nämliche Elimination und Auflösung einer Gleichung zweiten Grades zur Bestimmung der Durchschnittspunkte.

Aufg. 1. Finde die Coordinaten des Durchschnitts von
$$x^2 + y^2 = 65 \text{ und } 3x + y = 25.$$

Aufl. (7, 4) und (8, 1).

Aufg. 2. Finde den Durchschnitt von $(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2$ mit $4x + 3y = 35c$.

Aufl. Die Linie berührt im Punkte $(5c, 5c)$.

Aufg. 3. Wenn berührt die gerade Linie $y = mx + b$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$?

Aufl. Wenn $b^2 = r^2(1 + m^2)$ ist.

Aufg. 4. Wenn berührt eine durch den Anfangspunkt der Coordi-

naten gehende Gerade $y = mx$ den Kreis

$$a_{11}(x^2 + 2xy \cos\omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0?$$

Aufl. Die Schnittpunkte einer solchen Geraden mit dem Kreise sind durch die Gleichung $a_{11}(1+2m\cos\omega+m^2)x^2+2(a_{13}+a_{23}m)x+a_{33}=0$ gegeben, welche gleiche Wurzeln hat, wenn

$$(a_{13}+a_{23}m)^2 = a_{11}a_{33}(1+2m\cos\omega+m^2)$$

ist. Man hat also eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von m.

Aufg. 5. Finde die Tangenten vom Anfangspunkt der Coordinaten an den Kreis $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.

Aufl. $x - y = 0$, $x + 7y = 0$.

119. Zur Bestimmung der Lage eines Kreises, der durch eine gegebene Gleichung repräsentirt wird, ist es oft ebenso zweckmässig, die in den Axen erzeugten Abschnitte zu ermitteln, als Centrum und Radius zu suchen. Denn ein Kreis ist durch drei Punkte seiner Peripherie bestimmt und die Angabe der vier Punkte, in denen er die Axen schneidet, genügt daher zur Fixirung seiner Lage. Durch die Substitution $y = 0$, $x = 0$ erhält man die Gleichungen $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$, $a_{11}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ für diese Schnittpunkte und erkennt daraus z. B. dass die Axe der x den Kreis berührt für $a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$ und die Axe der y für $a_{23}^2 = a_{11}a_{33}$. Soll umgekehrt ein Kreis in der Axe der x die Abschnitte λ, λ' bestimmen, so können wir $a_{11} = 1$ wählen und müssen $2a_{13} = -(\lambda + \lambda')$, $a_{33} = \lambda\lambda'$ haben. Damit zugleich die Abschnitte in der Axe y gleich μ, μ' respective sind, muss $2a_{23} = -(\mu + \mu')$, $a_{33} = \mu\mu'$ sein. Man erkennt daraus, dass $\lambda\lambda' = \mu\mu'$ sein muss. (Euklid, III. 36.)

Aufg. 1. In welchen Punkten schneidet der Kreis

$$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0 \text{ die Axen?}$$

Aufl. In $x = 3$, $x = 2$; $y = 6$, $y = 1$.

Aufg. 2. Welches ist die Gleichung des Kreises, der die Axen in Abständen $= a$ vom Anfangspunkt berührt?

Aufl. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$.

Aufg. 3. Man soll die Gleichung eines Kreises so bestimmen, dass die eine der Axen eine Tangente, die andere eine durch den Berührungspunkt gehende beliebige Gerade sei. Man hat hier $\lambda = \lambda' = \mu = 0$ und erkennt aus der Figur leicht, dass $\mu' = 2r \sin\omega$ ist, erhält somit die fragliche Gleichung $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2ry\sin\omega = 0$.

120. **Die Gleichung der Tangente zu finden, welche im Punkte $x'\,y'$ an einen gegebenen Kreis gezogen werden kann.**

Weil die Tangente (Art. 118, 104) als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte in der Curve definirt worden ist, so wird

ihre Gleichung gefunden, indem man zuerst die Gleichung der geraden Linie bildet, welche irgend zwei Punkte $x'y'$, $x''y''$ in der Curve verbindet und dann in dieser Gleichung $x'=x''$, $y'=y''$ macht. In Anwendung dieses Grundgedankens auf den Kreis lassen wir zuerst das Centrum den Anfangspunkt der Coordinaten sein, so dass die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist.

Die Gleichung der Verbindungslinie von irgend zwei Punkten $x'y'$ und $x''y''$ ist (Art. 29) $\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y'-y''}{x'-x''}$.

Da die beiden Punkte $x'y'$, $x''y''$ der Kreisperipherie angehören, so ist: $r^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$, also $x'^2 - x''^2 = y''^2 - y'^2$ und $\frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{x'+x''}{y'+y''}$; also $\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{x'+x''}{y'+y''}$ die Gleichung der Sehne und durch die Voraussetzung $x'=x''$, $y'=y''$ die Gleichung der Tangente $\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{x'}{y'}$, oder durch Reduction und mit Hilfe der Bemerkung, dass $x'^2 + y'^2 = r^2$ ist, $xx' + yy' = r^2$. Oder die Gleichung der Verbindungslinie von zwei Punkten eines Kreises ist $(x-x')(x-x'') + (y-y')(y-y'') = x^2 + y^2 - r^2$; denn sie ist die Gleichung einer Geraden, da die Glieder x^2 und y^2 sich aufheben, und sie ist für $x=x'$, $y=y'$ erfüllt, da dann die linke Seite identisch und die rechte als für einen Punkt des Kreises verschwindet; ebenso ist sie für $x=x''$, $y=y''$ befriedigt. Aus dieser Gleichung einer Sehne entspringt für $x'=x''$, $y'=y''$ die Gleichung der Tangente $(x-x')^2 + (y-y')^2 = x^2 + y^2 - r^2$ oder in reducirter Form wie vorher $xx' + yy' = r^2$. (Vergl. Art. 105.)

Die Transformation auf einen neuen Coordinatenanfang, für welchen α, β die Coordinaten des Centrums sind, liefert alsdann durch die Substitution $x-\alpha$, $x'-\alpha$, $y-\beta$, $y'-\beta$ für x, x', y, y' die Gleichung des Kreises $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ und die der Tangente $(x-\alpha)(x'-\alpha) + (y-\beta)(y'-\beta) = r^2$, eine wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Kreisgleichung sehr bequeme Form.

Die Vergleichung der gefundenen Gleichung der Tangente $xx' + yy' = r^2$ mit der Gleichung des nach dem Berührungspunkte $x'y'$ gehenden Radius $xy' - yx' = 0$ zeigt, dass die Tangente des Kreises auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht.

Aufg. 1. Finde die Tangente im Punkte (5, 4) zu

$$(x-2)^2+(y-3)^2=10.$$

Aufl. $$3x+y=19.$$

Aufg. 2. Welches ist die Gleichung der die Punkte $x'y'$, $x''y''$ verbindenden Sehne im Kreise $x^2+y^2=r^2$?

Aufl. $$(x'+x'')x+(y'+y'')y=r^2+x'x''+y'y''.$$

Aufg. 3. Finde die Bedingung, unter welcher $Ax+By+C=0$ den Kreis $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ berührt.

Aufl. $$\frac{A\alpha+B\beta+C}{\sqrt{(A^2+B^2)}}=r,$$

weil die Senkrechte vom Punkte $\alpha\beta$ auf diese Linie dann $=r$ sein muss.

121. **Die Berührungspunkte der von einem gegebenen Punkte aus an einen Kreis gezogenen Tangenten zu finden.**

Wenn $x'y'$ der gegebene Punkt ist und wenn wir durch x'', y'' die Coordinaten des Berührungspunktes ausdrücken, so ist nöthig, dass $x'y'$ die Gleichung der Tangente erfüllen, also $x'x''+y'y''=r^2$, und weil $x''y''$ der Kreislinie angehört, ist $x''^2+y''^2=r^2$. Durch Auflösung dieser Bedingungsgleichungen erhalten wir für die Coordinaten des Berührungspunktes die Ausdrücke

$$x''=\frac{r^2x'\pm ry'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{x'^2+y'^2},\quad y''=\frac{r^2y'\mp rx'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{x'^2+y'^2}.$$

Von jedem Punkte aus lassen sich somit an den Kreis zwei Tangenten ziehen, welche reell sind, so lange $x'^2+y'^2>r^2$ ist, d. h. so lange der Punkt ausserhalb des Kreises liegt. Wenn $x'^2+y'^2=r^2$ ist, so fallen beide Tangenten zusammen; der Punkt liegt dann in der Kreislinie selbst.

Die Coordinaten der Berührungspunkte werden somit durch Auflösung der Gleichungen $xx'+yy'=r^2$, $x^2+y^2=r^2$ für x und y bestimmt, d. h. diese Punkte sind die Durchschnittspunkte des Kreises $x^2+y^2=r^2$ mit der geraden Linie $xx'+yy'=r^2$. Die letztere Gerade ist also die Verbindungslinie der Berührungspunkte der vom Punkte $x'y'$ ausgehenden Tangenten, wie man auch bestätigen würde, indem man die Gleichung der geraden Linie bildet, welche die durch die vorher gefundenen Coordinaten bestimmten Punkte verbindet. Man sieht, dass die Verbindungslinie der Berührungspunkte eine stets reelle Gerade ist, ebenso wohl wenn die Tangenten selbst reell als wenn sie imaginär sind; es ist die **Polare** von $x'y'$ in Bezug auf den Kreis. Sie ist zu der geraden Linie $x'y-y'x=0$ normal, welche den Punkt $x'y'$

mit dem Centrum des Kreises verbindet und ihre Entfernung von diesem Centrum ist nach Art. 23 $= \frac{r^2}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}$. Man construirt somit die Polare des Punktes P, indem man P mit dem Centrum C verbindet, und in dem Punkte M dieser Linie, für welche $CM \cdot CP = r^2$ ist, die Normale zu CP errichtet. Wenn $x'y'$ in der Kreisperipherie liegt, so ist die Polare die zugehörige Tangente des Kreises. (Art. 106.)

Aufg. 1. Finde die Polare von (4, 4) in Bezug auf
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13.$$
Aufl. $3x + 2y = 20$.

Aufg. 2. Finde die Polare von (4, 5) in Bezug auf
$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 8.$$
Aufl. $5x + 6y = 48$.

Aufg. 3. Finde den Pol von $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf
$$x^2 + y^2 = r^2.$$
Aufl. $\left(-\frac{Ar^2}{C}, -\frac{Br^2}{C}\right)$, wie aus der Vergleichung der gegebenen Gleichung mit $xx' + yy' = r^2$ hervorgeht.

Aufg. 4. Finde den Pol von $3x + 4y = 7$ in Bezug auf $x^2 + y^2 = 14$.
Aufl. (6, 8).

Aufg. 5. Finde den Pol von $2x + 3y = 6$ in Bezug auf
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 12.$$
Aufl. (— 11, — 16).

122. **Die Länge der Tangente zu finden, die von einem beliebigen Punkte an den Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ gezogen wird.**

Das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes vom Centrum ist $= (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$; und weil diess das Quadrat der Tangente um das Quadrat des Radius übertrifft, so wird das Quadrat der Tangente von einem Punkte aus gefunden, indem man die Coordinaten des Punktes für x und y in den ersten Theil der Gleichung des Kreises substituirt
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0.$$

Weil die allgemeine Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, wenn man sie durch a_{11} dividirt, mit einer Gleichung von der Form $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ identisch ist (Artikel 116), so lernen wir, dass das Quadrat der Tangente zu einem Kreise aus der in ihrer allgemeinsten Form gegebenen Gleichung desselben gefunden wird, indem man diese durch den Coefficienten in x^2

dividirt und dann die Coordinaten des gegebenen Punktes in die Gleichung substituirt. Das Quadrat der vom Coordinatenanfang ausgehenden Tangente wird gefunden, indem man x und $y = 0$ macht, und ist daher gleich dem durch a_{11} dividirten absoluten Glied in der Gleichung des Kreises. Dieselben Schlussfolgerungen sind anwendbar, wenn die Axen schiefwinklig sind.

123. **Das Verhältniss zu finden, in welchem die Verbindungslinie von zwei gegebenen Punkten $x'y', x''y''$ durch einen gegebenen Kreis geschnitten wird.**

Wir verfahren genau wie in Artikel 42 und in Artikel 110. Die Coordinaten irgend eines Punktes in der Linie müssen (Artikel 7) von der Form sein $\frac{lx'' + mx'}{l + m}, \frac{ly'' + my'}{l + m}$.

Indem wir diese Werthe in die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ substituiren und ordnen, erhalten wir zur Bestimmung des Verhältnisses $l : m$ die quadratische Gleichung

$$l^2(x''^2 + y''^2 - r^2) + 2lm(x'x'' + y'y'' - r^2) + m^2(x'^2 + y'^2 - r^2) = 0.$$

Wenn aus dieser Gleichung die Werthe von $l : m$ bestimmt sind, so haben wir damit zugleich die Coordinaten der Punkte, wo die gerade Linie den Kreis schneidet. Die Symmetrie der Gleichung lässt die jetzige Methode geeigneter erscheinen als die in Artikel 118 gebrauchte.

Wenn $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt, so haben wir (Art. 121) $x'x'' + y'y'' - r^2 = 0$ und die Factoren der vorhergehenden Gleichung müssen von der Form $l + \mu m$, $l - \mu m$ sein; die $x'y'$ und $x''y''$ verbindende gerade Linie wird daher innerlich und äusserlich in demselben Verhältniss geschnitten und wir leiten daraus den wohlbekannten Satz ab: **Jede durch einen beliebigen Punkt gezogene gerade Linie wird harmonisch getheilt durch den Punkt, den Kreis und die Polare des Punktes.** (Vergl. Artikel 109.)

124. **Die Gleichung der Tangenten von einem gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis zu finden.**

Wir haben vorher (Artikel 121) die Coordinaten der Berührungspunkte gefunden; indem wir ihre Werthe in die Gleichung $xx'' + yy'' - r^2 = 0$ substituiren, erhalten wir für die Gleichung der Tangenten respective

$$r(xx' + yy' - x'^2 - y'^2) + (y'x - yx')\sqrt{(x'^2 + y'^2 - r^2)} = 0,$$
$$r(xx' + yy' - x'^2 - y'^2) - (y'x - yx')\sqrt{(x'^2 + y'^2 - r^2)} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben mit einander multiplicirt die Gleichung des Tangentenpaares in einer von Wurzelgrössen freien Form. Der vorhergehende Artikel erlaubt uns aber diese Gleichung in einer einfacheren Form zu erhalten. Denn die Gleichung, welche $l : m$ bestimmt, hat gleiche Wurzeln, wenn die $x'y'$ und $x''y''$ verbindende gerade Linie den Kreis berührt; wenn daher xy irgend ein Punkt in einer der Tangenten durch $x'y'$ ist, so genügen seine Coordinaten nothwendig der Bedingung

$$(x'^2 + y'^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = (xx' + yy' - r^2)^2;$$

diese ist daher die Gleichung des Tangentenpaares durch den Punkt $x'y'$. Sie ist mit der durch die erstangezeigte Methode erhaltenen identisch. (Vergl. Art. 107, 110.)

125. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch drei Punkte geht.

Wir haben nur in die allgemeine Gleichung

$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ nach einander die Coordinaten jedes der gegebenen Punkte zu substituiren, so erhalten wir drei Gleichungen zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33}. Man kann die Gleichung auch bilden, indem man die Coordinaten des Centrums und den Radius so bestimmt, wie in der 5. Aufg. des Art. 5 geschehen ist.

Aufg. 1. Bestimme den Kreis durch die Punkte (2, 3), (4, 5), (6, 1).

Aufl. $\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$. (Vergl. a. a. O.)

Aufg. 2. Bestimme den Kreis durch die Punkte (2, 3), (3, 4) und den Anfangspunkt der Coordinaten.

Aufl. Es ist $a_{33} = 0$ und $13 + 4a_{13} + 6a_{23} = 0$, $25 + 6a_{13} + 8a_{23} = 0$, also $2a_{13} = -23$, $2a_{23} = 11$.

Aufg. 3. Man bestimme für die Coordinatenaxen der Aufg. 1 im Art. 48 die Gleichung des durch den Anfangspunkt der Coordinaten und die Mittelpunkte der Scheitelseiten gehenden Kreises und zeige, dass derselbe auch den Mittelpunkt der Basis enthält.

Aufl. $2p(x^2 + y^2) - p(s - s')x - (p^2 + ss')y = 0.$

126. Die Gleichung des Kreises durch drei Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ in Gliedern der Coordinaten dieser Punkte auszudrücken.

Wir haben in $x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

die aus

$$(x'^2 + y'^2) + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33} = 0,$$
$$(x''^2 + y''^2) + 2a_{13}x'' + 2a_{23}y'' + a_{33} = 0,$$
$$(x'''^2 + y'''^2) + 2a_{13}x''' + 2a_{23}y''' + a_{33} = 0,$$

abgeleiteten Werthe von a_{13}, a_{23}, a_{33} zu substituiren. Das Resultat dieser Elimination von a_{13}, a_{23}, a_{33} zwischen diesen vier Gleichungen wird in der Form

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)\,[x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'')] -\\ (x'^2 + y'^2)\,[x''(y'''-y) + x'''(y-y'') + x(y''-y''')] +\\ (x''^2+y''^2)\,[x'''(y-y') + x(y'-y''') + x'(y'''-y)] -\\ (x'''^2+y'''^2)\,[x(y'-y'') + x'(y''-y) + x''(y-y')] = 0\end{aligned}$$

erhalten; am einfachsten durch Multiplication der vier Gleichungen mit den in dieser Gleichung auftretenden Factoren von $(x^2 + y^2)$, $(x'^2 + y'^2)$ u. s. w., da dann durch Addition der Producte die Coefficienten a_{13}, a_{23}, a_{33} gleichzeitig verschwinden.

Nach Art. 72 erhält man diese Gleichung auch in der gleichbedeutenden Determinantenform
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1\\ x'^2+y'^2, & x', & y', & 1\\ x''^2+y''^2, & x'', & y'', & 1\\ x'''^2+y'''^2, & x''', & y''', & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Wenn verlangt wird, die Bedingung zu finden, unter welcher vier Punkte in einem Kreise liegen, so haben wir nur in der letzten Gleichung x_4, y_4 für x, y zu schreiben. Die daraus entspringende Bedingung erlaubt folgende geometrische Interpretation: Wenn A, B, C, D irgend vier Punkte in einem Kreise sind und O ein fünfter beliebig genommener Punkt, und wir bezeichnen durch BCD den Flächeninhalt des Dreiecks BCD u. s. w., so ist

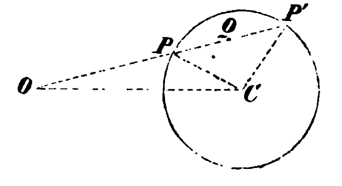
$$OA^2 . BCD + OC^2 . ABD = OB^2 . ACD + OD^2 . ABC.$$

127. Wir zeigen zum Schluss dieses Kapitels, wie die Polargleichung des Kreises zu finden ist.

Wir können sie entweder erhalten, indem wir für x und y $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ (Artikel 12) in eine der früher gegebenen Gleichungen des Kreises

$$a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \text{ oder } (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

substituiren, oder sie auch unabhängig aus der geometrischen Natur des Kreises finden, wie folgt:



Sei O der Pol, C das Centrum des Kreises und OC die feste Axe; sei die Entfernung $OC = d$ und OP irgend ein Radius vector und daher $= \rho$, endlich der Winkel $POC = \theta$, so haben wir

$$PC^2 = OP^2 + OC^2 - 2 OP . OC . \cos POC,$$

d. h. $r^2 = \varrho^2 + d^2 - 2\varrho d \cos\theta$; diess ist daher die Polargleichung des Kreises.

Wenn die feste Axe nicht mit OC zusammenfällt, sondern damit einen Winkel α bildet, so ist die Gleichung, wie in Art. 44,

$$\varrho^2 - 2d\varrho \cos(\theta - \alpha) + d^2 - r^2 = 0.$$

Wenn wir den Pol im Kreise voraussetzen, so nimmt die Gleichung die einfachere Form $\varrho = 2r \cos\theta$ an, weil $r = d$ wird; ein Resultat, welches wir auch rein geometrisch aus der Eigenschaft erhalten haben würden, dass der Peripheriewinkel über dem Halbkreis ein rechter ist; oder indem wir für x und y ihre polaren Werthe in die Gleichung $x^2 + y^2 = 2rx$ einsetzten.

Achtes Kapitel.

Lehrsätze und Aufgaben vom Kreis.

128. Nachdem wir im vorigen Kapitel gezeigt haben, wie die Gleichungen des Kreises und der bemerkenswerthesten auf ihn bezüglichen Linien zu bilden sind, wollen wir in dem jetzigen diese Gleichungen durch Beispiele erläutern und sie zur Begründung einiger der wichtigsten Eigenschaften des Kreises anwenden. Wir verweisen zuerst den Leser auf die Beispiele des Art. 49, damit er untersuche, in welchen Fällen die erhaltenen Gleichungen Kreise darstellen und für dieselben die Mittelpunktscoordinaten und den Radius berechne oder die Punkte bestimme, in welchen die Axen von einem derselben geschnitten werden. Einige weitere Beispiele von kreisförmigen Oertern fügen wir hinzu.

Aufg. 1. Man soll aus der Basis und dem gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks den Ort seiner Spitze für beliebige Lage der Coordinatenaxen suchen.

Aufl. Die Coordinaten der Basispunkte seien $x'y'$, $x''y''$. Die Gleichung der einen Seite sei $y - y' = m(x - x')$, dann wird die Gleichung der andern Seite, die mit dieser den Winkel C bildet (Art. 33),

$$(1 + m \tan C)(y - y'') = (m - \tan C)(x - x'').$$

Durch Elimination von m erhalten wir nun die Gleichung des Ortes

$$\tan C[(y - y')(y - y'') + (x - x')(x - x'')] + x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - y'x'' = 0.$$

Wenn C ein rechter Winkel wäre, so sind die Gleichungen der Seiten $y - y' = m(x - x')$, $m(y - y'') + (x - x'') = 0$ und die des Ortes ist $(y - y')(y - y'') + (x - x')(x - x'') = 0$.

Aufg. 2. In einem Dreieck ist die Basis und der Winkel an der Spitze gegeben; man soll den Ort des Durchschnittspunktes der drei Senkrechten bestimmen, die von den Ecken auf die Gegenseiten gefällt werden.

Die Gleichungen der Senkrechten zu den Scheitelseiten sind

$$m(y-y'')+(x-x'')=0,\ (m-\tan C)(y-y')+(1+m\tan C)(x-x')=0.$$

Indem wir m eliminiren, erhalten wir die Gleichung des Ortes

$$\tan C\,[(y - y')(y - y'') + (x - x')(x - x'')] = x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - y'x'';$$

eine Gleichung, welche von der im letzten Artikel gefundenen lediglich im Vorzeichen von $\tan C$ abweicht und welche daher der Ort ist, den wir für die Spitze gefunden haben würden, wenn dieselbe Basis und der Winkel an der Spitze gleich dem Supplement des vorigen gegeben worden wäre.

Aufg. 3. Es ist allgemein irgend eine Anzahl von Punkten gegeben, man soll den Ort eines Punktes finden, der so liegt, dass die Summe der $m', m'' \ldots$ fachen Quadrate seiner Entfernungen vom ersten, zweiten ... Punkte respective eine constante Grösse sei, oder (indem wir die Bezeichnung des Art. 50, Aufg. 4 annehmen), dass $\Sigma(mr^2)$ constant sei.

Das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes xy vom Punkt $x'y'$ ist $(x - x')^2 + (y - y')^2$. Wir multipliciren diess mit m' und addiren es zu den entsprechenden Gliedern, die man durch den Ausdruck der Entfernungen des Punktes xy von den andern Punkten $x''y'', \ldots$ gefunden hat. Unter Benutzung der angeführten Bezeichnungsweise können wir für die Gleichung des Ortes schreiben:

$$\Sigma(m)x^2 + \Sigma(m)y^2 - 2\Sigma(mx')x - 2\Sigma(my')y + \Sigma(mx'^2) + \Sigma(my'^2) = C.$$

Also ist der Ort ein Kreis, dessen Mittelpunktscoordinaten sind $x = \frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)}$, $y = \frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)}$, d. h. das Centrum ist der Punkt, den wir in jener Aufgabe 4, Art. 50 das Centrum der mittlern Entfernungen der gegebenen Punkte genannt haben.

Wenn wir den Werth vom Radius dieses Kreises untersuchen, so finden wir $R^2\Sigma(m) = \Sigma(mr^2) - \Sigma(m\varrho^2)$, wo $\Sigma(mr^2) = C$ gleich der Summe der $m$fachen Entfernungsquadrate jedes der gegebenen Punkte von einem Punkte des Kreises und $\Sigma(m\varrho^2)$ gleich der Summe der $m$fachen Entfernungsquadrate aller Punkte von dem Centrum der mittlern Entfernungen ist.

Aufg. 4. Man soll den Ort eines Punktes O bestimmen, durch welchen Parallelen zu den Seiten eines Dreiecks in den Seiten desselben Punkte B, C; C', A'; A'', B'' so bestimmt werden, dass die Summe der drei Rechtecke $BO \,.\, OC + C'O \,.\, OA' + A''O \,.\, OB''$ constant ist.

Aufl. Wenn man zwei von den Seiten des Dreiecks zu Coordinatenaxen wählt, so ist die Gleichung des Ortes

$$x\left(a - x - \frac{a}{b}y\right) + y\left(b - y - \frac{b}{a}x\right) + \frac{c^2xy}{ab} = m^2$$

oder $$x^2 + y^2 + 2xy\cos C - ax - by + m^2 = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt einen Kreis, welcher mit dem dem Dreieck umgeschriebenen Kreis concentrisch ist; in beiden Fällen sind die Coordinaten des Centrums durch $2(\alpha + \beta\cos C) = a$, $2(\beta + \alpha\cos C) = b$ gegeben. Diese Gleichungen gestatten die Lösung des Problems, den Ort für das Centrum des umgeschriebenen Kreises zu finden, wenn zwei Seiten eines Dreiecks der Lage nach gegeben sind und eine ihre Längen verbindende Relation bekannt ist.

Aufg. 5. Man bestimme den Ort eines Punktes O so, dass die Verbindungslinie desselben mit einem festen Punkte denselben Abschnitt in der Axe x bilde, wie die von O auf die Verbindungslinie gefällte Normale in der Axe y.

Aufg. 6. Bestimme den Ort eines Punktes so, dass die in den Ecken eines Dreiecks auf ihren Verbindungslinien mit ihm errichteten Perpendikel sich in einem Punkte durchschneiden.

129. Wir geben demnächst einige Beispiele, die das Problem des Artikel 118 enthalten, nämlich das Problem, die Coordinaten der Punkte zu finden, wo eine gerade Linie einen gegebenen Kreis schneidet.

Aufg. 1. Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen eines Kreises zu finden, die einer gegebenen Linie parallel sind.

Sei die Gleichung irgend einer der parallelen Sehnen $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, wo α nach der Voraussetzung bestimmt und p veränderlich ist; die Abscissen der Punkte, wo diese Linie den Kreis schneidet (Art. 118), werden aus der Gleichung $x^2 - 2px\cos\alpha + p^2 - r^2\sin^2\alpha = 0$ gefunden. Wenn nun die Wurzeln dieser Gleichung x', x'' sind, so ist die Abscisse des Mittelpunkts der Sehne $\frac{1}{2}(x' + x'')$ und also nach der Theorie der Gleichungen $= p\cos\alpha$. In gleicher Weise ist das y des Mittelpunktes $= p\sin\alpha$. Also ist die Gleichung des Ortes $y = x\tan\alpha$, d. h. eine zu dem System paralleler Sehnen senkrechte gerade Linie durch den Mittelpunkt, weil α der Winkel ist, den eine Senkrechte zur Sehne $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ mit der Axe der x bildet.

Aufg. 2. Die Bedingung zu finden, dass der durch den Kreis in der Linie $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ gebildete Abschnitt einen rechten Winkel am Punkt $x'y'$ fasse.

Wir fanden Art. 128, Aufg. 2 die Bedingung, dass die die Punkte $x''y''$, $x'''y'''$ mit xy verbindenden geraden Linien rechtwinklig zu einander sein sollten, nämlich $(x - x'')(x - x''') + (y - y'')(y - y''') = 0$. Seien nun $x''y''$, $x'''y'''$ die Punkte, wo die Linie den Kreis schneidet, so ist nach dem letzten Beispiel
$x'' + x''' = 2p\cos\alpha$, $x''x''' = p^2 - r^2\sin^2\alpha$, $y'' + y''' = 2p\sin\alpha$, $y''y''' = p^2 - r^2\cos^2\alpha$; aus diesen Werthen ergiebt sich die geforderte Bedingung $x'^2 + y'^2 - 2px'\cos\alpha - 2py'\sin\alpha + 2p^2 - r^2 = 0$.

Aufg. 3. Den Ort des Mittelpunkts einer Sehne zu finden, welche einen rechten Winkel an einem gegebenen Punkte spannt.

Wenn x und y die Coordinaten des Mittelpunktes sind, so haben wir nach Aufg. 1 $p \cos \alpha = x$, $p \sin \alpha = y$, $p^2 = x^2 + y^2$, und durch die Substitution dieser Werthe wird die in der vorigen Aufgabe gefundene Bedingung $(x - x')^2 + (y - y')^2 + x^2 + y^2 = r^2$.

Aufg. 4. Ist eine gerade Linie und ein Kreis gegeben, so soll man einen Punkt so finden, dass, wenn man durch ihn eine Sehne zieht, und von ihren Endpunkten auf die gegebene Linie Perpendikel fällt, das Rechteck dieser Senkrechten constant sei.

Man nehme die gegebene Linie zur Axe x, und zur Axe der y eine vom Centrum des gegebenen Kreises auf sie gefällte Senkrechte, deren Länge β genannt werden mag. Dann ist die Gleichung des Kreises

$$x^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Wenn ferner die Coordinaten des gesuchten Punktes $x'y'$ sind, so ist die Gleichung irgend einer Geraden durch ihn $y - y' = m\,(x - x')$.

Eliminirt man nun zwischen diesen zwei Gleichungen x, so erhält man eine quadratische Gleichung für y, für welche das Product der Wurzeln ist $\frac{(y' - mx')^2 + m^2(\beta^2 - r^2)}{1 + m^2}$. Diess Product kann also nur dann von m unabhängig sein, wenn der Zähler durch $(1 + m^2)$ theilbar ist, d. h. nur dann, wenn $x' = 0$, $y'^2 = \beta^2 - r^2$ ist.

Aufg. 5. Die Bedingung zu finden, unter welcher der in der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ durch den Kreis $x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ bestimmte Abschnitt im Anfangspunkt der Coordinaten einen rechten Winkel bestimmt.

Aufl. Die Gleichung des Paars von geraden Linien, welches den Anfangspunkt mit den Endpunkten der Sehne verbindet, kann gefunden werden wie folgt: Man multiplicire die Glieder vom zweiten Grade in der Gleichung des Kreises mit p^2, diejenigen vom ersten mit $p\,(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ und das absolute Glied mit $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2$; es entsteht eine in x und y homogene Gleichung, welche daher zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade darstellt und die durch diejenigen Punkte des Kreises befriedigt wird, in welchen $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ist.

Die Entwicklung und Ordnung der Gleichung giebt

$$(p^2 + 2a_{13}p \cos\alpha + a_{33}{}^2 \cos^2\alpha)x^2 + 2(a_{13} \sin\alpha + a_{23} \cos\alpha + a_{33} \sin\alpha \cos\alpha)xy$$
$$+ (p^2 + 2a_{23}p \sin\alpha + a_{33}{}^2 \sin^2\alpha)\,y^2 = 0$$

Nach Art. 87 sind die durch sie dargestellten Geraden rechtwinklig zu einander, wenn $2p^2 + 2p(a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha) + a_{33}{}^2 = 0$ ist.

Aufg. 6. Man soll den Ort des Fusspunktes der Normale bestimmen, die vom Anfangspunkte der Coordinaten auf eine Sehne gefällt wird, die an ihm einen rechten Winkel bestimmt.

Aufl. Die Polarcoordinaten des Ortes sind die Grössen p und α in der zuletzt gefundenen Gleichung und die Gleichung des Ortes ist daher $2(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}{}^2 = 0$. Die weitere Untersuchung zeigt, dass dieser Ort der schon in der 3. Aufg. gefundene Kreis ist.

Aufg. 7. Wenn durch irgend einen festen Punkt in einem Durchmesser des Kreises eine Sehne gezogen und jeder ihrer Endpunkte mit einem der Endpunkte des Durchmessers verbunden wird, so schneiden die Verbindungslinien in der Tangente des Kreises am andern Ende des Durchmessers Segmente ab, deren Rechteck constant ist.

Aufl. Man entwickelt wie in Aufg. 5 die Gleichung der Geraden, welche den Anfangspunkt mit den Durchschnitten des Kreises $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ und der Sehne $y = m(x - x')$ verbinden, die durch den festen Punkt $(x', 0)$ gezogen ist. Man findet aus ihr die in der bezeichneten Tangente gebildeten Abschnitte durch die Substitution $x = 2r$ als die zugehörigen Werthe von y. Ihr Product wird als von m unabhängig gefunden, nämlich gleich $4r^2 \frac{x' - 2r}{x'}$.

130. Die in Art. 121 gewonnene Form der Gleichung der Polare des Punktes in Bezug auf den Kreis beweist für diesen leicht die Sätze der Art. 108 etc. Die Bedingung z. B. unter der der Punkt $x'y'$ in der Polare von $x''y''$ liegt, ist $x'x'' + y'y'' = r^2$, zugleich auch die Bedingung, unter welcher der Punkt $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt.

Wenn ein Kreis und ein Dreieck ABC gegeben ist, so bilden die Polaren der Ecken A, B, C desselben in Bezug auf den Kreis ein neues Dreieck $A'B'C'$, welches man als dem ersten conjugirt bezeichnet; in demselben sei A' der Pol von BC, B' der Pol von CA und C' der Pol von AB. In dem besondern Falle, wo die Pole von A, B, C respective die Gegenseiten BC, CA, AB des Dreiecks selbst sind, bezeichnet man dasselbe als ein sich selbst conjugirtes Dreieck. Die geraden Linien AA', BB', CC', welche die entsprechenden Ecken eines Dreiecks und des ihm conjugirten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Die Gleichung der Verbindungslinie des Punktes $x'y'$ mit dem Durchschnitt der zwei Linien

$xx'' + yy'' - r^2 = 0$ und $xx''' + yy''' - r^2 = 0$ ist (Art. 40)

$$AA' \qquad (x'x''' + y'y''' - r^2)(xx'' + yy'' - r^2) - (x'x'' + y'y'' - r^2)(xx''' + yy''' - r^2) = 0.$$

In gleicher Art ergeben sich

$$BB' \qquad (x''x' + y''y' - r^2)(xx''' + yy''' - r^2) - (x''x''' + y''y''' - r^2)(xx' + yy' - r^2) = 0,$$

$$CC' \qquad (x'''x'' + y'''y'' - r^2)(xx' + yy' - r^2) - (x'''x' + y'''y' - r^2)(xx'' + yy'' - r^2) = 0,$$

und nach Art. 40 müssen diese Linien durch denselben Punkt gehen.

Das folgende ist ein specieller Fall des eben bewiesenen Theorems: Wenn ein Kreis einem Dreieck eingeschrieben ist und jede Ecke des Dreiecks mit dem Berührungspunkte des Kreises mit der Gegenseite verbunden wird, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in einem Punkte.

Der eben gegebene Beweis behält seine Geltung auch für die allgemeine Gleichung zweiten Grades. Wenn wir abkürzend durch $P_1 = 0$ die Gleichung der Polare von $x'y'$ also $a_{11}x'x +$ etc. $= 0$ und ebenso durch $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ die Gleichungen der Polaren von $x''y''$, $x'''y'''$ bezeichnen und wenn wir [1, 2] für das Resultat der Substitution der Coordinaten x'', y'' in die Polare von $x'y'$ oder $a_{11}x'x'' +$ etc. schreiben, so erhalten wir für die Gleichungen von AA', BB', CC' respective

$[1, 3]\, P_2 = [1, 2]\, P_3$, $[1, 2]\, P_3 = [2, 3]\, P_1$, $[2, 3]\, P_1 = [1, 3]\, P_2$,

d. h. die Gleichungen von drei geraden Linien, die sich in einem Punkte schneiden. Nach Art. 60, Aufg. 3 folgt daraus, dass die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten eines Dreiecks und des ihm conjugirten in einer geraden Linie liegen.

131. Wenn irgend zwei Punkte A und B und ihre Polaren mit Bezug auf einen Kreis vom Centrum O gegeben sind und man fällt eine Senkrechte AP von A auf die Polare von B und eine Senkrechte BQ von B auf die Polare von A, so ist $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$.

Die Gleichung der Polare von $A\,(x'y')$ ist $xx' + yy' - r^2 = 0$ und BQ, die Senkrechte auf diese Linie von $B\,(x''y'')$ ist $\frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}$. Also finden wir, da $\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = OA$ ist, $OA \,.\, BQ = x'x'' + y'y'' - r^2$; und aus denselben Gründen $OB \,.\, AP = x'x'' + y'y'' - r^2$. Also $OA \,.\, BQ = OB \,.\, AP$.

132. Bei Aufgaben über den Kreis ist es oft zweckmässig, anstatt die Lage eines Punktes in der Curve durch seine zwei Coordinaten $x'y'$ zu bestimmen, diese beiden in Gliedern einer einzigen unabhängigen Veränderlichen auszudrücken. Wenn θ' der Winkel ist, welchen der Radius nach $x'y'$ mit der Axe der x macht, so wird für den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten $x' = r \cos \theta'$, $y' = r \sin \theta'$, und indem man diese Werthe in die Formeln substituirt, werden sie

im Allgemeinen vereinfacht. Die Gleichung der Tangente im Punkte $x'y'$ wird durch diese Substitution $x\cos\theta' + y\sin\theta' = r$; und die Gleichung der $x'y'$ mit $x''y''$ verbindenden Sehne, welche nach Artikel 120 ist $x(x'+x'') + y(y'+y'') = r^2 + x'x'' + y'y''$, durch eine ähnliche Substitution

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta'') + y\sin\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta'') = r\cos\tfrac{1}{2}(\theta'-\theta''),$$

wo θ' und θ'' die Winkel sind, welche die nach den Enden der Sehne gezogenen Radien mit der Axe der x bilden.

Diese Gleichung würden wir auch direct aus der allgemeinen Gleichung der geraden Linie $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ erhalten haben; denn der Winkel, den die Senkrechte zur Sehne mit der Axe der x bildet, ist offenbar die halbe Summe der Winkel, die von den Radien nach ihren Enden mit der Axe der x gebildet werden; und die Senkrechte zur Sehne ist $= r\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')$.

Aufg. 1. Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Tangenten in zwei gegebenen Punkten des Kreises zu finden.

Die Tangenten sind $x\cos\theta' + y\sin\theta' = r$, $x\cos\theta'' + y\sin\theta'' = r$ und daher die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes

$$x = r\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')}, \quad y = r\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')}.$$

Aufg. 2. Den Ort des Durchschnitts der Tangenten an den Enden einer Sehne von constanter Länge zu finden.

Indem wir die Substitution dieses Art. in die Gleichung $(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 = \text{const.}$ machen, reducirt sie sich zu $\cos(\theta'-\theta'') = \text{const.}$, oder $\theta'-\theta'' = \text{const.}$

Wenn die gegebene Länge der Sehne $= 2r\sin\delta$ war, so ist $\theta'-\theta'' = 2\delta$. Die in dem letzten Beispiel gefundenen Coordinaten erfüllen die Bedingung $(x^2+y^2)\cos^2\delta = r^2$.

Aufg. 3. Welches ist der Ort eines Punktes, in welchem eine Sehne von gegebener Länge in einem bestimmten Verhältniss geschnitten wird?

Indem man nach Art. 7 die Coordinaten des Punktes schreibt, wo die Sehne in gegebenem Verhältniss getheilt ist, findet man, dass sie der Bedingung $x^2 + y^2 = \text{const.}$ genügen.

Aufg. 4. Die Diagonalen eines dem Kreis umgeschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem Punkte.

Die von den Radien nach den Berührungspunkten mit der Axe der x gebildeten Winkel seien $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta, 2\varepsilon, 2\varphi$; dann ist die Gleichung der Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Tangenten in $2\alpha, 2\beta$ mit dem der Tangenten in $2\delta, 2\varepsilon$

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\delta)}[x\cos(\alpha+\delta) + y\sin(\alpha+\delta) - r\cos(\alpha-\delta)]$$
$$+ \frac{1}{\sin(\beta-\varepsilon)}[x\cos(\beta+\varepsilon) + y\sin(\beta+\varepsilon) - r\cos(\beta-\varepsilon)] = 0.$$

welche, mit den andern zwei Gleichungen derselben Form zusammenaddirt, die Summe Null giebt.

133. Wir haben gesehen, dass die Tangente eines Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ eine Gleichung von der Form $x \cos\theta + y \sin\theta = r$ hat und erkennen ganz ebenso, dass die Gleichung der Tangente zu $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ geschrieben werden kann $(x - \alpha)\cos\theta + (y - \beta)\sin\theta = r$; wenn daher umgekehrt die Gleichung einer geraden Linie eine Unbestimmte θ in der Form $(x - \alpha)\cos\theta + (y - \beta)\sin\theta = r$ enthält, so berührt sie den Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

Aufg. 1. Wenn eine Sehne von constanter Länge in einen Kreis eingeschrieben wird, so berührt sie stets einen zweiten Kreis. Denn in der Gleichung der Sehne

$$x \cos \tfrac{1}{2}(\theta' + \theta'') + y \sin \tfrac{1}{2}(\theta' + \theta'') = r \cos \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta'')$$

(nach dem letzten Art.) ist $\theta' - \theta''$ bekannt und $\theta' + \theta''$ unbestimmt; die Sehne berührt daher stets den Kreis $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \delta$.

Aufg. 2. Wenn eine Anzahl von Punkten gegeben ist und eine gerade Linie so gelegt wird, dass das m'fache des Perpendikels auf sie vom 1. Punkt vermehrt um das m''fache des Perpendikels zu ihr vom 2. Punkt u. s. w. eine constante Summe giebt, so umhüllt die Linie einen festen Kreis. Diess weicht von der Aufgabe 4 in Art. 50 nur darin ab, dass die Summe, anstatt 0 zu sein, constant ist.

Indem wir die Bezeichnung dieses Artikels annehmen, haben wir statt der dort gefundenen Gleichung

$$[x\Sigma(m) - \Sigma(mx')] \cos\alpha + [y\Sigma(m) - \Sigma(my')] \sin\alpha = 0$$

nur zu schreiben:

$$[x\Sigma(m) - \Sigma(mx')] \cos\alpha + [y\Sigma(m) - \Sigma(my')] \sin\alpha = \text{const.}$$

Also berührt die gerade Linie stets den Kreis

$\left[x - \frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)}\right]^2 + \left[y - \frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)}\right]^2 = \text{const.}$, dessen Centrum das Centrum der mittleren Entfernungen der gegebenen Punkte ist.

134. Wir schliessen dem Vorigen einige Beispiele von dem Gebrauch der Polar-Coordinaten an.

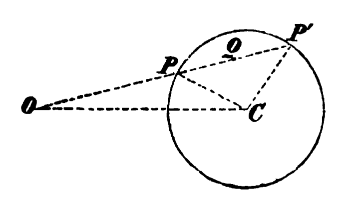
Aufg. 1. Wenn man durch einen festen Punkt eine Sehne im Kreise zieht, so ist das Rechteck aus ihren Segmenten von constantem Inhalt. (Euklid. III, 35. 36.)

Nehmen wir den festen Punkt zum Pol, so ist die Polargleichung (Art. 127) $\varrho^2 - 2\varrho d \cos\theta + d^2 - r^2 = 0$; offenbar sind OP, OP', d. h. die Werthe der Radien vectoren, die einem gegebenen Werth von θ oder POC entsprechen, die Wurzeln dieser Gleichung. Nun ist nach der Theorie der Gleichungen $OP.OP'$, das Product dieser Wurzeln, $= d^2 - r^2$, eine von θ unabhängige Grösse und daher constant, wie immer die Richtung sei, in welcher die Linie OP gezogen ist. Wenn der Punkt O

ausserhalb des Kreises läge, so ist $d^2 - r^2$ das Quadrat über der Länge der Tangenten.

Aufg. 2. Wenn durch einen festen Punkt O eine Sehne in einem Kreise gezogen, und OQ als das arithmetische Mittel zwischen den Segmenten OP, OP' genommen wird, den Ort von Q zu finden.

Wir haben $OP + OP'$ oder die Summe der Wurzeln der quadratischen Gleichung im letzten Beispiel $= 2d \cos\theta$; aber $OP + OP' = 2OQ$, daher $OQ = d \cos\theta$. Also ist die Polargleichung des Ortes $\varrho = d \cos\theta$.



Nun erhellt aus der Endgleichung des Artikels 127, dass diess die Gleichung eines über der Linie OC als Durchmesser beschriebenen Kreises ist.

Die Aufgabe dieses Beispiels hätte auch so ausgedrückt werden können: Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen im Kreise zu finden, welche durch einen festen Punkt gehen.

Aufg. 3. Man soll den Ort von Q finden, wenn die Linie OQ das harmonische Mittel zwischen OP und OP' ist, d. h. $OQ = \frac{2.OP.OP'}{OP + OP'}$; es ist $OP.OP' = d^2 - r^2$ und $OP + OP' = 2d \cos\theta$ und daher die Polargleichung des Ortes $\varrho = \frac{d^2 - r^2}{d \cos\theta}$ oder $\varrho \cos\theta = \frac{d^2 - r^2}{d}$.

Diess ist die Gleichung einer geraden Linie, welche in der Entfernung von $O = d - \frac{r^2}{d}$ und daher in der Entfernung von $C = \frac{r^2}{d}$ zu OC senkrecht ist. Demnach ist der Ort die Polare des Punktes O. (Art. 121.

Wir können in derselben Art diese und ähnliche Aufgaben lösen, wenn die Gleichung in der Form gegeben ist:

$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, denn durch Transformation zu Polar-Coordinaten wird diese Gleichung

$\varrho^2 + 2\left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \cos\theta + \frac{a_{23}}{a_{11}} \sin\theta\right) \varrho + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0$, und indem wir genau wie in diesem Beispiel verfahren, finden wir für den Ort der harmonischen Mittel $\varrho = \frac{-a_{33}}{a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta}$, und zu rechtwinkligen Coordinaten zurückkehrend, $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$, die früher gefundene Gleichung der Polare des Anfangspunktes.

Aufg. 4. Ein Punkt und eine gerade Linie sind gegeben und der Ort von Q ist zu finden, wenn OQ als der inverse Werth von OP, dem Radius vector der geraden Linie, genommen wird.

Aufg. 5. Von einem Dreieck ist der Scheitel, der Scheitelwinkel und das Rechteck unter den Seiten gegeben; man soll den durch die eine Basisecke beschriebenen Ort bestimmen, wenn die andre sich in einer geraden Linie oder einem Kreise bewegt.

Wir nehmen den Scheitel zum Pol, setzen die Länge der Seiten gleich ϱ und ϱ' und die Winkel, die sie mit der Axe bilden, θ und θ'; als-

dann finden wir, indem wir für ρ, $\frac{k^2}{\rho}$, und für θ, $C + \theta'$ in die Gleichung des gegebenen Ortes einsetzen, eine Relation zwischen ρ' und θ', welche die Polargleichung des durch die andre Basisecke beschriebenen Ortes ist. Diese Aufgabe kann in derselben Art gelöst werden, wenn anstatt ihres Products das Verhältniss der Seiten gegeben wäre.

Aufg. 6. Durch den Durchschnitt zweier Kreise ist eine gerade Linie gezogen; man hat den Ort für den Mittelpunkt des zwischen die Kreise gefassten Stücks derselben zu finden.

Die Gleichungen der Kreise sind von der Form
$\rho = 2r \cos(\theta - \alpha)$ und $\rho = 2r' \cos(\theta - \alpha')$ und die Gleichung des Ortes ist alsdann $\rho = r \cos(\theta - \alpha) + r' \cos(\theta - \alpha')$; sie repräsentirt einen Kreis.

Aufg. 7. Wenn durch einen beliebigen Punkt O in der Peripherie eines Kreises drei Sehnen willkürlich gezogen werden und über jeder als Durchmesser ein Kreis beschrieben wird, so schneiden sich diese drei Kreise in drei andern Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

Wenn wir den festen Punkt zum Pol nehmen, und d der Durchmesser des ursprünglichen Kreises ist, so ist seine Gleichung (Art. 127) $\rho = d \cos\theta$.

Wenn der Durchmesser eines der andern Kreise mit der festen Axe einen Winkel α bildet, so ist seine Länge $= d \cos\alpha$ und die Gleichung des Kreises $\rho = d \cos\alpha \cos(\theta - \alpha)$; die Gleichung des andern Kreises ist endlich ebenso: $\rho = d \cos\beta \cos(\theta - \beta)$.

Um die Polar-Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser zwei Kreise zu finden, suchen wir den Werth von θ, welcher
$\cos\alpha \cos(\theta - \alpha) = \cos\beta \cos(\theta - \beta)$ macht und finden leicht $\theta = \alpha + \beta$ und den entsprechenden Werth von $\rho = d \cos\alpha \cos\beta$.

Ebenso sind die Polar-Coordinaten des Durchschnitts vom ersten und dritten Kreise $\theta = \alpha + \gamma$ und $\rho = d \cos\alpha \cos\gamma$.

Um nun die Polargleichung der diese beiden Punkte verbindenden Linie zu finden, nehmen wir die allgemeine Gleichung der geraden Linie $\rho \cos(k - \theta) = p$ (Art. 44) und setzen in sie nach einander diese Werthe von θ und ρ, um so zwei Gleichungen zur Bestimmung von p und k zu erhalten; daraus ergiebt sich
$p = d \cos\alpha \cos\beta \cos[k - (\alpha + \beta)] = d \cos\alpha \cos\gamma \cos[k - (\alpha + \gamma)]$.

Also $k = \alpha + \beta + \gamma$ und $p = d \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Die Symmetrie dieser Werthe zeigt, dass es dieselbe gerade Linie ist, welche die Durchschnitte des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Kreises verbindet, dass daher die drei Punkte in derselben geraden Linie liegen.

Neuntes Kapitel.

Eigenschaften eines Systems von zwei oder mehreren Kreisen.

135. **Die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise zu finden.**

Wenn $S = 0$, $S' = 0$ die Gleichungen zweier Kreise sind, so ist nach Artikel 40 jede Gleichung von der Form $S - kS' = 0$ die Gleichung einer durch ihre Durchschnittspunkte gehenden Linie. Schreiben wir die Gleichungen

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0,$$
$$S' = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - r'^2 = 0,$$

so ist offenbar, dass die Gleichung $S - kS' = 0$ im Allgemeinen einen Kreis darstellt, weil der Coefficient von xy Null und der Coefficient von x^2 dem von y^2 gleich ist. In einem Falle, nämlich für $k = 1$, stellt sie aber eine gerade Linie dar; die Glieder des zweiten Grades verschwinden dann und die Gleichung wird

$$S - S' = 2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + r'^2 - r^2 + \alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2 = 0.$$

Diese ist daher die Gleichung der durch die Durchschnittsdunkte der beiden Kreise gehenden geraden Linie.

136. Die Durchschnittspunkte der zwei Kreise werden gefunden, indem man wie in Artikel 118 die Punkte sucht, in welchen die Linie $S - S' = 0$ einen der gegebenen Kreise schneidet. Diese Punkte sind reelle, zusammenfallende oder imaginäre Punkte, je nach der Natur der Wurzeln der resultirenden Gleichung; aber es ist bemerkenswerth, dass, gleichviel ob die Kreise sich in reellen oder imaginären Punkten schneiden, die Gleichung der Durchschnittssehne $S - S' = 0$ immer eine reelle gerade Linie repräsentirt, welche in Bezug auf beide Kreise wichtige geometrische Eigenschaften besitzt. Diess ist in Uebereinstimmung mit unsrer früheren Anmerkung, dass die Verbindungslinie zweier Punkte ihre Existenz und ihre Eigenschaften bewahren kann, wenn auch diese Punkte imaginär geworden sind. Um das Unangemessene zu vermeiden, welches die Benennung dieser Linie $S - S' = 0$ als Durchschnittssehne dann hat, wenn die Kreise sich geometrisch nicht

zu schneiden scheinen, ist sie die Radical-Axe*) beider Kreise genannt worden: auch die Benennung Chordale ist für dieselbe angewendet worden**).

137. Wir sahen (Art. 122), dass die Substitution der Coordinaten eines beliebigen Punktes xy in die Gleichung des Kreises das Quadrat der Tangente liefert, die man von ihm aus an den Kreis ziehen kann. Demnach sagt die Gleichung $S - S' = 0$ aus, dass die von einem beliebigen Punkte der Radical-Axe an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich lang sind.

Die Linie $S - S' = 0$ besitzt diese Eigenschaft, gleichviel ob sie den Kreis in reellen Punkten schneidet oder nicht.

Wenn die Kreise sich nicht in reellen Punkten schneiden, so ist die Lage der Radical-Axe geometrisch bestimmt, indem sie die Verbindungslinie ihrer Centra so schneidet, dass die Differenz der Quadrate ihrer Theile gleich der Differenz der Quadrate der Halbmesser ist, und in diesem Theilpunkte sich senkrecht erhebt; diess ist offenbar, weil auch die Tangenten von diesem Punkte einander gleich sein müssen.

Wenn verlangt wäre, den Ort eines Punktes zu finden, für welchen die von ihm zu zwei Kreisen gezogenen Tangenten in constantem Verhältniss stehen, so erhellt aus Artikel 122, dass die Gleichung des Ortes sein muss $S - k^2 S' = 0$; dieselbe repräsentirt aber nach Artikel 134 einen durch die reellen oder imaginären Durchschnittspunkte von S und S' gehenden Kreis. Wenn die Kreise S und S' sich nicht in reellen Punkten durchschneiden, so können wir die Relation, welche sie mit dem Kreise $S - k^2 S$ verbindet, ausdrücken, indem wir sagen, dass die drei Kreise eine gemeinschaftliche Radical-Axe haben.

138. Wenn drei Kreise gegeben sind und wir nehmen für jedes Paar derselben die Radical-Axe, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkt. Derselbe wird das Radical-Centrum der drei Kreise genannt. (Der Chordalpunkt nach Plücker.)

Denn die Gleichungen der drei Radical-Axen sind

$$S - S' = 0, \quad S' - S'' = 0, \quad S'' - S = 0,$$

*) Gaultier, Journ. de l'école. pol. Cah. XVI. 1813.

**) Von Plücker: Analytisch-geometrische Entwicklungen I. 93.

welche Linien sich nach Artikel 40 in einem Punkt schneiden. Aus diesem Theorem geht unmittelbar das Folgende hervor:

Wenn verschiedene Kreise durch dieselben zwei festen Punkte gehen, so geht ihre Durchschnittssehne mit einem festen Kreis durch einen festen Punkt.

Denn denken wir irgend einen der Kreise, die durch die zwei gegebenen Punkte gehen, als fest, so ist seine Durchschnittssehne mit dem gegebenen Kreise unveränderlich und seine Durchschnittssehne mit irgend einem andern durch die gegebenen Punkte gehenden Kreise die diese Punkte verbindende gerade Linie. Diese zwei geraden Linien bestimmen in ihrem Durchschnitt einen Punkt, durch welchen die Durchschnittssehne des veränderlichen Kreises mit dem gegebenen Kreise gehen muss.

Aufg. 1. Finde die Radical-Axe von
$x^2 + y^2 - 4x - 5y + 7 = 0$ und $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 9 = 0$.

Aufl. $10x + 13y = 16$.

Aufg. 2. Finde das Radical-Centrum von
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 7$, $(x-3)^2 + y^2 = 5$, $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Aufl. $(-\frac{1}{16}, -\frac{25}{16})$.

*139. Kreise, die eine gemeinschaftliche Radical-Axe besitzen, haben manche merkwürdige Eigenschaften; dieselben können leichter untersucht werden, indem man die Radical-Axe zur Axe der y und die Verbindungslinie der Centra zur Axe der x nimmt. Dann ist die Gleichung eines beliebigen Kreises aus dem System $x^2 + y^2 - 2kx \pm \delta^2 = 0$; δ bleibt für alle Kreise des Systems constant und die Gleichungen der verschiedenen Kreise desselben werden erhalten, indem man dem k verschiedene Werthe giebt. Denn offenbar liegt das Centrum in der Axe der x (Art. 116) in der veränderlichen Entfernung k vom Anfangspunkt der Coordinaten; und wenn wir den Werth $x = 0$ in die Gleichung substituiren, so zeigt sich, dass für alle Werthe von k der Kreis durch die festen Punkte $y^2 \pm \delta^2 = 0$ in der Axe y hindurchgeht; sie sind imaginär, wenn δ^2 das Zeichen $+$, und reell, wenn diese Grösse das Zeichen $-$ besitzt.

*140. Wenn verschiedene Kreise eine gemeinschaftliche Radical-Axe haben, so geht die Polare eines gegebenen Punktes in Bezug auf irgend einen von ihnen auch durch einen festen Punkt.

Die Gleichung der Polare von $x'y'$ in Bezug auf

$$x^2 + y^2 - 2kx + \delta^2 = 0$$

ist (Artikel 121) $xx' + yy' - k(x + x') + \delta^2 = 0$; diese Linie muss, weil ihre Gleichung die Unbestimmte k im ersten Grade enthält, immer durch den Durchschnitt von

$$xx' + yy' + \delta^2 = 0 \text{ und } x + x' = 0 \text{ gehen.}$$

***141.** Es können immer zwei Punkte so gefunden werden, dass ihre Polaren in Bezug auf irgend einen der Kreise nicht allein durch einen festen Punkt gehen, sondern ganz fest sind.

Das wird dann stastfinden, wenn

$$xx' + yy' + \delta^2 = 0 \text{ und } x + x' = 0$$

dieselbe gerade Linie darstellen, denn diese gerade Linie ist dann die Polare, welches auch der Werth von k sei. Aber diese Identität tritt ein, wenn $y' = 0$ und $x'^2 = \delta^2$ oder $x' = \pm \delta$ ist.

Die zwei Punkte, deren Coordinaten wir eben gefunden haben, besitzen manche merkwürdige Eigenschaften in der Theorie dieser Kreise; sie liegen so, dass die Polare des einen von ihnen in Bezug auf irgend einen der Kreise eine durch den andern gehende Senkrechte zur Centrallinie ist. Diese Punkte sind reell, wenn die Kreise des Systems zwei imaginäre Punkte gemein haben, und imaginär, wenn sie sich in reellen Punkten durchschneiden. Man kann die Gleichung des Kreises in der Form $y^2 + (x-k)^2 = k^2 - \delta^2$ schreiben und erkennt daraus, dass für alle Werthe von k, welche der Bedingung $k^2 < \delta^2$ genügen, der Kreis imaginär wird; für $k^2 = \delta^2$ repräsentirt die Gleichung einen Kreis von unendlich kleinem Radius, dessen Centrum die Coordinaten $y=0$, $x = \pm \delta$ hat. Demnach können die eben gefundenen Punkte selbst als Kreise des Systems betrachtet werden und in diesem Sinne sind sie von Poncelet als die Grenzpunkte des Systems der Kreise bezeichnet werden*).

***142.** Wenn wir von irgend einem Punkte der Radical-Axe Tangenten an alle diese Kreise ziehen, so ist der Ort der Berührungspunkte nothwendig ein Kreis, weil wir bewiesen haben (Artikel 137), dass alle diese Tangenten gleich lang sind. Auch muss dieser Kreis alle Kreise des gegebenen Systems unter rechten Winkeln schneiden, weil seine Radien Tangenten dersel-

---

*) Traité des Propriétés Project. p. 41.

ben sind. Die Gleichung dieses Kreises kann leicht gefunden werden.

Das Quadrat der Tangente von irgend einem Punkte $x=0$, $y=h$ an den Kreis $x^2 + y^2 - 2kx + \delta^2 = 0$, welches gefunden wird, indem man die Coordinaten desselben in diese Gleichung einsetzt, ist $h^2 + \delta^2$, und der Kreis, dessen Centrum der Punkt $x = 0$, $y = h$ und dessen Radius-Quadrat $= h^2 + \delta^2$ ist, hat die Gleichung $x^2 + (y - h)^2 = h^2 + \delta^2$ oder $x^2 + y^2 - 2hy = \delta^2$.

Also, wie auch der in der Radical-Axe genommene Punkt liege (oder welches immer der Werth von h sein mag), immer geht dieser Kreis durch den festen Punkt $y = 0$, $x = \pm \delta$, den wir im letzten Artikel gefunden haben.

Und wir erkennen, dass alle Kreise, welche das gegebene System unter rechten Winkeln schneiden, durch die Grenzpunkte des Systems gehen.

Aufg. 1. Man bestimme den zu den drei Kreisen der Aufg. 2 des Art. 138 orthogonalen Kreis.

Aufl. $(x + \frac{1}{16})^2 + (y + \frac{25}{16})^2 = \frac{1746}{256}$.

Aufg. 2. Wenn AB ein Durchmesser eines Kreises ist, so geht die Polare des Punktes A in Bezug auf irgend einen der Kreise, welche diesem Kreis orthogonal sind, durch den Punkt B.

Aufg. 3. Man bestimme den Kreis, welcher drei gegebene Kreise orthogonal durchschneidet. Man vollzieht die Bestimmung entweder wie in der Aufg. 1 oder auch nach Aufg. 2, indem man den Ort eines Punktes sucht, dessen Polaren in Bezug auf die drei Kreise sich in einem Punkte durchschneiden.

Aufg. 4. Man beweise den Satz: Das Quadrat der Tangente von einem Punkte eines Kreises zu einem andern ist in einem constanten Verhältniss zu der Senkrechten von dem Punkte auf ihre Radical-Axe.

Aufg. 5. Den Winkel (α) zu finden, unter welchem zwei Kreise sich schneiden. Bezeichnen wir die Radien der Kreise durch R und r, und durch D die Entfernung ihrer Centra, so ist $D^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha$, weil der Winkel, unter welchem die Kreise sich schneiden, gleich dem von ihren Radien im Durchschnittspunkt gebildeten Winkel ist.

Aufg. 6. Wenn ein beweglicher Kreis zwei feste Kreise unter constanten Winkeln schneidet, so schneidet er alle Kreise, die dieselben Radical-Axen haben, unter constanten Winkeln.

Wir repräsentiren die Gleichungen der zwei festen Kreise durch $S = 0$, $S' = 0$ und ihre Radien durch r, r'; dann genügen die Coordinaten des Centrums des beweglichen Kreises den Bedingungen

$$R^2 - 2Rr\cos\alpha = S \text{ und } R^2 - 2Rr'\cos\beta = S',$$

weil $D^2 - r^2$, das Quadrat der Tangente an den ersten festen Kreis, gleich S sein muss. (Art. 122.) Aus diesen Gleichungen schliessen wir

aber: $R^2 - 2R\frac{kr\cos\alpha + lr'\cos\beta}{k+l} = \frac{kS+lS'}{k+l}$, welches genau die Bedingung ist, unter welcher der bewegliche Kreis mit dem Kreis $kS + lS'$ den constanten Winkel γ bildet, für welchen

$$(k+l)r''\cos\gamma = kr\cos\alpha + lr'\cos\beta$$

ist, sobald durch r'' der Radius des Kreises $kS + lS'$ bezeichnet wird.

Aufg. 7. Ein Kreis, welcher zwei feste Kreise unter constanten Winkeln schneidet, berührt auch zwei feste Kreise.

Denn wir können das Verhältniss $k : l$ so bestimmen, dass $\gamma = 0$ oder $\cos\gamma = 1$ ist. Ist D die Centraldistanz der Kreise S und S', so ergiebt sich $(k+l)^2 r''^2 = (k+l)(kr^2 + lr'^2) - klD^2$; und indem wir den daraus für r'' abgeleiteten Werth in die Gleichung der letzten Aufgabe einsetzen, ergiebt sich zur Bestimmung von $\frac{k}{l}$ eine quadratische Gleichung.

143. Eine gemeinsame Tangente zweier Kreise zu contruiren.

Wir repräsentiren die beiden Kreise durch die Gleichungen $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, und symbolisch durch S,

$$(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 = r'^2 \text{ oder } S'.$$

Aus Artikel 120 ist bekannt, dass die Gleichung einer Tangente zu S die Form hat $(x-\alpha)(x'-\alpha) + (y-\beta)(y'-\beta) = r^2$; da nach Artikel 132 $\frac{x'-\alpha}{r} = \cos\theta$, $\frac{y'-\beta}{r} = \sin\theta$ gesetzt werden darf, so geht dieselbe über in $(x-\alpha)\cos\theta + (y-\beta)\sin\theta = r$.

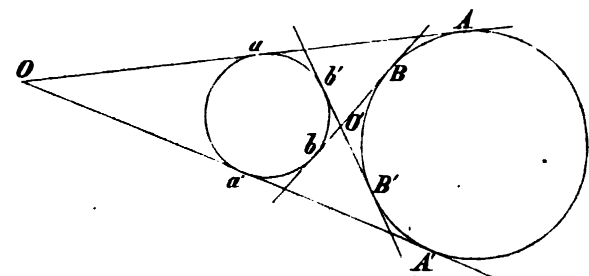
Ebenso ist $(x-\alpha')\cos\theta' + (y-\beta')\sin\theta' = r'$ eine Tangente von S'.

Wir suchen die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit diese zwei Gleichungen dieselbe gerade Linie darstellen. Zuerst erfahren wir aus der Vergleichung des Verhältnisses der Coefficienten von x und y, $\tan\theta = \tan\theta'$, also θ' entweder $= \theta$ oder $= 180^0 + \theta$. Wenn eine von diesen Bedingungen erfüllt ist, so vergleichen wir ferner die absoluten Glieder und finden im ersten Falle $(\alpha-\alpha')\cos\theta + (\beta-\beta')\sin\theta + r - r' = 0$, und im zweiten $(\alpha-\alpha')\cos\theta + (\beta-\beta')\sin\theta + r + r' = 0$.

Jede dieser Gleichungen ist in Bezug auf die Bestimmung von θ eine quadratische Gleichung; die Wurzeln der ersten Gleichung entsprechen den directen oder äusseren gemeinschaftlichen Tangenten Aa, $A'a'$, die Wurzeln der zweiten Gleichung den transversalen oder innern gemeinsamen Tangenten Bb, $B'b'$.

Wenn wir die Coordinaten des Berührungspunktes der gemeinsamen Tangente mit dem Kreis S zu wissen wünschen, müs-

sen wir in die eben gefundene Gleichung für cos θ den Werth



$\frac{x' - \alpha}{r}$ und für sin θ den Werth $\frac{y' - \beta}{r}$ substituiren und finden

$$(\alpha - \alpha')(x' - \alpha) + (\beta - \beta')(y' - \beta) + r(r - r') = 0,$$
$$(\alpha - \alpha')(x' - \alpha) + (\beta - \beta')(y' - \beta) + r(r + r') = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt mit der Gleichung S des Kreises combinirt eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die Coordinaten der Punkte A und A' sind, in welchen die directen gemeinschaftlichen Tangenten den Kreis S berühren; und man erhält wie in Artikel 121

$$(\alpha' - \alpha)(x - \alpha) + (\beta' - \beta)(y - \beta) = r(r - r')$$

als die Gleichung von AA', der Berührungssehne der directen gemeinsamen Tangenten. So ist gleicherweise

$$(\alpha' - \alpha)(x - \alpha) + (\beta' - \beta)(y - \beta) = r(r + r')$$

die Gleichung der Berührungssehne der transversalen gemeinschaftlichen Tangenten. Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Centrum des Kreises S zusammenfällt, so sind α und $\beta = 0$ und wir finden für die Gleichung der Berührungssehnen $\alpha' x + \beta' y = r(r \mp r')$.

Aufg. Finde die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$.

Die Berührungssehnen der gemeinschaftlichen Tangenten mit dem ersten Kreise sind $2x + y = 6$, $2x + y = 3$.

Die erste Sehne schneidet den Kreis in den Punkten (2, 2) $(\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$, deren Tangenten sind $y = 2$, $4x - 3y = 10$, und die zweite Sehne schneidet den Kreis in den Punkten (1, 1) $(\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$, in welchen die Tangenten sind $x = 1$, $3x + 4y = 5$.

144. Die Punkte O und O', in welchen die directen oder transversalen Tangenten sich schneiden, werden aus einem im nächsten Artikel auseinandergesetzten Grunde Centra der Aehn-

lichkeit beider Kreise genannt. Ihre Coordinaten können leicht bestimmt werden, denn O ist der Pol der Sehne AA', deren Gleichung ist $\frac{(\alpha' - \alpha)r}{r - r'}(x - \alpha) + \frac{(\beta' - \beta)r}{r - r'}(y - \beta) = r^2$, in Bezug auf den Kreis S.

Indem wir diese Gleichung mit der Gleichung der Polare des Punktes $x'y'$ vergleichen, $(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) = r^2$, erhalten wir

$$x' - \alpha = \frac{\alpha' - \alpha}{r - r'}r \text{ oder } x' = \frac{\alpha' r - \alpha r'}{r - r'},$$

$$y' - \beta = \frac{\beta' - \beta}{r - r'}r \text{ oder } y' = \frac{\beta' r - \beta r'}{r - r'}.$$

In der nämlichen Art findet man für die Coordinaten von O' die Werthe

$$x = \frac{\alpha' r + \alpha r'}{r + r'},\quad y = \frac{\beta' r + \beta r'}{r + r'}.$$

Diese Werthe der Coordinaten zeigen an, dass die Centra der Aehnlichkeit die Punkte sind, in denen die Verbindungslinie der Centra äusserlich und innerlich in dem Verhältniss der Radien getheilt ist.

Aufg. Finde die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0,\quad x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3.$$

Die Gleichung des Tangentenpaares zu $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ durch $x'y'$ ist (nach Art. 124)

$$[(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - r^2]\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2] =$$
$$[(x - \alpha)(x' - \alpha) + (y - \beta)(y' - \beta) - r^2]^2.$$

Nun sind die Coordinaten des äussern Aehnlichkeits-Centrums gefunden $(-2, -1)$ und es ist also das Paar der Tangenten durch dasselbe

$$25(x^2 + y^2 - 6x - 8y) = (5x + 5y - 10)^2,$$

oder $xy + x + 2y + 2 = 0$, oder $(x + 2)(y + 1) = 0$.

Da die gegebenen Kreise einander in reellen Punkten durchschneiden, so ist das andere Paar der gemeinsamen Tangenten imaginär; aber ihre Gleichung wird gefunden, indem man das Paar der Tangenten durch das andere Aehnlichkeits-Centrum $(\frac{22}{9}, \frac{31}{9})$ aufsucht; sie ist

$$40x^2 + xy + 40y^2 - 199x - 278y + 722 = 0.$$

145. **Jede durch den Durchschnitt der gemeinsamen Tangenten gezogene gerade Linie wird durch die beiden Kreise in Proportion getheilt.** Wenn man auf dem Radius vector irgend eines Punktes P einen Punkt Q so bestimmt, dass $OP = m \, . \, OQ$ ist, so sind das x und y des Punktes P resp. das $m$fache von dem x und y des Punktes Q, und wenn daher P eine Curve beschreibt, so wird der Ort von Q durch Substitution

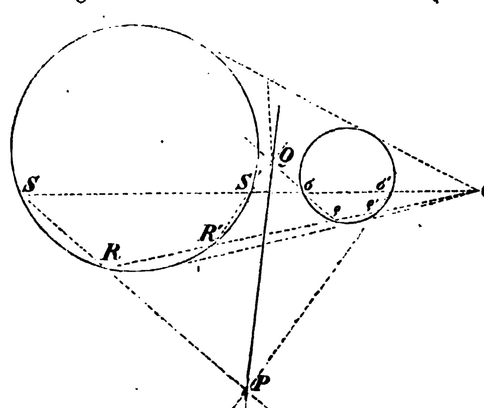
von mx, my für x und y in die Gleichung der durch P beschriebenen Curve gefunden.

Wenn nun die gemeinschaftlichen Tangenten zu Axen genommen werden, und wir OA durch a, OA' durch a' bezeichnen, so sind die Gleichungen beider Kreise (Artikel 119, Aufg. 2)

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2ax - 2ay + a^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2a'x - 2a'y + a'^2 = 0.$$

Aber die zweite Gleichung geht aus der ersten hervor, wenn wir $\frac{ax}{a'}$, $\frac{ay}{a'}$ für x, y in die erste Gleichung einsetzen, sie repräsentirt daher den durch Verlängerung jedes Radius vector des ersten Kreises im Verhältniss $a : a'$ erzeugten Ort.

Weil das Rechteck $O\varrho \,.\, O\varrho'$ constant ist, und weil wir gezeigt haben, das OR in einem constanten Verhältniss zu $O\varrho$ ist, so folgt, dass das Rechteck $OR \,.\, O\varrho' = OR' \,.\, O\varrho$ constant ist, wie auch die Linie durch O gezogen sei.



146. Wenn wir durch ein Aehnlichkeits-Centrum irgend zwei Linien ziehen, die den ersten Kreis in den Punkten R, R', S, S', und den zweiten in den Punkten ϱ, ϱ', σ, σ', schneiden, so sind die Sehnen RS, $\varrho\sigma$ und $R'S'$, $\varrho'\sigma'$ parallel, und die Sehnen RS, $\varrho'\sigma'$ und $R'S'$, $\varrho\sigma$ schneiden sich in der Radical-Axe der beiden Kreise.

Nehmen wir OR, OS zu Axen, so sehen wir (Art. 145), dass $OR = m \,.\, O\varrho$, $OS = m \,.\, O\sigma$ ist, und dass, wenn die Gleichung des Kreises $\varrho\sigma\varrho'\sigma'$ ist

$$a_{11}(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

die des andern sein muss

$$a_{11}(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + 2m(a_{13}x + a_{23}y) + m^2 a_{33} = 0$$

und daher ist die Gleichung der Radical-Axe (Artikel 135) $2(a_{13}x + a_{23}y) + (m+1)a_{33} = 0$. Sind ferner die Gleichungen

von $\varrho\sigma$ und $\varrho'\sigma'$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1$, so müssen die Gleichungen von RS und $R'S'$ sein $\frac{x}{ma}+\frac{y}{mb}=1$, $\frac{x}{ma'}+\frac{y}{mb'}=1$.

Es ist aus der Form der Gleichungen offenbar, dass RS zu $\varrho\sigma$ parallel ist; und RS muss $\varrho'\sigma'$ in der Linie

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)=1+m$$

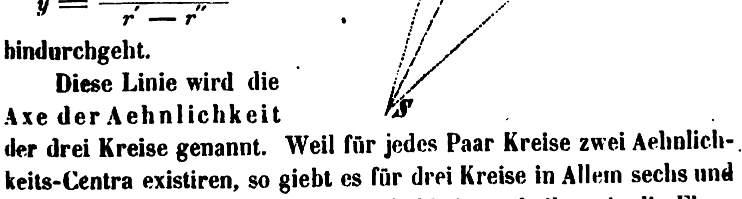
durchschneiden, oder, wie im Artikel 108, in der Linie $2(a_{13}x+a_{23}y)+(m+1)a_{33}=0$ der Radical-Axe beider Kreise.

Ein specieller Fall von diesem Theorem ist es, dass die Tangenten in R und ϱ parallel sind und die in R und ϱ' sich in der Radicalaxe begegnen.

147. Wenn drei Kreise gegeben sind, so geht die Verbindungslinie eines Aehnlichkeits-Centrums des ersten und zweiten Kreises mit einem Aehnlichkeits-Centrum des ersten und dritten auch durch ein Aehnlichkeits-Centrum des zweiten und dritten.

Wenn wir die Gleichung der Linie bilden, die die Punkte $\left(\frac{r\alpha'-r'\alpha}{r-r'}, \frac{r\beta'-r'\beta}{r-r'}\right)$, $\left(\frac{r\alpha''-r''\alpha}{r-r''}, \frac{r\beta''-r''\beta}{r-r''}\right)$ (Art. 144) verbindet, so erhalten wir (Aufg. 6 Art. 29)

$$[r(\beta'-\beta'')+r'(\beta''-\beta)+r''(\beta-\beta')]\,x-[r(\alpha'-\alpha'')+r'(\alpha''-\alpha)$$
$$+r''(\alpha-\alpha')]\,y+r(\beta'\alpha''-\beta''\alpha')+r'(\beta''\alpha-\beta\alpha'')+r''(\beta\alpha'-\beta'\alpha)=0.$$



Die Symmetrie dieser Gleichung beweist, dass die von ihr dargestellte Linie auch durch das dritte Centrum der Aehnlichkeit

$$x=\frac{r'\alpha''-r''\alpha'}{r'-r''},$$

$$y=\frac{r'\beta''-r''\beta'}{r'-r''}$$

hindurchgeht.

Diese Linie wird die **Axe der Aehnlichkeit** der drei Kreise genannt. Weil für jedes Paar Kreise zwei Aehnlichkeits-Centra existiren, so giebt es für drei Kreise in Allem sechs und diese sind längs vier Axen der Aehnlichkeit vertheilt, wie die Figur

zeigt. Die Gleichungen der andern drei werden gefunden, indem man entweder das Zeichen von r, von r' oder von r'' in der eben gegebenen Gleichung in das entgegengesetzte umwandelt.

Zusatz. Wenn ein Kreis (Σ) zwei andre (S und S') berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch ein Aehnlichkeits-Centrum von S und S'.

Denn wenn zwei Kreise sich berühren, so fällt eins ihrer Aehnlichkeits-Centra mit dem Berührungspunkt zusammen und nach dem eben bewiesenen Theorem muss die Verbindungslinie eines Aehnlichkeits-Centrums von S und Σ mit einem Aehnlichkeits-Centrum von S' und Σ auch durch ein Aehnlichkeits-Centrum von S und S' gehen.

Wenn der Kreis Σ die Kreise S und S' entweder beide äusserlich oder beide innerlich berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte auch durch das äussere Aehnlichkeits-Centrum von S und S'. Wenn Σ den einen Kreis äusserlich und den andern innerlich berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch das innere Aehnlichkeits-Centrum der Kreise S und S'.

*148. Man soll den Ort für das Centrum eines Kreises bestimmen, welcher drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

Wenn $S = 0$ oder $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$ die Gleichung des Kreises ist, so ist das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes von seinem Centrum $= (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$ oder $S + r^2$. Wenn daher ein Kreis vom Radius R den Kreis S unter dem Winkel φ schneidet, so müssen nach Art. 142 Aufg. 5 die Coordinaten seines Centrums die Bedingung $S = R^2 - 2Rr\cos\varphi$ erfüllen. Und wenn derselbe Kreis überdiess zwei andere Kreise unter dem nämlichen Winkel schneiden soll, so gelten die ferneren Bedingungen $S' = R^2 - 2Rr'\cos\varphi$, $S'' = R^2 - 2Rr''\cos\varphi$. Man kann aus diesen Gleichungen R^2 und $R\cos\varphi$ eliminiren, denn die Subtraction giebt

$$S - S' = 2R(r' - r)\cos\varphi, \quad S - S'' = 2R(r'' - r)\cos\varphi,$$

also $(S - S')(r - r'') = (S - S'')(r - r')$; die Gleichung einer geraden Linie, in welcher das Centrum des Kreises liegen muss. Sie geht offenbar durch das Radical-Centrum (Art. 138) und wenn wir nach Art. 135 die Werthe der Differenzen $S - S'$, $S - S''$ einsetzen, so ergiebt sich für den Coefficienten von x in dieser

Gleichung $-2\{\alpha(r'-r'')+\alpha'(r''-r)+\alpha''(r-r')\}$ und
von y $-2\{\beta(r'-r'')+\beta'(r''-r)+\beta''(r-r')\}$.
Die Vergleichung dieser Werthe mit denen der Coefficienten in der Gleichung der Aehnlichkeits-Axe im vorigen Artikel zeigt (Art. 32), dass diese Gerade eine vom Aehnlichkeits-Centrum auf eine Aehnlichkeits-Axe gefüllte Normale ist. Man hat übrigens die Wahl, welchen der zwei supplementären Winkel, welche die Kreise mit einander bilden, man als den Winkel ihres Durchschnitts betrachten will. Die Formel des Art. 142, welche gebraucht worden ist, setzt voraus, dass der Winkel, unter welchem die Kreise sich schneiden, durch den Winkel gemessen sei, welchen die Entfernung ihrer Centra am Schnittpunkt bestimmt und unter dieser Voraussetzung ist der betrachtete Ort eine Normale zur äusseren Axe der Aehnlichkeit. Wird diese Einschränkung aufgehoben, so geht die benutzte Formel in die neue $S=R^2\pm 2Rr\cos\varphi$ über, d. h. man kann das Vorzeichen der r, r', r'' in den vorhergehenden Gleichungen in das entgegengesetzte überführen und daher ist nach Art. 147 der Ort eine Normale vom Aehnlichkeitscentrum auf irgend eine der vier Aehnlichkeits-Axen*).

Wenn zwei Kreise sich innerlich berühren, so ist der Winkel ihres Durchschnitts Null, weil die nach dem Punkte gehenden Radien zusammenfallen. Wenn sich dieselben äusserlich berühren, so ist derselbe Winkel 180°, da der eine dieser Radien eine Verlängerung des andern ist. Aus dem eben Bewiesenen ergiebt sich daher, dass die Normale auf die äussere Axe der Aehnlichkeit das Centrum eines Kreises enthält, welcher die drei gegebenen Kreise alle äusserlich oder alle innerlich berührt. Bei Vertauschung des Zeichens von r bezeichnet die Glei-

*) In der That haben alle Kreise, welche drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneiden, eine der Aehnlichkeits-Axen zur gemeinschaftlichen Radical-Axe. Sind Σ, Σ', Σ'' drei Kreise, welche die gegebenen Kreise unter den Winkeln φ, φ', φ'' resp. schneiden, so müssen die Coordinaten des Centrums von S die Bedingungen
$\Sigma=r^2-2rR\cos\varphi$, $\Sigma'=r^2-2rR'\cos\varphi'$, $\Sigma''=r^2-2rR''\cos\varphi''$
also $(R\cos\varphi-R''\cos\varphi'')(\Sigma-\Sigma')=(R\cos\varphi-R'\cos\varphi')(\Sigma-\Sigma'')$ erfüllen. Diese Gleichung, welche als Gleichung einer geraden Linie erscheint, aber durch die Coordinaten der Centra von S, S', S'' erfüllt wird, die nicht in gerader Linie liegen, ist eine identische Relation von der Form $\Sigma=k\Sigma'+l\Sigma''$ und zeigt somit, dass die drei Kreise eine gemeinschaftliche Radical-Axe haben.

chung des gefundenen Ortes eine Normale zu einer der andern Aehnlichkeits-Axen, welche das Centrum desjenigen Kreises enthält, der den Kreis S äusserlich und die beiden andern Kreise innerlich berührt und umgekehrt. In Allem können acht Kreise beschrieben werden, welche drei gegebene Kreise berühren und ihre Centra liegen paarweis in den vier Normalen, welche vom Radicalcentrum auf die vier Aehnlichkeits-Axen gefällt werden.

*149. **Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt.** Wir haben einen Ort gefunden, in welchem das Centrum liegt und könnten durch Elimination von R zwischen den beiden Bedingungen $S = R^2 - 2Rr$, $S' = R^2 - 2Rr'$ einen andern Ort dieser Art finden. Derselbe würde aber keinen Kreis darstellen und giebt keine elementare geometrische Construction. Um diese Invonvenienz zu beseitigen, bestimmen wir (nach Gergonne „Annales des Mathém.“ VII, 289) statt der Coordinaten des Centrums des berührenden Kreises die Coordinaten seines Berührungspunktes mit einem der gegebenen Kreise. Wir haben schon eine diese Coordinaten vereinigende Relation, weil der Punkt auf einem gegebenen Kreise liegt; wenn wir also noch eine andre Relation zwischen ihnen finden, so reicht diess zu seiner Bestimmung vollständig hin.

Nehmen wir zur Vereinfachung das Centrum des Kreises, dessen Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise wir finden wollen, zum Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. nehmen wir $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so müssen die Coordinaten A und B des Centrums von Σ nach dem letzten Artikel die Relationen erfüllen

$$S - S' = 2R(r - r'), \quad S - S'' = 2R(r - r'').$$

Wenn aber x und y die Coordinaten des Berührungspunktes von Σ mit S sind, so haben wir aus ähnlichen Dreiecken $A = \frac{r(R+r)}{r}$, $B = \frac{y(R+r)}{r}$. Die Substitution von mx, my für x, y in die Gleichung einer geraden Linie liefert dasselbe Ergebniss, wie die Multiplication der ganzen Gleichung mit m und nachmalige Verminderung des absoluten Glieds um seinen $(m-1)$fachen Betrag; in Erinnerung, dass das absolute Glied in $S - S'$ (Art. 135) $r'^2 - r^2 - \alpha'^2 - \beta'^2$ ist, erhalten wir als das Resultat dieser Substitution für A und B in die Gleichung $(S - S') = 2R(r - r')$

$$\frac{R+r}{r}(S - S') + \frac{R}{r}(\alpha'^2 + \beta'^2 + r^2 - r'^2) = 2R(r - r'),$$

oder $(R + r)(S - S') = R[(r - r')^2 - \alpha'^2 - \beta'^2]$. Ebenso wird $(R + r)(S - S'') = R[(r - r'')^2 - \alpha''^2 - \beta''^2]$.

Die Elimination von R aus diesen Gleichungen lehrt, dass der Berührungspunkt einer der Durchschnittspunkte des Kreises S mit der geraden Linie

$$\frac{S - S'}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2} = \frac{S - S''}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r'')^2} \text{ ist.}$$

150. Um nun die geometrische Lösung des Problems zu vervollständigen, ist es nöthig, zu zeigen, wie die gerade Linie, deren Gleichung eben gefunden wurde, zu construiren ist.

Sie geht offenbar durch das Radical-Centrum der Kreise und ein zweiter Punkt von ihr wird wie folgt gefunden. Schreiben wir $S - S'$ in voller Länge (Artikel 135), so ist die Gleichung

$$\frac{2\alpha'x+2\beta'y+r'^2-r^2-\alpha'^2-\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2-(r-r')^2} = \frac{2\alpha''x+2\beta''y+r''^2-r^2-\alpha''^2-\beta''^2}{\alpha''^2+\beta''^2-(r-r'')^2}.$$

Und wenn wir zu beiden Seiten der Gleichung 1 addiren, so erhalten wir $\dfrac{\alpha'x + \beta'y + (r' - r)r}{\alpha'^2 + \beta'^2 - (r - r')^2} = \dfrac{\alpha''x + \beta''y + (r'' - r)r}{\alpha''^2 + \beta''^2 - (r - r'')^2}$;

welches zeigt, dass die obige Linie durch den Durchschnitt von $\alpha'x + \beta'y + (r' - r)r = 0$ und $\alpha''x + \beta''y + (r'' - r)r = 0$ geht.

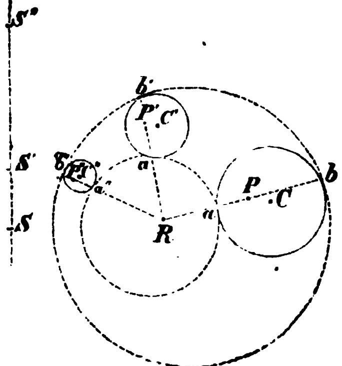
Aber die erste dieser geraden Linien ist nach Artikel 143 die Berührungssehne der gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise S und S' im Kreise S; oder in andern Worten (Art. 144): Sie ist die Polare des Aehnlichkeits-Centrums dieser Kreise in Bezug auf S. Ebenso ist die zweite gerade Linie die Polare des Aehnlichkeits-Centrums der Kreise S und S''; daher — weil der Durchschnitt irgend zweier Linien der Pol der Verbindungslinie ihrer Pole ist, — ist der Durchschnitt der Linien:
$\alpha'x + \beta'y + (r' - r)r = 0$ und $\alpha''x + \beta''y + (r'' - r)r = 0$ der Pol der Aehnlichkeits-Axe der drei Kreise in Bezug auf den Kreis S.

Wir erhalten somit die folgende Construction: Wir ziehen irgend eine der vier Aehnlichkeits-Axen der drei Kreise, nehmen ihren Pol in Bezug auf jeden Kreis und verbinden die so gefundenen Punkte (P, P', P'') mit dem Radical-Centrum; wenn die Verbindungslinien die Kreise in den Punktepaaren ab, $a'b'$, $a''b''$ schneiden, so ist der durch a, a', a'' gehende Kreis einer von denen, welche die drei Kreise berühren, und der Kreis durch b, b', b'' ein andrer.

Indem man diess Verfahren mit den andern drei Axen der Aehnlichkeit wiederholt, erhält man die andern sechs berührenden Kreise.

151. Es ist nützlich zu zeigen, wie die vorigen Resultate ohne algebraische Rechnungen abgeleitet werden können.

1.) Nach Art. 147 Zusatz schneiden sich die Linien ab, $a'b'$, $a''b''$ in einem Punkte, nämlich im Centrum der Aehnlichkeit der Kreise $aa'a''$, $bb'b''$.



2.) Ebenso schneiden sich $a'a''$, $b'b''$ in S, dem Centrum der Aehnlichkeit von C', C''.

3.) Daher schneiden sich (Art. 146) die transversalen Linien $a'b'$, $a''b''$ in der Radical-Axe von C', C''; ebenso $a''b''$, ab in der Radical-Axe von C'', C. Daher muss der Punkt R (das Centrum der Aehnlichkeit von $aa'a''$, $bb'b''$) das Radical-Centrum der Kreise $CC'C''$ sein.

4.) Weil auch $a'b'$, $a''b''$ durch ein Centrum der Aehnlichkeit von $aa'a''$, $bb'b''$ gehen, so schneiden sich (Art. 146) $a'a''$, $b'b''$ in der Radical-Axe dieser zwei Kreise. Daher müssen auch die Punkte S' und S'' in derselben Radical-Axe liegen und daher ist $SS'S''$ oder die Axe der Aehnlichkeit der Kreise C, C', C'' die Radical-Axe der Kreise $aa'a''$, $bb'b''$.

5.) Weil $a''b''$ durch das Centrum der Aehnlichkeit von $aa'a''$, $bb'b''$ geht, so müssen die Tangenten an diese Kreise in den Punkten, wo sie dieselben schneidet, sich in der Radicalaxe $SS'S''$ begegnen. Aber dieser Durchschnittspunkt muss offenbar der Pol von $a''b''$ in Bezug auf den Kreis C'' sein. Weil nun der Pol von $a''b''$ in $SS'S''$ liegt, so muss der Pol von $SS'S''$ in Bezug auf den Kreis C'' in $a''b''$ liegen. Also wird $a''b''$ construirt, indem man das Radical-Centrum mit dem Pol von $SS'S''$ in Bezug auf C'' verbindet.

6.) Weil das Aehnlichkeits-Centrum zweier Kreise in der Verbindungslinie ihrer Centra liegt, und die Radical-Axe zu dieser Linie senkrecht ist, so lernen wir, wie in Art. 148, dass die Verbindungslinie der Centra von $aa'a''$ und $bb'b''$ durch R geht und auf $SS'S''$ senkrecht ist.

Zehntes Kapitel.

Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf die Gleichung des Kreises.

152. Wenn wir eine Gleichung zweiten Grades in der im vierten Kapitel auseinandergesetzten abgekürzten Bezeichnungsweise ausgedrückt haben und zu wissen wünschen, ob sie einen Kreis darstellt, so haben wir nur auf x und y Coordinaten zurückzugehen, indem wir für jede Abkürzung x_1 ihr Aequivalent $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1$ einsetzen, um dann zu untersuchen, ob der Coefficient von xy in der transformirten Gleichung verschwindet, und die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich sind. Die folgenden Beispiele mögen hinreichen, diess zu erläutern.

Ein Punkt bewege sich so, dass die Producte seiner senkrechten Abstände von den beiden Paaren der Gegenseiten eines Vierecks in einem gegebenen Verhältniss stehen; unter welchen Bedingungen ist der Ort dieses Punktes ein Kreis?

Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Gleichungen der vier Seiten des Vierecks, so ist die Gleichung des Ortes $x_1 x_3 = k x_2 x_4$; sie repräsentirt eine Curve des zweiten Grades, welche durch die Ecken des Vierecks geht, weil ihr durch jede der vier Voraussetzungen genügt wird

$$x_1=0,\ x_2=0;\ x_1=0,\ x_4=0;\ x_2=0,\ x_3=0;\ x_3=0,\ x_4=0.$$

Um zu erkennen, ob diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, schreiben wir sie in voller Länge:

$$(x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1)(x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3) =$$
$$k(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2)(x \cos \alpha_4 + y \sin \alpha_4 - p_4).$$

Indem wir ausmultipliciren, und den Coefficienten von x^2 mit dem von y^2 gleich und den von xy gleich Null setzen, erhalten wir die Bedingungen

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_3) = k \cos(\alpha_2 + \alpha_4) \text{ und } \sin(\alpha_1 + \alpha_3) = k \sin(\alpha_2 + \alpha_4).$$

Die Quadrate dieser Gleichungen liefern durch ihre Addition die Bedingung $k = \pm 1$ und aus der Erfüllung derselben folgt entweder $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$ oder $= 180^0 + \alpha_2 + \alpha_4$; und daraus ebenso $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3$ oder $= 180^0 + \alpha_4 - \alpha_3$. Da $\alpha_1 - \alpha_2$ der Winkel zwischen den vom Coordinatenanfang auf die

Linien α_1 und α_2 gefällten Senkrechten und daher das Supplement des von α_1 und α_2 selbst gebildeten Winkels ist (Art. 61), welcher den Anfangspunkt der Coordinaten enthält, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn das Viereck von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ in einen Kreis einschreibbar ist. (Euklid, III, 22.) Und es ergiebt sich ohne weitere Untersuchung, dass für einen innerhalb des Vierecks gelegenen Coordinatenanfang $k = -1$ zu nehmen und der von α_1 und α_2 gebildete Winkel das Supplement des von α_3 und α_4 eingeschlossenen ist (beide so genommen, dass der Coordinatenanfang innerhalb derselben liegt), während der Lage des Coordinaten-Anfangspunktes ausserhalb des Vierecks der Werth $k = +1$ und die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel entspricht.

153. Unter welcher Bedingung ist der Ort eines Punktes ein Kreis, für welchen das Quadrat der Entfernung von der Basis eines festen Dreiecks in einem constanten Verhältniss zum Producte der Entfernungen von den Seiten desselben steht?

Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Seiten des Dreiecks, so ist die Gleichung des Ortes $x_1 x_3 = k x_2^2$. Wenn wir nun die Punkte suchen, wo die Linie $x_1 = 0$ diesen Ort schneidet, indem wir in seiner Gleichung $x_1 = 0$ machen, so erhalten wir das vollkommne Quadrat $x_2^2 = 0$. Also schneidet $x_1 = 0$ den Ort in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. nach Art. 104 sie berührt den Ort im Punkte $(x_1 x_2)$. Ebenso berührt x_3 den Ort im Punkte $(x_2 x_3)$. Also sind x_1 und x_3 beide Tangenten und x_2 ist ihre Berührungssehne.

Um nun zu erkennen, ob der Ort ein Kreis ist, schreiben wir seine Gleichung wie im letzten Artikel in voller Länge und erhalten, indem wir die Kennzeichen des Artikel 115 anwenden, die Bedingungen $\cos(\alpha_1 + \alpha_3) = k \cos 2\alpha_2$, $\sin(\alpha_1 + \alpha_3) = k \sin 2\alpha_2$, so dass wie im letzten Art. $k = 1$ und $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3$ ist; somit wird das Dreieck gleichschenklig. Also dürfen wir schliessen, dass wenn man von irgend einem Punkte eines Kreises auf zwei Tangenten und ihre Berührungssehne Perpendikel fällt, das Quadrat der letztern immer gleich dem Rechteck unter den zwei erstern ist.

Aufg. Unter welchen Bedingungen ist der Ort eines Punktes ein Kreis, für welchen die Summe der Quadrate der von ihm auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Senkrechten constant ist?

Die Gleichung des Ortes ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2$ und die Bedingungen, unter denen diese einen Kreis repräsentirt, sind

$\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 + \cos 2\alpha_3 = 0$, $\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_3 = 0$

$\cos 2\alpha_1 = -2\cos(\alpha_2+\alpha_3)\cos(\alpha_2-\alpha_3)$, $\sin 2\alpha_1 = -2\sin(\alpha_2+\alpha_3)\cos(\alpha_2-\alpha_3)$.

Durch Quadriren und Addiren erhält man

$$1 = 4\cos^2(\alpha_2 - \alpha_3) \text{ und } \alpha_2 - \alpha_3 = 60^0.$$

Ebenso findet man jeden der beiden andern Winkel des Dreiecks gleich 60^0, so dass das Dreieck gleichseitig sein muss.

'154. **Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher dem aus den Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gebildeten Dreieck umgeschrieben ist.**

Eine Curve zweiten Grades, welche dem gegebenen Dreieck umgeschrieben ist, wird allgemein durch eine Gleichung von der Form $a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$ dargestellt, da derselben durch jede der Voraussetzungen

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ genügt wird.

Die Bedingungen, unter welchen diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, werden durch das Verfahren des Artikel 152 gefunden:

$$a_{23}\cos(\alpha_2+\alpha_3) + a_{31}\cos(\alpha_3+\alpha_1) + a_{12}\cos(\alpha_1+\alpha_2) = 0,$$
$$a_{23}\sin(\alpha_2+\alpha_3) + a_{31}\sin(\alpha_3+\alpha_1) + a_{12}\sin(\alpha_1+\alpha_2) = 0.$$

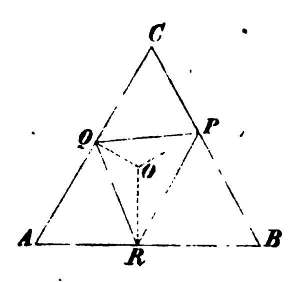
Im Art. 65 ist aber gezeigt worden, dass die Grössen a_1, a_2, a_3, welche zweien Gleichungen von der Form $a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' = 0$, $a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'' = 0$ genügen müssen, zu den Differenzen $x_2'x_3'' - x_2''x_3'$, $x_3'x_1'' - x_3''x_1'$, $x_1'x_2'' - x_1''x_2'$ proportional sind. Im gegenwärtigen Falle sind daher die Werthe von a_{23}, a_{31}, a_{12} zu $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, $\sin(\alpha_3 - \alpha_1)$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ oder nach Art. 61 zu $\sin A_1$, $\sin A_2$, $\sin A_3$ proportional; demnach ist die Gleichung des einem Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ umgeschriebenen Kreises $x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 = 0$.

155. Die geometrische Bedeutung der eben gefundenen Gleichung ist der Beachtung werth. Wenn wir von irgend einem Punkt O die Senkrechten OP, OQ auf die Linien x_1, x_2 fällen, so können x_1, x_2 die Längen dieser Senkrechten sein; und weil der Winkel zwischen ihnen das Supplement von C ist, so ist die Grösse $x_1x_2 \sin A_3$ das Doppelte des Inhalts des Dreiecks OPQ. In gleicher Art sind $x_2x_3 \sin A_1$ und $x_3x_1 \sin A_2$ das Doppelte der Dreiecke OQR und ORP. Also ist die Grösse

$$x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3$$

das Doppelte des Inhalts des Dreiecks PQR und die im letzten

Artikel gefundene Gleichung sagt aus, dass der Inhalt des Dreiecks PQR verschwindet, solange der Punkt O auf der Peripherie des umgeschriebenen Kreises genommen wird; d. h. dass die drei Punkte P, Q, R alsdann in einer geraden Linie liegen. Wenn gefordert ist, den Ort eines Punktes O so zu bestimmen, dass das Dreieck PQR, welches die Fusspunkte der von ihm auf die Seiten des gegebenen Dreiecks gefällten Perpendikel zu Ecken hat, von constantem Inhalt sei, so wird die Gleichung des Ortes $x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = \text{const.}$, und weil diese von der Gleichung des umgeschriebenen Kreises nur im constanten Gliede abweicht, so ist es (Artikel 117) die Gleichung eines mit ihm concentrischen Kreises.



156. Aus der Gleichung $a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2 = 0$ können für alle möglichen Werthe der a_{ij} gültig, also auf alle dem Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ umgeschriebenen Curven zweiten Grades bezüglich, folgende Ergebnisse geschlossen werden. Wenn man die Gleichung in der Form
$x_3 (a_{23} x_2 + a_{31} x_1) + a_{12} x_1 x_2 = 0$ schreibt und erinnert, dass die Gerade $x_3 = 0$ die Curve in den Punkten schneidet, wo sie die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ trifft, weil die Substitution $x_3 = 0$ die Gleichung der Curve auf $x_1 x_2 = 0$ reducirt, so erhellt mit demselben Grunde, dass die zwei Punkte, in denen die Gerade $a_{23} x_2 + a_{31} x_1 = 0$ die Curve schneidet, diejenigen sind, welche sie mit den Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gemein hat; da aber diese letztern zusammenfallen, da $a_{23} x_2 + a_{31} x_1 = 0$ durch den Schnittpunkt von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ geht, so ist die Gerade $a_{23} x_2 + a_{31} x_1 = 0$ die Tangente der Curve im Punkte $(x_1 x_2)$. (Art. 104.) Im Falle des Kreises ist die Gleichung dieser Tangente $x_1 \sin A_2 + x_2 \sin A_1 = 0$ und da nach Art. 64 $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 = 0$ eine Parallele zur Basis $x_3 = 0$ durch die Gegenecke des Dreiecks darstellt, so schliesst man (Art. 55), dass die Tangente in einer Ecke mit der einen anliegenden Seite denselben Winkel bildet, den die Gegenseite mit der andern anliegenden Seite macht. (Euklid, III, 32.)

Wenn man die Gleichungen der Tangenten des Kegelschnitts

in den Ecken des Dreiecks in der Form $\frac{x_2}{a_{31}}+\frac{x_3}{a_{12}}=0$, $\frac{x_3}{a_{12}}+\frac{x_1}{a_{23}}=0$, $\frac{x_1}{a_{23}}+\frac{x_2}{a_{31}}=0$ schreibt, so sieht man, dass die Schnittpunkte derselben mit den Gegenseiten in einer geraden Linie liegen, deren Gleichung ist $\frac{x_1}{a_{23}}+\frac{x_2}{a_{31}}+\frac{x_3}{a_{12}}=0$. Subtrahirt man ferner die Gleichungen der Tangenten paarweis von einander, so erhält man die Gleichungen der geraden Linien, welche die Ecken des ursprünglichen Dreiecks mit den entsprechenden Ecken des Dreiecks der Tangenten verbinden, nämlich

$\frac{x_2}{a_{31}}-\frac{x_3}{a_{12}}=0$, $\frac{x_3}{a_{12}}-\frac{x_1}{a_{23}}=0$, $\frac{x_1}{a_{23}}-\frac{x_2}{a_{31}}=0$ und erkennt, dass diese drei Geraden sich in einem Punkte schneiden. (Art. 40; Art. 60, Aufg. 3.)

157. Wenn $x_1'x_2'x_3'$, $x_1''x_2''x_3''$ die Coordinaten von zwei Punkten der Curve sind, so ist die Gleichung ihrer geraden Verbindungslinie $\frac{a_{23}}{x_1'x_1''}x_1+\frac{a_{31}}{x_2'x_2''}x_2+\frac{a_{12}}{x_3'x_3''}x_3=0$. Denn wenn man in dieselbe x_1', x_2', x_3' für x_1, x_2, x_3 substituirt, so wird die Gleichung erfüllt, weil x_1'', x_2'', x_3'' der Gleichung der Curve genügen, die man in der Form $\frac{a_{23}}{x_1}+\frac{a_{31}}{x_2}+\frac{a_{12}}{x_3}=0$ schreiben kann; und in derselben Art wird die Gleichung auch durch x_1'', x_2'', x_3'' erfüllt. Auf Grund dieser Gleichung kann man die Tangente der Curve im Punkte x_1', x_2', x_3' in der Form

$\frac{a_{23}}{x_1'^2}x_1+\frac{a_{31}}{x_2'^2}x_2+\frac{a_{12}}{x_3'^2}x_3=0$ schreiben und sieht umgekehrt, dass für $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ als die Gleichung einer Tangente der Curve die Coordinaten x_1', x_2', x_3' des Berührungspunktes durch die Relationen $\frac{a_{23}}{x_1'^2}=\xi_1$, $\frac{a_{31}}{x_2'^2}=\xi_2$, $\frac{a_{12}}{x_3'^2}=\xi_3$ gegeben sind. Indem man also aus diesen Gleichungen x_1', x_2', x_3' bestimmt und ihre Werthe in die Gleichung der Curve substituirt, welche durch den Punkt x_1', x_2', x_3' erfüllt sein muss, erhält man $(a_{23}\xi_1)^{\frac{1}{2}}+(a_{31}\xi_2)^{\frac{1}{2}}+(a_{12}\xi_3)^{\frac{1}{2}}=0$ als die Bedingung, unter welcher die gerade Linie $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ die Curve $a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{12}x_1x_2=0$ berührt. Nach dem Früheren bezeichnen wir dieselbe als die Tangentialgleichung

der Curve oder als ihre Gleichung in Liniencoordinaten. Sie hätte auch gefunden werden mögen durch Elimination von x_3 zwischen der Gleichung der Geraden und der Gleichung der Curve und durch die Bildung der Bedingung, unter welcher die so erhaltene Gleichung in $x_1 : x_2$ gleiche Wurzeln hat. Man sieht leicht, dass sie für $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ aus der allgemeinen Form der Tangentialgleichung des Kegelschnitts im Art. 114 hervorgeht.

158. **Man soll die Bedingung entwickeln, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades** $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$ **einen Kreis darstellt.**

Man kann dieselbe von dem elementaren Satze aus erhalten, der im Art. 134, Aufg. 1 bewiesen ist, und der die Gleichheit der vom Kreise bestimmten Rechtecke in den durch einen Punkt gehenden Transversalen ausspricht. Denn wenn die Seiten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$ den Kreis in den Punktepaaren $a, b;\ c, d:\ e, f$ respective schneiden, so übertragen sich die Relationen $A_1 c \,.\, A_1 d = A_1 e \,.\, A_1 f$, $A_2 e \,.\, A_2 f = A_2 a \,.\, A_2 b$, $A_3 a \,.\, A_3 b = A_3 c \,.\, A_3 d$ in die Sprache des trimetrischen Punkt-Coordinatensystems in folgender Art. Sind die den Punkten e, f entsprechenden Werthe von x_2 durch x_2', x_2'' und die den Punkten c, d entsprechenden von x_3 durch x_3''', x_3'''', die Seiten des Fundamentaldreiecks durch s_1, s_2, s_3 bezeichnet, wie früher, so geht die Relation $A_1 c \,.\, A_1 d = A_1 e \,.\, A_1 f$ durch $A_1 c \,.\, A_1 d \,.\, \sin^2 A_1 = A_1 e \,.\, A_1 f \,.\, \sin^2 A_1$ in $x_3''' x_3'''' = x_2' x_2''$ über. Zur Bestimmung der Werthe von x_3''', x_3'''' und x_1', x_2'' erhält man aber die durch die successive Substitution von $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in die allgemeine Gleichung entstehenden Gleichungen $a_{11} x_1^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 = 0$, $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$, respective verbunden mit den aus $s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = M$ hervorgehenden Relationen $s_1 x_1 + s_3 x_3 = M$, $s_1 x_1 + s_2 x_2 = M$. So erhält man für die Bestimmung der den Schnittpunkten mit $A_1 A_2$ entsprechenden Werthe von x_3 die Gleichung

$$(a_{11} s_3^2 + a_{33} s_1^2 - 2 a_{13} s_1 s_3)\, x_3^2 + 2 M (a_{13} s_1 - a_{11} s_3)\, x_3 + a_{11} M^2 = 0,$$

und für die Werthe von x_2 bezüglich der Schnittpunkte mit $A_1 A_3$

$$(a_{11} s_2^2 + a_{22} s_1^2 - 2 a_{12} s_1 s_2)\, x_2^2 + 2 M (a_{12} s_1 - a_{11} s_2)\, x_2 + a_{11} M^2 = 0;$$

Daher ist

$$x_3''' x_3'''' = \frac{a_{11} M^2}{a_{11} s_3^2 + a_{33} s_1^2 - 2 a_{13} s_1 s_3},\ x_2' x_2'' = \frac{a_{11} M^2}{a_{11} s_2^2 + a_{22} s_1^2 - 2 a_{12} s_1 s_2}$$

und die erste der obigen Bedingungen also

$$a_{11}s_3^2 + a_{33}s_1^2 - 2a_{13}s_1s_3 = a_{11}s_2^2 + a_{22}s_1^2 - 2a_{12}s_1s_2.$$

Die beiden andern geben analoge Relationen und ihre Vereinigung bildet die Doppelbedingung $a_{11}s_2^2 + a_{22}s_1^2 - 2a_{12}s_1s_2 = a_{22}s_3^2 + a_{33}s_2^2 - 2a_{23}s_2s_3 = a_{33}s_1^2 + a_{11}s_3^2 - 2a_{13}s_1s_3$, in der man noch die Seiten s_1, s_2, s_3 durch die sinus der Gegenwinkel ersetzen kann.

Zu demselben Ergebniss führt aber auch der folgende ganz verschiedene Weg. Da die Glieder vom zweiten Grade $x^2 + y^2$ in den Gleichungen aller Kreise dieselben sind, so können die Gleichungen von Kreisen nur im linearen Theile von einander verschieden sein; wenn also $S = 0$ einen Kreis repräsentirt, so ist $S + lx + my + n = 0$ die Gleichung eines beliebigen Kreises. Ebenso haben wir in trimetrischen Coordinaten, wenn die Gleichung irgend eines Kreises gefunden ist, nur zu ihr Glieder $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ (welche, damit die Gleichung homogen werde, durch die Constante $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3$ multiplicirt werden) zu addiren und erhalten eine Gleichung, die einen beliebigen Kreis darstellt. Daher kann nothwendig die Gleichung eines jeden Kreises in die Form

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) + k(x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3) = 0$$

gebracht werden. Und wenn man die Coefficienten von x_1^2, x_2^2, x_3^2 in dieser Form mit denen in der allgemeinen Gleichung vergleicht, so erkennt man, die letztere müsse, wenn sie einen Kreis darstellen soll, auf die Form

$$\left(\frac{a_{11}}{\sin A_1}x_1 + \frac{a_{22}}{\sin A_2}x_2 + \frac{a_{33}}{\sin A_3}x_3\right)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) + k(x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3) = 0$$

reducirbar sein, und eine Vergleichung der noch übrigen Coefficienten giebt

$$2a_{23} \sin A_2 \sin A_3 = a_{33} \sin^2 A_2 + a_{22} \sin^2 A_3 + k \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3,$$
$$2a_{31} \sin A_3 \sin A_1 = a_{11} \sin^2 A_3 + a_{33} \sin^2 A_1 + k \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3,$$
$$2a_{12} \sin A_1 \sin A_2 = a_{22} \sin^2 A_1 + a_{11} \sin^2 A_2 + k \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3;$$

oder durch Elimination von k

$$a_{22} \sin^2 A_3 + a_{33} \sin^2 A_2 - 2a_{23} \sin A_2 \sin A_3 = a_{33} \sin^2 A_1 + a_{11} \sin^2 A_3 - 2a_{31} \sin A_3 \sin A_1 = a_{11} \sin^2 A_2 + a_{22} \sin^2 A_1 - 2a_{12} \sin A_1 \sin A_2.$$

Wenn die Gleichungen von zwei Kreisen in der Form

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$+ k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0,$$
$$(a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$+ k(x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0$$

geschrieben sind, so ist die Gleichung ihrer Radical-Axe

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - (a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3) = 0;$$

und $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ ist die Radical-Axe des ersten Kreises mit dem Kreise, welcher dem Fundamentaldreieck umgeschrieben ist.

Aufg. 1. Bestätige, dass $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ einen Kreis repräsentirt, wenn $\angle A_1 = \angle A_3$ ist. (Art. 154.)

Die Gleichung kann in der Form geschrieben werden

$$x_1 x_2 \sin A_3 + x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 - x_2(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3) = 0$$

Aufg. 2. Die drei Mittelpunkte der Seiten und die drei Fusspunkte der Höhen in einem Dreieck liegen in demselben Kreise. Die Gleichung

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 + x_3^2 \sin A_3 \cos A_3 -$$
$$(x_1 x_2 \sin A_3 + x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2) = 0$$

repräsentirt eine Curve zweiten Grades, welche diese sechs Punkte enthält. Denn für $x_3 = 0$ erhält man aus ihr

$$x_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + x_2^2 \sin A_2 \cos A_2 - x_1 x_2 (\sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \sin A_2) = 0,$$

was in die Factoren $(x_1 \sin A_1 - x_2 \sin A_2)$ und $(x_1 \cos A_1 - x_2 \cos A_2)$ zerfällt; etc. Diese Curve ist aber ein Kreis, denn man kann ihre Gleichung schreiben

$$(x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3)(x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3)$$
$$- 2(x_1 x_2 \sin A_3 + x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2) = 0.$$

Man sieht daraus, dass die Radical-Axe des umgeschriebenen Kreises und des durch die Mittelpunkte der Seiten gehenden Kreises die Gerade $x_1 \cos A_1 + x_2 \cos A_2 + x_3 \cos A_3 = 0$ ist, d. h. die Axe der Homologie, welche das gegebene Dreieck mit dem durch die Fusspunkte der Höhen gebildeten Dreieck bestimmt.

159. Die Gleichungen der Kreise zu bilden, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren.

Die allgemeine Gleichung einer Curve zweiten Grades, welche die drei Seiten berührt, ist

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 a_1 x_3 x_1 - 2 a_1 a_2 x_1 x_2 = 0^{*)}.$$

---

*) Es muss bemerkt werden, dass die Gründe des Beweises anwendbar bleiben würden, wenn die Doppelproducte das Zeichen $\pm$ erhalten hätten; giebt man jedoch denselben allen das positive Zeichen, oder einem von ihnen das positive und den beiden andern das negative Zeichen, so repräsentirt die Gleichung keine eigentliche Curve zweiten Grades mehr, sondern eine doppelt gezählte Gerade, da sie mit dem

Denn wenn man $x_3 = 0$ substituirt, so erhält man das vollkommene Quadrat $a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 - 2 a_1 a_2 x_1 x_2 = 0$, d. h. die Seite $x_3 = 0$ berührt die Curve oder schneidet sie in zwei zusammenfallenden Punkten; etc. Man kann die so begründete Gleichung auch in der Form $(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ schreiben, welche durch Beseitigung der Wurzelgrössen in jene Form übergeht.

Ehe aber die besondern Werthe von a_1, a_2, a_3 bestimmt werden, für welche diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, mag eine Reihe von Ergebnissen bemerkt sein, welche für alle einem Dreieck eingeschriebenen Curven zweiten Grades gelten. Wenn man die Gleichung in der Form

$$a_3 x_3 (a_3 x_3 - 2 a_2 x_2 - 2 a_1 x_1) + (a_1 x_1 - a_2 x_2)^2 = 0$$

schreibt, so erkennt man, dass die durch den Eckpunkt (x_1, x_2) gehende Gerade $a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$ auch den Punkt enthält, in welchem $x_3 = 0$ die Curve berührt. Die drei Geraden, welche die Berührungspunkte der Seiten mit den Gegenecken des umgeschriebenen Dreiecks verbinden, haben also die Gleichungen $a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$, $a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$, $a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0$ und schneiden sich daher in einem Punkte. Der nämliche Beweis, welcher zeigt, dass $x_3 = 0$ die Curve berührt, zeigt auch, dass $a_3 x_3 - 2 a_1 x_1 - 2 a_2 x_2 = 0$ eine Tangente der Curve ist; denn wenn man diesen Werth in die Gleichung der Curve einsetzt, so erhält man das vollständige Quadrat $(a_1 x_1 - a_2 x_2)^2 = 0$; jene Gerade schneidet also die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten und $a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$ geht durch den Berührungspunkt. Wenn man also die Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbindet, und in den Punkten, welche diese Geraden mit dem Kegelschnitt ausserdem gemein haben, die Tangenten des Letztern zieht, so sind die Gleichungen derselben

$$2 a_1 x_1 + 2 a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0, \quad 2 a_2 x_2 + 2 a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0,$$
$$2 a_3 x_3 + 2 a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$$

und man erkennt, dass die drei Punkte, in welchen sie die respectiven Gegenseiten des Dreiecks schneiden, in einer geraden Linie $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ liegen; denn diese geht durch

Quadrat von $a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm a_3 x_3 = 0$ identisch wird. Die im Text gewählte Form schliesst auch den Fall ein, in welchem zwei der Doppelproducte positiv sind, während das dritte negativ ist, sobald man voraussetzt, dass die a_1, a_2, a_3 sowohl positive als negative Grössen sein können.

den Schnitt der ersten Geraden mit $x_3 = 0$, durch den der zweiten mit $x_1 = 0$ und den der dritten mit $x_2 = 0$.

Aufg. Die beiden Kegelschnitte, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten und in den Schnittpunkten der Halbirungslinien der Gegenwinkel berühren, sind respective dargestellt durch

$$(s_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (s_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (s_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + x_3^{\frac{1}{2}} = 0.$$

160. Die Gleichung der Sehne, welche die beiden Punkte x_1', x_2', x_3' und x_1'', x_2'', x_3'' der Curve verbindet, ist

$$x_1 a_1^{\frac{1}{2}} \{ (x_2' x_3'')^{\frac{1}{2}} + (x_2'' x_3')^{\frac{1}{2}} \} + x_2 a_2^{\frac{1}{2}} \{ (x_3' x_1'')^{\frac{1}{2}} + (x_3'' x_1')^{\frac{1}{2}} \}$$
$$+ x_3 a_3^{\frac{1}{2}} \{ (x_1' x_2'')^{\frac{1}{2}} + (x_1'' x_2')^{\frac{1}{2}} \} = 0.$$

Denn die Substitution von x_1', x_2', x_3' für x_1, x_2, x_3 respective erlaubt die linke Seite der Gleichung auf die Form

$$\{ (x_1' x_2' x_3'')^{\frac{1}{2}} + (x_2' x_3' x_1'')^{\frac{1}{2}} + (x_3' x_1' x_2'')^{\frac{1}{2}} \} \{ (a_1 x_1')^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2')^{\frac{1}{2}}$$
$$+ (a_3 x_3')^{\frac{1}{2}} \} - (x_1' x_2' x_3')^{\frac{1}{2}} \{ (a_1 x_1'')^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2'')^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3'')^{\frac{1}{2}} \}$$

zu bringen, und diese zeigt, dass dieselbe verschwindet, weil die betrachteten Punkte in der Curve liegen. Wenn man in dieser Gleichung x_1'', x_2'', x_3'' respective gleich x_1', x_2', x_3' setzt, so erhält man die Gleichung der Tangente nach Division mit dem Factor $2(x_1' x_2' x_3')^{\frac{1}{2}}$ in der Form

$$x_1 \left(\frac{a_1}{x_1'}\right)^{\frac{1}{2}} + x_2 \left(\frac{a_2}{x_2'}\right)^{\frac{1}{2}} + x_3 \left(\frac{a_3}{x_3'}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Wenn umgekehrt $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ eine Tangente der Curve darstellt, so werden die Coordinaten des Berührungspunktes durch die Gleichungen

$$\left(\frac{a_1}{x_1'}\right)^{\frac{1}{2}} = \xi_1, \quad \left(\frac{a_2}{x_2'}\right)^{\frac{1}{2}} = \xi_2, \quad \left(\frac{a_3}{x_3'}\right)^{\frac{1}{2}} = \xi_3 \text{ bestimmt.}$$

Setzt man die daraus entspringenden Werthe von x_1', x_2', x_3' in die Gleichung der Curve ein, so erhält sie die Form der Bedingung $\frac{a_1}{\xi_1} + \frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} = 0$, unter welcher die Gerade $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ eine Tangente der Curve ist, d. h. die Tangentialgleichung der Curve.

Die Reciprocität, welche zwischen den Gleichungen in Punktcoordinaten und denen in Linien- oder Tangential-Coordinaten stattfindet, wird noch deutlicher bei der Auflösung des umgekehrten Problems erkannt, welches fordert, die Gleichung der Curve zu finden, deren Tangenten die Bedingung $\frac{a_1}{\xi_1} + \frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} = 0$

erfüllen. Dazu folgen wir dem Gange des Artikel 157. Sind $\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 = 0$, $\xi_1'' x_1 + \xi_2'' x_2 + \xi_3'' x_3 = 0$ irgend zwei gerade Linien, für deren Coefficienten ξ_1', ξ_2', ξ_3'; $\xi_1'', \xi_2'', \xi_3''$ die obige Bedingung erfüllt ist und die daher Tangenten der Curve sind, deren Gleichung zu bestimmen ist, so ist

$\frac{a_1 \xi_1}{\xi_1' \xi_1''} + \frac{a_2 \xi_2}{\xi_2' \xi_2''} + \frac{a_3 \xi_3}{\xi_3' \xi_3''} = 0$ die Tangentialgleichung ihres Durchschnittspunktes. Denn nach Art 77 ist eine Gleichung von der Form $a\xi + b\eta + c\zeta = 0$ die Bedingung, unter welcher die gerade Linie $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ durch einen gewissen festen Punkt geht, d. h. sie ist die Tangentialgleichung dieses Punktes. Die vorher geschriebene Gleichung ist aber, da sie durch die Tangential-Coordinaten von zwei Geraden befriedigt wird, insbesondere die Tangentialgleichung ihres Durchschnittspunktes. Setzt man in derselben ξ_1', ξ_2', ξ_3' respective gleich $\xi_1'', \xi_2'', \xi_3''$, so ergiebt sich, dass die Gleichung des Durchschnittspunktes von zwei auf einander folgenden Tangenten der Curve d. i. die Gleichung ihres Berührungspunktes $\frac{a_1 \xi_1}{\xi_1'^2} + \frac{a_2 \xi_2}{\xi_2'^2} + \frac{a_3 \xi_3}{\xi_3'^2} = 0$ ist. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind $x_1 = \frac{a_1}{\xi_1'^2}$, $x_2 = \frac{a_2}{\xi_2'^2}$, $x_3 = \frac{a_3}{\xi_3'^2}$. Wenn man aus diesen Gleichungen die Werthe von ξ_1', ξ_2', ξ_3' entnimmt und sie in die von ξ_1', ξ_2', ξ_3' zu erfüllende Relation substituirt, so entsteht die verlangte Gleichung der Curve in der Form

$$(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

161. Die Bedingungen, unter welchen die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts insbesondere einen Kreis darstellt, sind nach Art. 158

$$a_2^2 \sin^2 A_3 + a_3^2 \sin^2 A_2 + 2 a_2 a_3 \sin A_2 \sin A_3 = a_3^2 \sin^2 A_1 + a_1^2 \sin^2 A_3$$
$$+ 2 a_3 a_1 \sin A_3 \sin A_1 = a_1^2 \sin^2 A_2 + a_2^2 \sin^2 A_1 + 2 a_1 a_2 \sin A_1 \sin A_2, \text{ oder}$$
$$a_2 \sin A_3 + a_3 \sin A_2 = \pm (a_3 \sin A_1 + a_1 \sin A_3) = \pm (a_1 \sin A_2 + a_2 \sin A_1).$$

Da diese Bedingungsgleichungen durch Wechsel der Zeichen in vier verschiedenen Arten geschrieben werden können, so können vier verschiedene Kreise beschrieben werden, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks berühren. Wählt man in beiden Fällen das positive Zeichen, so sind die Gleichungen

$$a_1 \sin A_3 - a_2 \sin A_3 + a_3 (\sin A_1 - \sin A_2) = 0,$$
$$a_1 \sin A_2 + a_2 (\sin A_1 - \sin A_3) - a_3 \sin A_2 = 0$$

und ihre Auflösung giebt wie in Art. 154

$a_1 = \sin A_1(\sin A_2 + \sin A_3 - \sin A_1)$, $a_2 = \sin A_2(\sin A_3 + \sin A_1 - \sin A_2)$, $a_3 = \sin A_3(\sin A_1 + \sin A_2 - \sin A_3)$, und da im ebenen Dreieck $\sin A_2 + \sin A_3 - \sin A_1 = 4\cos\frac{1}{2}A_1 \sin\frac{1}{2}A_2 \sin\frac{1}{2}A_3$ ist, so sind diese Werthe von a_1, a_2, a_3 respective proportional zu $\cos^2\frac{1}{2}A_1$, $\cos^2\frac{1}{2}A_2$, $\cos^2\frac{1}{2}A_3$ und die Gleichung des entsprechenden des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises ist daher

$$x_1^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}A_1 + x_2^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}A_2 + x_3^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}A_3 = 0\text{*)} \quad \text{oder}$$

$$x_1^2\cos^4\tfrac{1}{2}A_1 + x_2^2\cos^4\tfrac{1}{2}A_2 + x_3^2\cos^4\tfrac{1}{2}A_3 - 2x_1x_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2$$
$$- 2x_2x_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3 - 2x_3x_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\cos^2\tfrac{1}{2}A_1 = 0.$$

Dass diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, beweist man durch Ueberführung in die Form

$$\left(\frac{x_1\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + \frac{x_2\cos^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + \frac{x_3\cos^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right)(x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)$$
$$- \frac{\cos^2\frac{1}{2}A_1\cos^2\frac{1}{2}A_2\cos^2\frac{1}{2}A_3}{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}(x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3) = 0.$$

Auf demselben Wege findet man die Gleichung eines der äusserlich berührenden Kreise in der Form

$$x_1^2\cos^4\tfrac{1}{2}A_1 + x_2^2\cos^4\tfrac{1}{2}A_2 + x_3^2\cos^4\tfrac{1}{2}A_3 - 2x_2x_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_3$$
$$+ 2x_3x_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_3\sin^2\tfrac{1}{2}A_1 + 2x_1x_2\sin^2\tfrac{1}{2}A_1\sin^2\tfrac{1}{2}A_2 = 0 \quad \text{oder}$$

$(-x_1)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A_1 + x_2^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A_2 + x_3^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A_3 = 0$. Das negative Zeichen entspricht dem Umstande, dass dieser und der dem Dreieck eingeschriebene Kreis auf entgegengesetzten Seiten der geraden Linie $x_1 = 0$ liegen.

Aufg. Man soll die Radical-Axe des eingeschriebenen Kreises und des durch die Mittelpunkte der Seiten gehenden Kreises bestimmen. Die Gleichung derselben wird nach der Methode des Artikel 158 in der Form

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A_1\cos^2\tfrac{1}{2}A_2\cos^2\tfrac{1}{2}A_3\left\{x_1\cos A_1 + x_2\cos A_2 + x_3\cos A_3\right\}$$
$$= \sin A_1\sin A_2\sin A_3\left\{x_1\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_1}{\sin A_1} + x_2\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_2}{\sin A_2} + x_3\frac{\cos^4\frac{1}{2}A_3}{\sin A_3}\right\}$$

erhalten. Dividirt man sie durch $2\cos\frac{1}{2}A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3$, so wird der Coefficient von x_1 in dieser Gleichung

---

*) Diese Gleichung des eingeschriebenen Kreises kann nach folgender Ableitung aus der des umgeschriebenen Kreises erhalten werden: Sind die Gleichungen der Seiten des von den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises gebildeten Dreiecks $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = 0$ und seine Winkel A_1', A_2', A_3', so ist nach Art. 154 die Gleichung des Kreises $x_2'x_3'\cos A_1' + x_3'x_1'\cos A_2' + x_1'x_2'\cos A_3' = 0$. Aber nach Art. 153 ist für jeden Punkt des Kreises $x_1'^2 = x_2x_3$, $x_2'^2 = x_3x_1$, $x_3'^2 = x_1x_2$ und überdiess ist $A_1' = 90 - \frac{1}{2}A_1$, etc. Die Substitution dieser Werthe giebt die Gleichung des Kreises wie vorher $x_1^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A_1 + x_2^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A_2 + x_3^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}A_3 = 0$.

$\cos\frac{1}{2}A_1\left\{2\cos^2\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}A_2\sin\frac{1}{2}A_3-\cos A_1\cos\frac{1}{2}A_2\cos\frac{1}{2}A_3\right\}$ oder $\cos\frac{1}{2}A_1\sin\frac{1}{2}(A_1-A_2)\sin\frac{1}{2}(A_1-A_3)$; die Gleichung der Radicalaxe kann daher geschrieben werden

$$\frac{x_1\cos\frac{1}{2}A_1}{\sin\frac{1}{2}(A_2-A_3)}+\frac{x_2\cos\frac{1}{2}A_2}{\sin\frac{1}{2}(A_3-A_1)}+\frac{x_3\cos\frac{1}{2}A_3}{\sin\frac{1}{2}(A_1-A_2)}=0$$

und man erkennt nun aus der Bedingung des Art. 160, dass diese Linie den eingeschriebenen Kreis berührt, in einem Punkte, dessen Coordinaten durch $\sin^2\frac{1}{2}(A_2-A_3)$, $\sin^2\frac{1}{2}(A_3-A_1)$, $\sin^2\frac{1}{2}(A_1-A_2)$ bestimmt sind. Diese Werthe zeigen nach Art. 67, dass dieser Punkt in der Verbindungslinie der Centra enthalten ist, deren Coordinaten 1, 1, 1 und $\cos(A_2-A_3)$, $\cos(A_3-A_1)$, $\cos(A_1-A_2)$ sind.

162. Wenn die Gleichung eines Kreises in trimetrischen Punkt-Coordinaten einer Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten aequivalent ist, in welcher die Summe x^2+y^2 mit dem Coefficienten m behaftet ist, so ist das Resultat der Substitution der Coordinaten irgend eines Punktes in diese Gleichung das m fache vom Quadrat der Länge der Tangente, die man von diesem Punkte an den Kreis ziehen kann. Diese Constante kann leicht bestimmt werden, sobald man einen Punkt kennt, für welchen das Quadrat der Tangente durch geometrische Betrachtungen erhalten werden kann.

Wenn diese Constante m für zwei Kreise bestimmt ist, so giebt die Subtraction der respective durch m und m' dividirten Gleichungen nothwendig eine durch $x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3$ theilbare Differenz, die linke Seite von der Gleichung der Radicalaxe.

Aufg. 1. Man bestimme den Werth der Constanten m für den durch die Mittelpunkte der Seiten gehenden Kreis $x_1^2\sin A_1\cos A_1+x_2^2\sin A_2\cos A_2+x_3^2\sin A_3\cos A_3-x_2x_3\sin A_1-x_3x_1\sin A_2-x_1x_2\sin A_3=0$. Weil der Kreis eine Seite $x_3=0$ des Dreiecks in Punkten schneidet, deren Entfernungen von der Ecke A_1 respective gleich $\frac{1}{2}s_3$ und $s_2\cos A_1$ sind, so ist das Quadrat der Tangente von A_1 an diesen Kreis gleich $\frac{1}{2}s_2s_3\cos A_1$. Und da für die Ecke A_1 die Substitution $x_2=0$, $x_3=0$ gilt, so erhält man aus der Gleichung des Kreises $x_1'^2\sin A_1\cos A_1$, wo x_1' die von A_1 auf die Gegenseite gefällte Normale ist, oder

$$s_2s_3\sin A_1\sin A_2\sin A_3\cos A_1.$$

Also ist die fragliche Constante m gleich $2\sin A_1\sin A_2\sin A_3$.

Aufg. 2. Man soll die Constante m für den Kreis

$x_2x_3\sin A_1+x_3x_1\sin A_2+x_1x_2\sin A_3=0$ bestimmen.

Wenn man von der vorigen Gleichung die linearen Glieder $(x_1\cos A_1+x_2\cos A_2+x_3\cos A_3)(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)$ abzieht, so bleibt der Coefficient von x^2+y^2 unverändert. Die Constante m ist daher für $x_2x_3\sin A_1+$ etc. gleich $-\sin A_1\sin A_2\sin A_3$.

Aufg. 3. Man bestimme die Entfernung der Centra des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises von einander. Das Quadrat der Tangente vom Centrum des eingeschriebenen Kreises an den umgeschrie-

benen Kreis ($D^2 - R^2$) findet man durch die Substitution $x_1 = x_2 = x_3 = r$ gleich $-\frac{r^2(\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3)}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}$ oder nach einer bekannten Formel gleich $-2Rr$, daher ist $D^2 = R^2 - 2Rr$.

Aufg. 4. Man bestimme die Entfernung zwischen den Centren des eingeschriebenen und des durch die Seitenmittelpunkte gehenden Kreises.

Ist ϱ der Radius des Letzteren, so erhält man mittelst der Formel $\sin A_1 \cos A_1 + \sin A_2 \cos A_2 + \sin A_3 \cos A_3 = 2 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$ $D^2 - \varrho^2 = r^2 - rR$; da man ausserdem weiss, dass $R = 2\varrho$ ist, so ist $D = r - \varrho$ oder die Kreise berühren einander.

Aufg. 5. Man bestimme die Constante m für die oben gegebene Gleichung des eingeschriebenen Kreises.

Aufl. Sie ist $4r^2 \cos^2 \frac{1}{2} A_1 \cos^2 \frac{1}{2} A_2 \cos^2 \frac{1}{2} A_3$.

Dass in allen diesen Entwickelungen die abkürzende Ausdrucksweise mittelst der Summenzeichen des Art. 71 hätte Anwendung erleiden können, ist nur zu erwähnen. Auf die umfassendere Verwendung der Determinanten in der Theorie der Kegelschnitte wird später zurückzukommen sein.

Elftes Kapitel.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades als Central-Gleichung: Ellipse und Hyperbel.

---

163. In der Untersuchung der Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel werden unsere Gleichungen durch die Voraussetzung wesentlich vereinfacht, dass das Centrum mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt. Wir sahen im Art. 99, dass durch diese Transformation die Coefficienten von x und y in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades gleich Null werden, so dass sie die Form $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33}' = 0$ annimmt.

Es ist dabei nützlich, den Werth von a_{33}' in Gliedern der Coefficienten der erst gegebenen Gleichung zu wissen; wir sahen in Art. 93, dass $a_{33}' = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}$ ist, wo $x'y'$ die Coordinaten des neuen Anfangspunktes sind. Die Berechnung dieser Grösse wird erleichtert, indem man sie in die Form bringt

$$a_{33}' = (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x' + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23})y' + a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}.$$

Die ersten beiden Glieder müssen für die Coordinaten des Centrums gleich Null werden und das letzte nach Art. 99:

$$= a_{13}\frac{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}+a_{23}\frac{a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

$$= \frac{a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} \quad *).$$

Wenn der Zähler dieses Bruches gleich Null wird, so reducirt sich die Gleichung durch die Transformation auf die Form

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0,$$

und stellt daher nach Art. 86 zwei reelle oder imaginäre gerade Linien dar, je nachdem $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ negativ oder positiv ist. Wie wir schon im Art. 89 gesehen haben, so ist auch hiernach die Bedingung, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwei gerade Linien darstelle,

$$a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2=0.$$

Denn diese Gleichung muss offenbar erfüllt sein, damit, wenn wir den Coordinatenanfang nach dem Durchschnittspunkt der geraden Linien verlegen, das absolute Glied verschwinde.

Aufg. 1. Transformire $3x^2+4xy+y^2-5x-6y-3=0$ zum Centrum $(\frac{7}{2}, -4)$. *Aufl.* $12x^2+16xy+4y^2+1=0$.

Aufg. 2. Transformire $x^2+2xy-y^2+8x+4y-8=0$ zum Centrum $(-3, -1)$. *Aufl.* $x^2+2xy-y^2=22$.

164. Im Art. 95 ward gezeigt, dass für die Werthe von θ, welche die Bedingung $a_{11}\cos^2\theta+2a_{12}\cos\theta\sin\theta+a_{22}\sin^2\theta=0$ erfüllen, der Radius vector die Curve in unendlicher Entfernung schneidet und dass der andere Schnittpunkt, den derselbe mit der Curve bestimmt, in der Entfernung $\varrho=-\frac{a_{33}}{a_{13}\cos\theta+a_{23}\sin\theta}$ vom Anfangspunkt liegt. Für das Centrum als Anfangspunkt ist $a_{13}=0$, $a_{23}=0$ und auch dieser Werth von ϱ unendlich gross, d. h. es gehen zwei Gerade durch das Centrum, welche die Curve in unendlicher Entfernung in zwei zusammenfallenden Punkten treffen d. i. berühren; es sind die Asymptoten der Curve und

*) In derselben Weise ergiebt sich, dass das Resultat der Substitution der Coordinaten des Centrums $x'y'$ in die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes $x''y''$
$(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13})x''+(a_{12}x'+a_{22}y'+a_{23})y''+a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}$
mit dem Resultat der Substitution von $x'y'$ in die Gleichung der Curve übereinstimmt; denn in beiden Fällen verschwinden die ersten beiden Gliedergruppen.

sie sind imaginär im Falle der Ellipse, reell im Falle der Hyperbel. Wir werden später zeigen, dass die Asymptoten, obwohl sie die Curve in keiner endlichen Entfernung treffen, sich ihr doch ohne Ende mehr und mehr nähern.

Die Verbindungslinie ihrer unendlich entfernten Berührungspunkte ist selbst ganz in unendlicher Entfernung. Nach der im Art. 106 gefundenen Definition von Pol und Polare ergiebt sich daher, dass das Centrum als der Pol einer ganz in unendlicher Entfernung gelegenen Geraden in Bezug auf die Curve angesehen werden kann. (Vergl. Art. 107.)

Wenn man die Transformation des Coordinatenanfangs nach dem Centrum der Curve mit der Wahl zweier beliebigen conjugirten Durchmesser zu Coordinatenaxen verbindet, so verschwindet nach Art. 102 auch das Glied $a_{12}xy$ aus der Gleichung und die allgemeine Gleichung zweiten Grades reducirt sich auf die Form $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$.

Wir haben in Art. 103 gezeigt, dass es für jede Curve zweiten Grades ein Paar conjugirte Durchmesser giebt, welche rechtwinklig zu einander sind und sie als die Axen der Curve bezeichnet.

Die dort erhaltenen Resultate ergeben sich auch durch eine Coordinatentransformation von einem Paar rechtwinkliger Axen, für das $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ die Gleichung der Curve ist, zu einem andern Paar solcher Axen, welchem der Werth $a_{12}' = 0$ entspricht, denn nach Art. 9 entspricht der Drehung um den Winkel θ die Substitution $x\cos\theta - y\sin\theta$ für x und $x\sin\theta + y\cos\theta$ für y; die Gleichung wird also

$$a_{11}(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + 2a_{12}(x\cos\theta - y\sin\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) + a_{22}(x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + a_{33} = 0,$$

d. h. die neuen Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} sind respective gleich

$$a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta,\ a_{22}\sin\theta\cos\theta + a_{12}(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - a_{11}\sin\theta\cos\theta,\ a_{11}\sin\theta^2 - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta.$$

Der gemachten Voraussetzung $a_{12}' = 0$ entspricht also dieselbe Bedingungsgleichung wie in Art. 103 für θ und man findet

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

165. Wenn erforderlich ist, eine gegebene Gleichung auf die Form $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ zu bringen und die Werthe der neuen Coefficienten numerisch zu berechnen, so wird die bezüg-

liche Arbeit durch den folgenden Satz wesentlich erleichtert: **Wenn eine Gleichung des zweiten Grades von einem Paar rectangulärer Axen zu einem andern transformirt wird, so bleiben die Grössen $a_{11}+a_{22}$ und $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ unverändert.**

Der erste Theil wird unmittelbar bewiesen, indem man die Werthe des neuen a_{11} und a_{22} addirt, weil man erhält

$$a_{11}' + a_{22}' = a_{11} + a_{22}.$$

Um den zweiten Theil zu beweisen, schreiben wir die Werthe des vorigen Artikels in den folgenden Formen:

$$2a_{11}' = a_{11} + a_{22} + 2a_{12}\sin 2\theta + (a_{11} - a_{22})\cos 2\theta,$$
$$2a_{22}' = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\sin 2\theta - (a_{11} - a_{22})\cos 2\theta.$$

Daraus folgt

$$4a_{11}'a_{22}' = (a_{11} + a_{22})^2 - \{2a_{12}\sin 2\theta + (a_{11} - a_{22})\cos 2\theta\}^2.$$

Aber es ist $4a_{12}'^2 = \{2a_{12}\cos 2\theta - (a_{11} - a_{22})\sin 2\theta\}^2$; daher

$$4(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Stellen wir daher die Forderung, die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts für rechtwinklige Coordinatenaxen zu den Axen der Curve selbst zu transformiren, so sind die neuen Coefficienten mit den alten durch die beiden Bedingungsgleichungen verbunden

$$a_{11}' + a_{22}' = a_{11} + a_{22}, \quad a_{11}'a_{22}' = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Denn a_{12}' ist gleich Null, da die neuen Coordinatenaxen ein Paar conjugirte Durchmesser sind. Diese Bedingungen liefern das Product und die Summe der neuen Coefficienten a_{11}' und a_{22}', und erlauben somit, die quadratische Gleichung zu bilden, welche diese Grössen bestimmt.

Aufg. 1. Bestimme die Axen der Ellipse $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$ und transformire die Gleichung zu ihnen.

Die Axen sind nach Art. 103

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 = 0 \text{ oder } (2x - y)(x + 2y) = 0.$$

Wir haben $a_{11}' + a_{22}' = 25$, $a_{11}'a_{22}' = 150$; also $a_{11}' = 10$, $a_{22}' = 15$; und die transformirte Gleichung ist $2x^2 + 3y^2 = 12$.

Aufg. 2. Transformire die Hyperbel $11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$ zu den Axen. $a_{11}' + a_{22}' = -13$, $a_{11}'a_{22}' = -2028$; $a_{11}' = 39$, $a_{22}' = -52$. Die transformirte Gleichung ist $3x^2 - 4y^2 = 12$.

Aufg. 3. Transformire $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{33}$ zu den Axen. $(a_{11} + a_{22} - R)x^2 + (a_{11} + a_{22} + R)y^2 = 2a_{33}$, wo $R^2 = 4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2$ ist.

166. Nachdem wir gezeigt haben, dass die Grössen $a_{11} + a_{22}$ und $a_{12} - a_{11}a_{22}$ unverändert bleiben, wenn wir von einem rectangulären System zu einem andern transformiren, liegt die Frage

nahe, wie sich diese Grössen beim Uebergang zu irgend einem schiefwinkligen Coordinatensystem verhalten.

Wir können die alte Axe der x beibehalten und haben, wenn wir eine Axe der y annehmen, welche zu ihr unter dem Winkel ω geneigt ist, nach Art. 9 $x + y \cos\omega$ für x und $y \sin\omega$ für y einzusetzen. Wir erhalten dann die Bedingungsgleichungen:

$$a_{11}' = a_{11},\ a_{12}' = a_{11}\cos\omega + a_{12}\sin\omega,$$
$$a_{22}' = a_{11}\cos^2\omega + 2a_{12}\cos\omega\sin\omega + a_{22}\sin^2\omega.$$

Daraus folgt

$$\frac{a_{11}' + a_{22}' - 2a_{12}'\cos\omega}{\sin^2\omega} = a_{11} + a_{22},\quad \frac{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2}{\sin^2\omega} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Wenn wir daher die Gleichung von irgend einem Systeme der Coordinatenaxen zu einem beliebigen andern Systeme transformiren, so bleiben die Grössen $\frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}$ und $\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\sin^2\omega}$ ungeändert.

Wir können mit Hilfe dieses Theorems eine in schiefwinkligen Coordinaten gegebene Gleichung zu den Axen transformiren, denn wir können immer die Summe und das Product des neuen A und C in Gliedern der alten Coefficienten ausdrücken.

Aufg. 1. Man transformire die Gleichung $10x^2 + 6xy + 5y^2 = 10$ unter der Voraussetzung $\cos\omega = \frac{3}{5}$ zu den Axen.

Es ist $a_{11} + a_{22} = \frac{285}{16}$, $a_{11}a_{22} = \frac{1025}{16}$, folglich $a_{11} = 5$, $a_{22} = \frac{205}{16}$, und die transformirte Gleichung $16x^2 + 41y^2 = 32$.

Aufg. 2. Transformire $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ zu den Axen für $\omega = 60^0$.

Aufl. $x^2 - 15y^2 = 3$.

Aufg. 3. Transformire $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{33}$ zu den Axen.

Aufl. $(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega - R)x^2 + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega + R)y^2 = 2a_{33}\sin^2\omega$, wo $R^2 = \{2a_{12} - (a_{11} + a_{22})\cos\omega\}^2 + (a_{11} - a_{22})^2\sin^2\omega$ ist.

167. Wir halten es für nützlich, hier einen andern Beweis von den beiden wichtigen Theoremen der letzten Artikel anzuschliessen.

Angenommen, dass eine Gleichung für Axen, welche den Winkel ω mit einander bilden, zu anderen unter dem Winkel Ω geneigten Axen transformirt werden soll, und dass dabei durch die Substitutionen des Art. 9 die Grösse

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \text{ in } a_{11}'x^2 + 2a_{12}'xy + a_{22}'y^2$$

übergehe, so muss doch immer durch die nämliche Substitution

die Grösse $x^2+2xy\cos\omega+y^2$ in die andre $X^2+2XY\cos\Omega+Y^2$ übergeführt werden, weil die eine wie die andere die bei der Transformation unverändert gebliebene Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkt der Coordinaten repräsentirt. Daraus folgt aber, dass $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\lambda(x^2+2xy\cos\omega+y^2)$ $=a_{11}'X^2+2a_{12}'XY+a_{22}'Y^2+\lambda(X^2+2XY\cos\Omega+Y^2)$ sein muss.

Und wenn wir λ so bestimmen, dass die linke Seite der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, so muss die rechte Seite auch ein vollkommenes Quadrat sein. Aber die Bedingung, unter welcher erstere ein vollkommenes Quadrat wird, ist

$$(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda)=(a_{12}+\lambda\cos\omega)^2,$$

oder λ muss eine der Wurzeln der Gleichung sein

$$\lambda^2\sin^2\omega+(a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega)\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Wir erhalten eine zweite quadratische Gleichung von derselben Form zur Bestimmung des Werthes von λ, der die andere Seite der Gleichung zu einem vollkommenen Quadrat macht; aber weil beide Seiten für dieselben Werthe von λ vollkommene Quadrate werden müssen, so ist es nöthig, dass diese beiden Bestimmungsgleichungen identisch sind, d. h. dass ihre correspondirenden Coefficienten übereinstimmen. Es ergiebt sich also, wie vorher:

$$\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{a_{11}'+a_{22}'-2a_{12}'\cos\Omega}{\sin^2\Omega};$$

$$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\sin^2\omega}=\frac{a_{11}'a_{22}'-a_{12}'^2}{\sin^2\Omega}.$$

Aufg. 1. Die Summe der Quadrate von den Reciproken zweier zu einander rechtwinkliger Halbdurchmesser ist constant. Sind ihre Längen a, a', so ergiebt sich, indem wir nach einander in der Gleichung der Curve $x=0$, $y=0$ machen, $a_{11}a^2=a_{33}$, $a_{22}a'^2=a_{33}$, und das eben ausgesprochene Theorem ist nur die geometrische Erläuterung des Factums, dass $a_{11}+a_{22}$ constant ist.

Aufg. 2. Der Inhalt des durch Verbindung der Endpunkte zweier conjugirten Durchmesser gebildeten Dreiecks ist constant. Die auf zwei conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung ist $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$ und weil $\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\sin^2\omega}$ constant ist, so ist auch $a'b'\sin\omega$, der Inhalt des bezeichneten Dreiecks, constant.

Aufg. 3. Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Halbdurchmesser ist constant. Weil $\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}$ constant ist, so ist $\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)$ constant und daher, weil es $a'b'\sin\omega$ ist, auch $a'^2+b'^2$.

168. Wir sahen, dass die auf die Axen bezogene Gleichung von der Form war $Ax^2 + By^2 = C$, worin B in dem Fall der Ellipse positiv, und im Fall der Hyperbel negativ ist. (Art. 103.)

Die Gleichung der Ellipse kann in der folgenden schicklicheren Form geschrieben werden: Seien die durch die Ellipse in den Axen gemachten Abschnitte $x = a$, $y = b$, so finden wir, indem wir $y = 0$ und $x = a$ in der Gleichung der Curve machen

$$Aa^2 = C \text{ und } A = C : a^2$$

In gleicher Weise wird $B = C : b^2$. Durch die Substitution dieser Werthe kann die Gleichung der Ellipse geschrieben werden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Weil wir zur Axe der x welche Axe uns beliebt wählen können, so wollen wir voraussetzen, dass wir die Axen so gewählt haben, dass a grösser als b sei.

Die Gleichung der Hyperbel, welche, wie wir sahen, von der der Ellipse nur in dem Vorzeichen des Coefficienten von y^2 abweicht, nimmt durch dieselben Substitutionen die entsprechende Form $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ an.

Der Abschnitt in der Axe der x ist offenbar $= \pm a$, aber der in der Axe der y, gefunden aus der Gleichung $y^2 = -b^2$, ist imaginär. Die Axe der y schneidet also die Curve nicht in reellen Punkten.

Weil wir zur Axe der x die Axe gewählt haben, welche die Curve in reellen Punkten schneidet, so sind wir in diesem Falle nicht berechtigt, anzunehmen, dass a grösser ist als b.

169. Die Polargleichung der Ellipse zu finden, wenn das Centrum zum Pol genommen ist.

Wir schreiben $\rho \cos\theta$ für x und $\rho \sin\theta$ für y in der vorhergehenden Gleichung und erhalten

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

eine Gleichung, welche wir in einer der äquivalenten Formen schreiben können,

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta}$$
$$= \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta}.$$

Es ist üblich, die folgenden Abkürzungen zu gebrauchen:

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2;$$

und die Grösse e wird die Excentricität der Curve genannt*). Indem wir den Zähler und Nenner des zuletzt gefundenen Bruches durch a^2 dividiren, erhalten wir die zumeist gebrauchte Form, nämlich $\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$.

170. Die Figur der Ellipse zu untersuchen. Der kleinste Werth, welchen $b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta$ haben kann, wird erhalten für $\theta = 0$. Daher ist der grösste Werth von ϱ der Abschnitt in der Axe x und ist gleich a. Ferner entspricht der grösste Werth von $b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta$ dem Werth $\sin \theta = 1$ oder $\theta = 90^0$, so dass der kleinste Werth von ϱ der Abschnitt in der Axe y ist, nämlich $= b$. In Folge dessen ist die längste Sehne, die man durch das Centrum ziehen kann, die Axe x und die kürzeste die Axe y; deshalb nennt man diese Linien die grosse und die kleine Axe der Ellipse.

Es ist offenbar, dass ϱ wächst, während θ abnimmt und umgekehrt; also jeder Durchmesser ist um so länger, je weniger seine Richtung von der der grossen Axe abweicht. Die Form der Curve ist daher die hier dargestellte.

Wir erhalten denselben Werth von ϱ, ob wir voraussetzen $\theta = \alpha$ oder $\theta = -\alpha$; d. h. zwei Durchmesser, welche mit der Axe gleiche Winkel machen, sind gleich. Es ist leicht zu sehen, dass die Umkehrung dieses Theorems auch wahr ist.

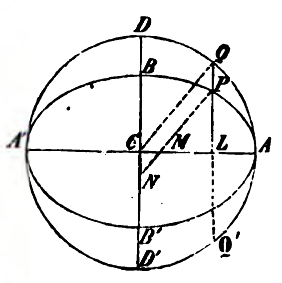
Diese Eigenschaft erlaubt uns, wenn das Centrum eines Kegelschnitts gegeben ist, seine Axen geometrisch zu bestimmen. Denn beschreiben wir irgend einen mit ihm concentrischen Kreis, welcher den Kegelschnitt schneidet, so sind die durch die Durchschnittspunkte gehenden Durchmesser einander gleich; und nach dem eben bewiesenen Theorem sind die Axen des Kegelschnitts die innere und äussere Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels.

*) Man hat auch wohl beide Grössen durch den Namen der Excentricität bezeichnet und c von e als die lineare von der numerischen Excentrität unterschieden.

171. Die Gleichung der Ellipse kann in eine andre Form gebracht werden, welche die Gestalt der Curve noch deutlicher erkennen lässt. Die Auflösung derselben für y liefert:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Wenn wir nun mit dem Halbmesser a einen concentrischen Kreis beschreiben, so ist seine Gleichung $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und wir leiten daraus die folgende Construction ab: **Man beschreibe einen Kreis über der grossen Axe und nehme in jeder Ordinate LQ desselben einen Punkt P so, dass LP und LQ in einem constanten Verhältniss $b:a$ sei; der Ort von P ist die geforderte Ellipse.**



Demnach liegt der über der grossen Axe beschriebene Kreis ganz ausserhalb der Ellipse. Wir können aus denselben Gründen die Ellipse auch construiren, indem wir über der kleinen Axe einen Kreis beschreiben und jede Ordinate in dem constanten Verhältniss $a : b$ vergrössern. Der über der kleinen Axe beschriebene Kreis liegt mithin völlig innerhalb der Curve. Die Verbindung beider Betrachtungen liefert endlich die folgende Construction der Ellipse aus ihren Axen: Man zeichnet die concentrischen Kreise, welche die Axen zu Durchmessern haben, verzeichnet in denselben einen beliebigen Durchmesser und legt durch die den beiden Kreisen angehörigen Endpunkte derselben je eine Parallele zu der Axe der Ellipse, welche der Durchmesser des andern Kreises ist: Die Durchschnittspunkte dieser Parallelen sind Punkte der Ellipse.

Die Gleichung des Kreises ist die specielle Form, welche die Gleichung der Ellipse annimmt, wenn wir voraussetzen $b = a$.

172. **Die Polargleichung der Hyperbel zu finden.** Die Transformation zu Polarcoordinaten liefert (Artikel 169) die Gleichung der Hyperbel in den äquivalenten Formen

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta}$$
$$= \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)\cos^2\theta - a^2}.$$

Weil Formeln, die die Ellipse betreffen, in die entsprechenden Formeln für die Hyperbel übergehen, indem man das Zeichen von b^2 verwechselt, so müssen wir in diesem Falle die Abkürzung c^2 für $a^2 + b^2$ und e^2 für $\frac{a^2 + b^2}{a^2}$ gebrauchen, die Grösse e wird die Excentricität der Hyperbel genannt. Wir dividiren den Zähler und Nenner des zuletzt gefundenen Bruches durch a^2 und erhalten die Polargleichung der Hyperbel, welche nur im Zeichen von b^2 von der der Ellipse abweicht, nämlich $\varrho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2\theta - 1}$.

173. Die Figur der Hyperbel zu untersuchen. Die Namen grosse Axe und kleine Axe sind nicht auf die Hyperbel anwendbar (Artikel 168), und wir wollen daher die Axe der x die transversale oder Hauptaxe und die der y die conjugirte oder Nebenaxe nennen. Der Ausdruck $b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta$, der Nenner in dem Werthe von ϱ^2, wird offenbar am grössten, wenn $\theta = 0$ ist; daher ist in demselben Fall ϱ am kleinsten, oder die transversale Axe ist die kürzeste Sehne, welche durch das Centrum der Curve gezogen werden kann.

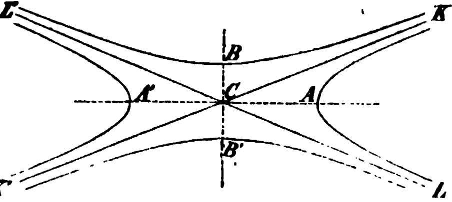
Wenn θ wächst, so wächst ϱ stetig mit, bis zu dem durch

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \left(\text{oder } \tan\theta = \frac{b}{a}\right)$$

bestimmten Werthe von θ, wo der Nenner des Werthes von ϱ Null und ϱ unendlich gross wird. Jenseits dieses Werthes von θ wird ϱ^2 negativ und die Durchmesser hören auf, die Curve in reellen Punkten zu schneiden, bis

$$\sin\theta = -\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \left(\text{oder } \tan\theta = -\frac{b}{a}\right).$$

wo ϱ wieder unendlich gross wird. Es nimmt dann ebenso regelmässig ab, wie θ ferner wächst, bis $\theta = 180^0$, wo es wieder seinen kleinsten Werth $= a$ annimmt.



Die Form der Hyperbel ist daher die in den durch A' und A gehenden Curven der Figur dargestellte.

174. Wir fanden, dass die Axe der y die Curve nicht in reellen Punkten schneidet, weil wir die Gleichung $y^2 = -b^2$ zur Bestimmung ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve erhielten. Wenn wir jedoch unbeschadet dessen auf der Axe der y die Strecken $CB = CB' = \pm b$ abtragen, so findet sich, dass die Länge CB eine wichtige Beziehung zur Curve hat, und schicklich eine Axe der Curve genannt werden kann. Man kann ebenso auf jedem andern Durchmesser, für dessen Länge sich die Bestimmungsgleichung $\varrho^2 = -R^2$ ergiebt, die Längen $\pm R$ abtragen, obgleich er die Curve nicht in reellen Punkten schneidet und die so erhaltene Linie als einen Durchmesser der Hyperbel bezeichnen. Die Gleichung des von den Endpunkten dieser Durchmesser, welche die Curve nicht in reellen Punkten schneiden, gebildeten Ortes wird gefunden, indem man das Zeichen von ϱ^2 in der Gleichung der Curve vertauscht,

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^2\theta}{b^2} - \frac{\cos^2\theta}{a^2} \text{ oder } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Es ist die Gleichung einer Hyperbel, welche die Axe der y zur Hauptaxe und die Axe der x zur Nebenaxe hat. Sie ist durch die die Punkte B, B' enthaltende Curve der Figur repräsentirt und wird als die conjugirte Hyperbel der gegebenen bezeichnet.

175. Wir zeigten im Artikel 173, dass die dem Werth $\tan\theta = \pm \frac{b}{a}$ entsprechenden Durchmesser die Curve im Unendlichen schneiden; sie sind daher dieselben, wie die im Art. 103 Asymptoten der Curve genannten Linien. Es sind die Linien CK, CL in der Figur, und sie trennen offenbar die Durchmesser, welche die Curve in reellen Punkten schneiden, von denen, welche sie in imaginären Punkten schneiden. Man erkennt auch, dass zwei conjugirte Hyperbeln dieselben Asymptoten haben. Der Ausdruck $\tan\theta = \pm \frac{b}{a}$ erlaubt uns aus den der Grösse und Lage nach gegebenen Axen die Asymptoten zu finden; denn wenn wir ein Rechteck bilden, indem wir durch B und A Parallelen zu den Axen ziehen, so sind die Asymptoten die Diagonalen dieses Rechtecks. Man hat ferner $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{1}{e}$; und da die Asymptoten mit der Axe der x gleiche Winkel bilden, so

muss der Winkel, welchen sie mit einander bilden $= 2\theta$ sein; d. h. **wenn die Excentricität einer Hyperbel gegeben ist, so ist auch der Winkel zwischen den Asymptoten gegeben; er ist das Doppelte des Winkels, dessen Secante der Excentricität gleich ist.**

Aufg. Die Excentricität eines durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitts zu finden.

Wir können nach Art. 87 zunächst die Tangente des Winkels zwischen den durch $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ repräsentirten geraden Linien ausdrücken und dann den Ausdruck für die Secante seiner Hälfte bilden. Oder wir können mit Zuhilfenahme des Art. 165 Aufg. 3 verfahren.

Wir erhalten $\frac{1}{a^2} = \frac{a_{11} + a_{22} - R}{2a_{33}}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{a_{11} + a_{22} + R}{2a_{33}},$
wo $R^2 = 4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2 = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} + (a_{11} + a_{22})^2.$

Also $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{R}{a_{33}}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2R}{a_{11} + a_{22} + R}.$

176. Wir schreiten nun dazu fort, einige Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel zu untersuchen und finden es vortheilhaft, beide Curven zusammen zu betrachten; denn da ihre Gleichungen nur in dem Zeichen von b^2 differiren, so haben sie manche Eigenschaften gemein, welche gleichzeitig bewiesen werden können, indem man das Zeichen von b^2 als unbestimmt ansieht. Wir wollen in den folgenden Artikeln die Zeichen gebrauchen, welche der Ellipse angehören. Der Leser kann dann die entsprechenden Formeln für die Hyperbel erhalten, indem er das Zeichen von b^2 verändert.

Wir übertragen zuerst einige der für die allgemeine Gleichung erhaltenen Resultate auf die besondere Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$

Nach Art. 105 ist die Gleichung der Tangente im Punkte $x'y'$ durch die Substitution von xx', yy' für x^2, y^2 gebildet, $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$

Der Beweis mag für diesen speciellen Fall wiederholt werden. Die Gleichung der zwei Punkte der Curve verbindenden Sehne ist

$$\frac{(x - x')(x - x'')}{a^2} + \frac{(y - y')(y - y'')}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \text{ oder}$$

$$\frac{(x' + x'')x}{a^2} + \frac{(y' + y'')y}{b^2} = \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + 1 \text{ und diess geht}$$

für $x' = x''$, $y' = y''$ in die vorher gegebene Gleichung der Tangente über. Dieselben Beweisgründe bleiben für schiefwinklige wie für rechtwinklige Coordinaten anwendbar; wenn aber ein Paar conjugirte Durchmesser zu Axen gewählt werden, so verschwindet der Coefficient von xy nach Artikel 102, die Coefficienten von x und y sind Null, weil der Coordinaten-Anfang das Centrum der Curve ist; und wenn also a', b' die Längen sind, welche die Curve in den Axen bestimmt, so ist genau wie in Artikel 168 zu zeigen, dass ihre Gleichung in der Form $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ geschrieben werden kann. Dann ergiebt sich aber aus dem Vorhergehenden, dass die Gleichung der Tangente ist

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1.$$

177. Die Gleichung der Polare, d. h. der geraden Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten, die von einem Punkte $x'y'$ ausgehen, ist von derselben Form mit der Gleichung der Tangente und ist daher

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1 \text{ oder } \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1,$$

wo im letzteren Falle die Axen irgend ein Paar von conjugirten Durchmessern, im ersten aber die Axen der Curve sind. Insbesondere ist die Polare eines Punktes in der Axe der x durch $\frac{xx'}{a'^2} = 1$ dargestellt. Um daher die Polare eines Punktes P zu finden, ziehen wir einen Durchmesser durch diesen Punkt, bestimmen den Punkt P' auf demselben so, dass das Rechteck $CP \cdot CP'$ dem Quadrat dieses Halbdurchmessers gleich ist und ziehen durch P' eine Parallele zu dem ihm conjugirten Durchmesser. Als ein specieller Fall entspringt daraus der früher bewiesene Satz: Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zu dem ihm conjugirten Durchmesser. (Art. 106.)

Aufg. 1. Die Bedingung zu finden, unter welcher irgend eine Linie $\xi x + \eta y = 1$ den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ berührt.

Indem wir die Gleichungen $\xi x + \eta y = 1$ und $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ vergleichen, finden wir $x' = \xi a^2$, und $y' = \eta b^2$ und durch Substitution dieser Werthe von x' und y' in die Gleichung der Curve erhalten wir die geforderte Bedingung $a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = 1$.

Aufg. 2. Die Gleichung des Tangentenpaares von $x'y'$ an den Kegelschnitt zu finden. Wir verfahren wie in Art. 107 und finden

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2.$$

Aufg. 3. Den durch das Tangentenpaar von $x'y'$ an die Curve gebildeten Winkel φ zu finden.

Wenn eine Gleichung zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt, so bezeichnen die gleich Null gesetzten drei höchsten Glieder zwei zu ihnen parallele Linien durch den Anfangspunkt: also hängt der durch das erste Paar der geraden Linien eingeschlossene Winkel nur von den drei höchsten Gliedern der allgemeinen Gleichung ab. Ordnen wir dann die im letzten Beispiel gefundene Gleichung, so finden wir nach Artikel 87

$$\tan\varphi = \frac{2ab\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)}}{x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2}.$$

Aufg. 4. Finde den Ort eines Punktes, an welchem die von ihm aus gezogenen Tangenten sich unter rechten Winkeln schneiden.

Indem wir den Nenner des Werthes von $\tan\theta$ mit 0 vergleichen, finden wir $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, die Gleichung eines mit der Ellipse concentrischen Kreises. Der Ort der Durchschnittspunkte der Tangenten, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, der nicht 90^0 ist, ist im Allgemeinen eine Curve des vierten Grades.

178. **Man soll die auf die Axen bezogene Gleichung des Durchmessers finden, welcher zu dem durch den Punkt $x'y'$ gehenden conjugirt ist.**

Da die fragliche Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und der Tangente im Punkte $x'y'$ parallel ist, so ist die Gleichung $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0$. Sind dann θ, θ' die Winkel, welche mit der Axe x von dem ursprünglichen und dem ihm conjugirten Durchmesser gebildet werden, so ist offenbar $\tan\theta = \frac{y'}{x'}$, und aus der Gleichung des conjugirten Durchmessers (Art. 21) $\tan\theta' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$. Daher ist $\tan\theta\tan\theta' = -\frac{b^2}{a^2}$, wie auch aus Art. 102 hervorgeht. Die entsprechende Relation für die Hyperbel ist (Art. 176) $\tan\theta\tan\theta' = \frac{b^2}{a^2}$.

179. Weil in der Ellipse $\tan\theta\tan\theta'$ negativ ist, so muss, wenn einer der Winkel θ, θ' spitz und daher seine Tangente positiv ist, der andre stumpf sein, seine Tangente negativ. Also, **conjugirte Durchmesser der Ellipse liegen auf verschiedenen Seiten der kleinen Axe** (welche $\theta = 90^0$ entspricht).

In der Hyperbel ist im Gegentheil $\tan\theta \tan\theta'$ positiv und θ, θ' müssen entweder beide spitz oder beide stumpf sein. Also, in der Hyperbel liegen conjugirte Durchmesser auf derselben Seite der conjugirten Axe.

In der Hyperbel muss, wenn $\tan\theta$ kleiner als $\frac{b}{a}$ ist, $\tan\theta'$ grösser als $\frac{b}{a}$ sein; aber nach Artikel 175 ist der dem Winkel, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist, entsprechende Durchmesser die Asymptote, welche nach demselben Artikel die Durchmesser, welche die Curve schneiden, von denen trennt, welche sie nicht schneiden. Also wenn der eine von zwei conjugirten Durchmessern die Hyperbel in reellen Punkten schneidet, so thut diess der andre nicht. Es wird auch erkannt, dass jede Asymptote ihr eigener conjugirter Durchmesser ist.

180. Die Coordinaten x'', y'' des Endpunkts von dem Durchmesser zu finden, der zu dem durch $x' y'$ gehenden conjugirt ist.

Diese Coordinaten werden gefunden, indem man aus der Gleichung des conjugirten Durchmessers und derjenigen der Curve $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ x und y bestimmt.

Indem wir in die letztere die aus der erstern gefundenen Werthe für x und y einsetzen und uns erinnern, dass die Coordinaten x', y' der Gleichung der Curve genügen, finden wir ohne Schwierigkeit $\frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b}$, $\frac{y''}{b} = \mp \frac{x'}{a}$.

181. Die Längen eines Durchmessers (a') und seines conjugirten (b') in Gliedern der Abscisse vom Endpunkte des Durchmessers auszudrücken.

1.) Wir haben $a'^2 = x'^2 + y'^2$. Aber $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2)$.

Also $a'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'^2 = b^2 + e^2 x'^2$.

2.) Ferner ist $b'^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2$

$= (a^2 - x'^2) + \frac{b^2}{a^2} x'^2$. Also $b'^2 = a^2 - e^2 x'^2$.

Aus diesen Werthen ergiebt sich $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, oder die Summe der Quadrate irgend eines Paars von conjugirten Durchmessern ist constant. (Aufg. 3, Art. 167.)

182. In der Hyperbel müssen wir die Zeichen von b^2 und b'^2 ändern und erhalten $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, oder die Differenz der Quadrate irgend eines Paares conjugirter Durchmesser einer Hyperbel ist constant.

Wenn wir in der Hyperbel $a = b$ haben, so wird ihre Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$, und sie wird eine gleichseitige Hyperbel genannt. Das eben bewiesene Theorem zeigt, dass jeder Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel seinem conjugirten gleich ist. Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel sind durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ gegeben, und daher unter rechten Winkeln zu einander. Deshalb wird diese Hyperbel oft auch eine rectanguläre Hyperbel genannt. Die Bedingung, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel darstelle, ist $a_{11} = - a_{22}$; denn diess ist nach Art. 79 die Bedingung, unter welcher die Asymptoten $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ rechtwinklig unter einander sind; aber wenn die Hyperbel rectangulär ist, muss sie gleichseitig sein, weil (Art. 175) die Tangente des halben Winkels zwischen den Asymptoten $= \frac{a_{22}}{a_{11}}$ und daher, wenn dieser Winkel 45^0 ist, $a_{22} = a_{11}$ sein muss.

183. Die Länge der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente zu finden.

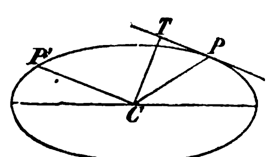
Die Länge der Senkrechten vom Coordinatenanfang auf die Linie $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ ist (Art. 23)

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)}} = \frac{ab}{\sqrt{\left(\frac{b^2x'^2}{a^2} + \frac{a^2y'^2}{b^2}\right)}}.$$

Wir zeigten aber im Art. 181, dass $b'^2 = \frac{b^2x'^2}{a^2} + \frac{a^2y'^2}{b^2}$, also $p = \frac{ab}{b'}$.

184. Den von zwei conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel zu bestimmen.

Der Winkel zwischen den Durchmessern ist gleich dem Winkel zwischen dem einen und der Tangente, welche dem andern



parallel ist; nun ist $\sin CPT = \frac{CT}{CP} = \frac{p}{a'}$.

Also $\sin PCP' = \sin \varphi = \frac{ab}{a'b'}$.

Die Gleichung $a'b' \sin \varphi = ab$ zeigt, dass das durch Verbindung der Enden von conjugirten Durchmessern der Ellipse oder Hyperbel gebildete Dreieck einen constanten Inhalt hat. (Art. 167, Aufg. 2.)

185. Da die Summe der Quadrate von irgend zwei conjugirten Durchmessern constant ist, so ist ihr Rechteck ein Maximum, wenn sie gleich sind und daher ist in diesem Falle $\sin \theta$ ein Minimum, also ist der spitze Winkel zwischen den zwei gleichen conjugirten Durchmessern kleiner und folglich der stumpfe Winkel grösser, als der von irgend einem andern Paar conjugirter Durchmesser gebildete. Die Länge der gleichen conjugirten Durchmesser wird gefunden, indem man $a' = b'$ in die Gleichung $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ substituirt. Daraus ergiebt sich a'^2 als die Hälfte der Summe von a^2 und b^2 und in diesem Falle $\sin \theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$. Der Winkel, welchen jeder dieser conjugirten Durchmesser mit der Axe der x macht, wird aus der Gleichung gefunden $\tan \theta \tan \theta' = -\frac{b^2}{a^2}$, indem man darin $\tan \theta = -\tan \theta'$ setzt, weil irgend zwei gleiche Durchmesser gleiche Winkel mit der Axe der x auf entgegengesetzten Seiten von ihr bilden. (Art. 170.) Somit $\tan \theta = \frac{b}{a}$. Es folgt daher nach Art. 175, dass, wenn eine Ellipse und Hyperbel dieselben Axen in Grösse und Lage haben, die Asymptoten der Hyperbel mit den gleichen conjugirten Durchmessern der Ellipse zusammenfallen.

Die allgemeine Gleichung einer Ellipse, bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser (Art. 176) wird $x^2 + y^2 = a'^2$, wenn $a' = b'$.

Wir sehen daraus, dass die Gleichung jeder Ellipse in dieselbe Form, wie die Gleichung des Kreises gebracht werden kann, nämlich in die Form $x^2 + y^2 = r^2$, indem man die gleichen conjugirten Durchmesser zu Coordinatenaxen wählt; aber

in dem Falle der Ellipse ist der Winkel zwischen diesen Axen schief, während er beim Kreise ein rechter ist.

186. **Die Senkrechte vom Centrum auf die Tangente in Function der Winkel auszudrücken, die sie mit den Axen bildet.**

Wenn wir davon ausgehen, die Gleichung der Tangente $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ in die Form $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ zu bringen (Art. 25), so finden wir durch Vergleichung dieser Gleichungen unmittelbar $\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos\alpha}{p}$, $\frac{y'}{b^2} = \frac{\sin\alpha}{p}$. Indem wir dann in die Gleichung der Curve die so erhaltenen Werthe von x', y' einsetzen, finden wir $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$ *).

Die Gleichung der Tangente kann daher geschrieben werden $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)} = 0$ und nach Artikel 34 ist die Senkrechte von irgend einem Punkte (x', y') auf die Tangente $\sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)} - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, wo wir die Formel so geschrieben haben, dass die Normale positiv wird, wenn der Punkt $x'y'$ mit dem Centrum auf derselben Seite der Tangente liegt.

Aufg. Den Ort des Durchschnitts der Tangenten zu finden, die sich unter rechten Winkeln schneiden.

Seien p, p' die Senkrechten zu diesen Tangenten, so ist

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,\quad p'^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha,$$
$$p^2 + p'^2 = a^2 + b^2.$$

Aber das Quadrat der Entfernung vom Centrum bis zum Durchschnitt zweier Linien, die sich rechtwinklig schneiden, ist gleich der Summe der Quadrate seiner Entfernungen von diesen Linien selbst; diese Entfernung ist daher constant und der geforderte Ort ist somit ein Kreis. (Art. 177, Aufg. 4.)

187. Die Sehnen, welche die Enden eines Durchmessers mit einem beliebigen Punkte der Curve verbinden, werden **Supplementarsehnen** genannt.

Durchmesser, die zu irgend einem Paar Supplementarsehnen parallel sind, sind conjugirt.

Denn betrachten wir das Dreieck, welches gebildet wird durch Verbindung der Enden eines Durchmessers AB mit einem Punkte

---

*) Ebenso findet man, dass $p^2 = a'^2\cos^2\alpha + b'^2\cos^2\beta$, wo α und β die Winkel sind, welche irgend zwei zu einander conjugirten Durchmessern entsprechen.

D der Curve; so muss nach den Elementen der Geometrie die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Seiten mit der dritten Seite parallel sein, also muss der AD halbirende Durchmesser parallel zu BD und der BD halbirende parallel zu AD sein.

Dasselbe kann analytisch bewiesen werden, indem man die Gleichungen von AD und BD bildet und zeigt, dass das Product der Tangenten der durch diese Linien mit der Axe gebildeten Winkel $= -\frac{b^2}{a^2}$ ist.

Diese Eigenschaft erlaubt uns, **die Paare conjugirter Durchmesser zu construiren, welche einen vorgeschriebenen Winkel mit einander bilden.** Denn wenn wir über irgend einem Durchmesser das Segment eines Kreises beschreiben, welches den gegebenen Winkel enthält, und die Punkte, wo dieser Kreis die Curve schneidet, mit den Enden des angenommenen Durchmessers verbinden, so erhalten wir ein Paar Supplementarsehnen, die unter dem angegebenen Winkel geneigt sind und die zu ihnen parallelen Durchmesser sind die zu einander conjugirten Durchmesser, welche der Aufgabe genügen.

Aufg. 1. Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.

Ihre Gleichungen sind $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = \pm 1$. Diess folgt auch aus dem Theorem des Art. 108 und aus der Bemerkung, dass das Centrum der Pol der unendlich entfernten geraden Linie ist. (Art. 107.)

Aufg. 2. Wenn eine veränderliche Tangente eines Central-Kegelschnitts zwei feste parallele Tangenten schneidet, so bestimmt sie Abschnitte auf diesen, deren Rechteck constant und dem Quadrat des zu ihnen parallelen Halbdurchmessers gleich ist.

Nehmen wir den den Tangenten parallelen Durchmesser und den ihm conjugirten zu Coordinaten-Axen, so sind die Gleichungen der Curve und der veränderlichen Tangente $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ und $\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1$.

Die Abschnitte in den festen Tangenten werden gefunden, indem man x nach einander $= \pm a'$ in der letzten Gleichung macht, und wir erhalten sie daher $y = \frac{b'^2}{y'}\left(1 \mp \frac{x'}{a'}\right)$ und daher ist ihr Product $\frac{b'^4}{y'^2}\left(1 - \frac{x'^2}{a'^2}\right)$, welcher Ausdruck sich durch die Substitution des der Gleichung der Curve entnommenen Werthes von y'^2 auf b'^2 reducirt.

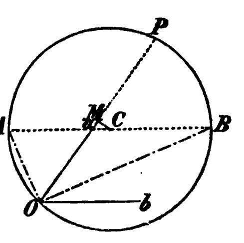
Aufg. 3. Bei derselben Construction ist das Rechteck aus den Segmenten der veränderlichen Tangente gleich dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbdurchmessers.

Denn der Abschnitt auf einer der parallelen Tangenten verhält sich zu dem anliegenden Segment der veränderlichen Tangente wie die parallelen Halbdurchmesser. (Art. 112.) Daher verhält sich das Rechteck aus den Abschnitten der festen Tangenten zu dem Rechteck aus den Abschnitten der veränderlichen Tangente, wie die Quadrate dieser Halbdurchmesser; und da das erste Rechteck gleich dem Quadrat des den festen Tangenten parallelen Halbdurchmessers ist, so muss auch das zweite Rechteck gleich dem Quadrat des zur veränderlichen Tangente parallelen Halbdurchmessers sein.

Aufg. 4. Das Rechteck aus den Segmenten einer Tangente, welche durch ihren Durchschnitt mit zwei beliebigen conjugirten Durchmessern gebildet werden, ist dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbdurchmessers gleich.

Nehmen wir den der Tangente parallelen Halbdurchmesser und den ihm conjugirten zu Axen, so sind die Gleichungen irgend zweier conjugirten Durchmesser $y = \frac{y'}{x'}x$ und $\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 0$, und die dadurch in der Tangente gebildeten Abschnitte werden gefunden, indem man $x = a'$ macht, $y = \frac{y'}{x'}a'$ und $y = -\frac{b'^2 x'}{a' y'}$; das von ihnen gebildete Rechteck ist $= b'^2$. Wir hätten in gleicher Weise einen rein algebraischen Beweis für den Satz der Aufg. 3 geben können. — Die Verbindungslinien des Centrums und der Punkte, in welchen eine veränderliche Tangente ein Paar feste parallele Tangenten schneidet, sind nach dem Vorigen nothwendig Paare conjugirter Durchmesser.

Aufg. 5. Aus der Grösse und Lage zweier conjugirter Durchmesser (Oa, Ob) in einem Centralkegelschnitt die Axen desselben zu bestimmen.



Die folgende Construction ist auf das in der letzten Aufgabe gefundene Theorem gegründet: Durch a, das Ende des einen Durchmessers, ziehe man eine Parallele zum andern; sie ist zugleich eine Tangente der Curve. Bestimme darnach in Oa einen Punkt P so, dass das Rechteck $Oa \,.\, aP = Ob^2$ (auf der dem a entgegengesetzten Seite von O für die Ellipse, auf derselben Seite für die Hyperbel), und beschreibe einen Kreis durch O, P, der sein Centrum in aC hat, so bezeichnen die Linien OA, OB die Axen der Curve. Denn weil das Rechteck $Aa \,.\, aB = Oa \,.\, aP = Ob^2$ ist, so sind die Linien OA, OB conjugirte Durchmesser, und weil AB ein Durchmesser des Kreises ist, ist der von ihnen gebildete Winkel AOB ein rechter.

Aufg. 6. Wenn irgend zwei Halbdurchmesser gegeben sind, so sind die Dreiecke, welche von ihnen und denjenigen beiden unter ihren Ordinaten gebildet werden, welche respective durch den Endpunkt des andern Halbdurchmessers gehen, von gleicher Fläche.

Aufg. 7. Die Dreiecke, welche irgend zwei Halbdurchmesser mit den beiden Tangenten der Curve in ihren Endpunkten bilden, sind von gleicher Fläche.

188. Eine durch irgend einen Punkt einer Curve senkrecht zur Tangente in diesem Punkte gezogene gerade Linie wird eine *Normale* genannt. Indem wir nach Artikel 32 die Gleichung einer durch $(x'y')$ gehenden Linie bilden, die zu $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ senkrecht ist, finden wir die Gleichung der Normale eines Kegelschnitts $\frac{x'}{a^2}(y - y') = \frac{y'}{b^2}(x - x')$ oder $\frac{a^2 x}{x'} - \frac{b^2 y}{y'} = c^2$, wo c^2 wie in Art. 169 die Differenz $a^2 - b^2$ bezeichnet.

Wir finden daraus den Abschnitt CN, welchen eine Normale in der Hauptaxe bestimmt, durch die Substitution $y = 0$

$$x = \frac{c^2}{a^2}x', \text{ oder } x = e^2 x'.$$

Wir können daher von irgend einem Punkte in der Axe eine Normale zu einer Ellipse ziehen, denn aus CN bestimmen wir hiernach die Abscisse des Fusspunktes der Normale in der Curve.

Der Kreis kann als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität $= 0$, weil $c^2 = a^2 - b^2 = 0$. Der Abschnitt CN ist daher in dem Fall des Kreises immer $= 0$, oder *jede Normale eines Kreises geht durch sein Centrum*.

189. Das Stück MN der Hauptaxe, welches zwischen Normale und Ordinate enthalten ist, wird die *Subnormale* genannt. Ihre Länge ist nach dem letzten Artikel $x' - \frac{c^2}{a^2}x' = \frac{b^2}{a^2}x'$; d. i. *die Normale zerlegt die Abscisse in zwei Theile, welche in einem constanten Verhältniss sind.*

Wenn eine im Punkte P an die Curve gezogene Tangente die Axe in T schneidet, so wird der Abschnitt MT die *Subtangente* genannt.

Weil die ganze Länge $CT = \frac{a^2}{x'}$ ist (Art. 177), so ist die

$$\text{Subtangente} = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Auch die Länge der Normale kann leicht gefunden werden. Denn:

$$PN^2 = PM^2 + MN^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4}x'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2\right).$$

Wenn aber b' der zu CP conjugirte Halbdurchmesser ist,

so ist die Grösse innerhalb der Parenthesen $= b'^2$. (Art. 181). Also ist die Länge der Normale $PN = \frac{bb'}{a}$.

Wenn die Normale bis zum Durchschnitt mit der kleinen Axe verlängert wird, so zeigt man in derselben Art, dass ihre Länge $= \frac{ab'}{b}$ ist. Die Vergleichung beider Ergebnisse liefert den Satz: **Das Rechteck aus den Segmenten der Normale ist gleich dem Quadrat des conjugirten Halbdurchmessers.**

Im Artikel 185 fanden wir, dass die Senkrechte vom Centrum auf die Tangente $= \frac{ab}{b'}$. **Also ist das Rechteck aus der Normale und der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente constant, und gleich dem Quadrat der Halbaxe.**

Die Länge der Normale kann auch in Function des Winkels ausgedrückt werden, den sie mit der Axe einschliesst:

$$PN = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)}} \text{ (Art. 186)} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \alpha)}}.$$

Aufg. 1. Eine Normale zu einer Hyperbel oder Ellipse zu ziehen, die durch einen gegebenen Punkt geht.

Die Gleichung der Normale $a^2 x y' - b^2 x' y = c^2 x' y'$ drückt eine Relation aus zwischen den Coordinaten $x' y'$ irgend eines Punktes in der Curve und den Coordinaten xy irgend eines Punktes in der Normale derselben in $x' y'$. Wir drücken aus, dass der Punkt in der Normale bekannt und ihr Fusspunkt in der Curve gesucht sei, indem wir die Indices vor den Coordinaten des letztern beseitigen und sie denen des erstern beifügen. So finden wir, dass die Punkte der Curve, deren Normalen durch $(x' y')$ gehen, die Durchschnittspunkte der Curve mit der Hyperbel $c^2 xy = a^2 x' y - b^2 y' x$ sind.

Aufg. 2. Wenn durch irgend einen gegebenen Punkt in einem Kegelschnitt zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander so gezogen werden, dass sie die Curve schneiden, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch einen festen Punkt in der Normale.

Nehmen wir die Tangente und Normale der Curve in dem gegebenen Punkte zu Coordinaten-Axen, so muss die Gleichung der Curve von der Form sein $a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{23} y = 0$. ($a_{33} = 0$, weil der Ursprung in der Curve liegt und $a_{13} = 0$ (Art. 87), weil die Tangente als Axe der x vorausgesetzt ist.) Ist nun die Gleichung irgend zweier geraden Linien durch den Anfangspunkt der Coordinaten durch $x^2 + 2pxy + qy^2 = 0$ repräsentirt, so multipliciren wir diese Glei-

chung mit a_{11} und subtrahiren sie von der der Curve und erhalten $2(a_{12} - a_{11}p)\,xy + (a_{22} - a_{11}q)\,y^2 + 2a_{23}y = 0$ als (Art. 40) die Gleichung einer durch die Durchschnittspunkte der bezeichneten geraden Linie und des Kegelschnitts gehenden Figur. Aber dieselbe kann in $y = 0$ (die Gleichung der Tangente in dem gegebenen Punkte) und $2(a_{12} - a_{11}p)\,x + (a_{22} - a_{11}q)\,y + 2a_{23} = 0$ zerlegt werden, und diese letztere muss daher die Gleichung der die Endpunkte der gegebenen Linien verbindenden Sehne sein. Der Punkt, in welchem diese Sehne die Normale, die Axe der y, schneidet, ist bestimmt durch seine Ordinate $y = \frac{2a_{23}}{a_{11}q - a_{22}}$. Wenn aber die geraden Linien rechtwinklig sind, ist $q = -1$ (Art. 87) und der Abschnitt in der Normale hat die constante Länge $= -\frac{2a_{23}}{a_{11} + a_{22}}$. Für den Kreis ist diese constante Länge dem Halbmesser gleich, für die gleichseitige Hyperbel ist sie unendlich gross. Die fragliche Linie ist immer der Normale parallel. Wenn man daher durch einen Punkt der gleichseitigen Hyperbel zwei zu einander rechtwinklige Sehnen zieht, so ist die von ihm auf die gerade Verbindungslinie ihrer Endpunkte gefällte Normale die Tangente der Curve.

Der Beweis zeigt auch, dass dieser Satz allgemein dann wahr ist, wenn die geraden Linien mit der Normale Winkel bilden, für welche das Product der trigonometrischen Tangenten constant ist, denn dann ist q constant und daher der Abschnitt $\frac{2a_{23}}{a_{11}q - a_{22}}$ desgleichen.

Aufg. 3. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten in den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ zu bestimmen.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} = 1$$

sind

$$x = \frac{a^2(y' - y'')}{y'x'' - y''x'}, \quad y = \frac{b^2(x' - x'')}{x'y'' - y'x''}.$$

Aufg. 4. Die Coordinaten des Durchschnitts der Normalen in den Punkten $x'y'$, $x''y''$ zu finden.

Indem wir ebenso verfahren, wie in der letzten Aufgabe, finden wir $x = \frac{(a^2 - b^2)\,x'x''X}{a^4}$, $x = \frac{(b^2 - a^2)\,y'y''Y}{b^4}$, worin X, Y die Coordinaten des Durchschnitts der Tangenten bezeichnen, die in der letzten Aufgabe gefunden wurden.

Die Werthe von X und Y können in andern Formen geschrieben werden, weil wir durch Combination der Gleichungen $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ die Resultate $x'^2y''^2 - y'^2x''^2 = b^2(x'^2 - x''^2) = -a^2(y'^2 - y''^2)$ finden. Daher ist $X = \frac{x'y'' + y'x''}{y' + y''}$, $Y = \frac{x'y'' + y'x''}{x' + x''}$. Wir können auch zeigen, dass $X = \frac{x' + x''}{1 + \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2}}$, $Y = \frac{y' + y''}{1 + \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2}}$ ist.

190. Zwei Punkte, welche in der grossen Axe einer Ellipse zu beiden Punkten des Centrums in der Entfernung $\pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$ oder $\pm c$ gelegen sind, heissen die Brennpunkte der Curve. Die Brennpunkte der Hyperbel sind zwei Punkte in der transversalen Axe, gleichfalls in der Entfernung $\pm c$ vom Centrum, wo c jedoch die der Hyperbel entsprechende Bedeutung $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$ hat.

Die Entfernung eines beliebigen Punktes der Ellipse vom Brennpunkt auszudrücken. Da $x = +c$, $y = 0$ die Coordinaten des einen Brennpunkts sind, so ist das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes (x', y') von ihm:

$$= (x' - c)^2 + y'^2 = x'^2 + y'^2 - 2cx' + c^2.$$

Aber nach Artikel 181 ist $x'^2 + y'^2 = b^2 + e^2x'^2$ und $b^2 + c^2 = a^2$.

Also $FP^2 = a^2 - 2cx' + e^2x'^2$, und indem man erinnert, dass $c = ae$, $FP = a - ex'$.

(Wir verwerfen den Werth $ex' - a$, den man erhält, indem man der Quadratwurzel das andre Vorzeichen giebt, denn weil x' kleiner als a und e kleiner als 1 ist, ist die Grösse $ex' - a$ stets negativ und kann in unserm Falle nicht in Betracht kommen, weil wir nicht die Richtung, sondern die absolute Grösse des Radius vector FP betrachten.)

Wir haben ebenso für die Entfernung vom andern Brennpunkt $F'P = a + ex'$, weil nur $-e$ für $+e$ in der vorigen Formel zu schreiben ist; also ist $FP + F'P = 2a$ oder die Summe der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ellipse von den Brennpunkten ist constant und gleich ihrer grossen Axe.

191. Indem wir den vorigen Satz auf die Hyperbel anwenden, erhalten wir denselben Werth für FP^2; aber indem wir die Quadratwurzel ausziehen, müssen wir das Zeichen des Werthes von FP wechseln, denn in der Hyperbel ist x' grösser als a und e ist grösser als 1. Also ist $a - ex'$ immer negativ und die absolute Grösse des Radius vector ist daher $FP = ex' - a$. In gleicher Weise ist $F'P = ex' + a$, und daher $F'P - FP = 2a$; also ist in der Hyperbel die Differenz der Brennstrah-

len constant und gleich der transversalen Axe. Für beide Curven ist das Rechteck unter den Brennstrahlen $= \pm (a^2 - e^2x^2)$ d. h. (Art. 181) $= b'^2$.

192. Es ist nützlich, die Umkehrung der obigen Resultate zu beweisen, indem man den Ort der Spitze eines Dreiecks sucht, für welches die Basis und die Summe oder die Differenz der Seiten gegeben ist.

Indem man den Mittelpunkt der Basis ($= 2c$) zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt, wird die Gleichung des Ortes, $\sqrt{[y^2 + (c + x)^2]} \pm \sqrt{[(y^2 + (c - x)^2]} = 2a$, welche durch Entfernung der Wurzelgrössen die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ annimmt. Wenn die Summe der Seiten gegeben ist, so ist a grösser als c, weil die Summe der Seiten stets grösser als die Basis sein muss; daher ist der Coefficient von y^2 positiv und der Ort eine Ellipse.

Wenn aber die Differenz gegeben ist, so ist a kleiner als c, der Coefficient von y^2 negativ und der Ort eine Hyperbel.

193. Mit Hilfe des vorigen Theorems kann man eine Ellipse oder Hyperbel mechanisch beschreiben. Wenn die Enden eines Fadens an zwei festen Punkten F und F' befestigt sind, so beschreibt ein Stift, der sich so bewegt, dass er den Faden immer gleichmässig gestreckt erhält, eine Ellipse, von welcher F und F' die Brennpunkte sind und deren grosse Axe gleich der Länge des Fadens ist.

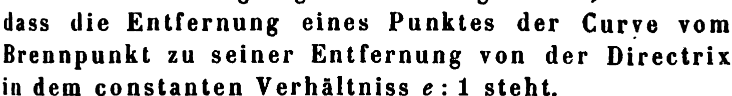
Um eine Hyperbel zu beschreiben, lasse man ein Lineal an einem Ende F drehbar befestigt sein; wenn dann ein am festen Punkte F' befestigter Faden auch an einem Punkt des Lineals R befestigt ist und durch einen Ring in P gespannt erhalten wird, so beschreibt der Punkt P bei der Drehung des Lineals eine Hyperbel. Denn da die Summe von $F'P$ und PR constant ist, so muss es die Differenz von FP und $F'P$ auch sein.

194. Die Polare eines Brennpunkts wird die Directrix des Kegelschnitts genannt. Die Directrix ist daher nach Art. 177 eine gerade Linie, welche in einer Entfernung $\pm \frac{a^2}{c}$ vom Centrum zur grossen Axe senkrecht ist.

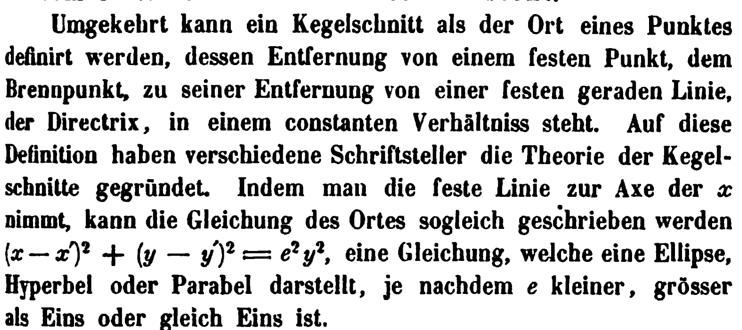
Da wir die Entfernung der Directrix vom Centrum kennen, so können wir ihre Entfernung von irgend einem Punkt in der Curve finden. Sie muss gleich sein mit

$$\frac{a^2}{c} - x' \text{ oder } = \frac{a}{c}(a - ex') = \frac{1}{e}(a - ex').$$

Aber die Entfernung irgend eines Punktes in der Curve vom Brennpunkt ist gleich $a - ex'$. Wir erkennen also die wichtige Eigenschaft der Kegelschnitte,



dass die Entfernung eines Punktes der Curve vom Brennpunkt zu seiner Entfernung von der Directrix in dem constanten Verhältniss $e:1$ steht.



Umgekehrt kann ein Kegelschnitt als der Ort eines Punktes definirt werden, dessen Entfernung von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, zu seiner Entfernung von einer festen geraden Linie, der Directrix, in einem constanten Verhältniss steht. Auf diese Definition haben verschiedene Schriftsteller die Theorie der Kegelschnitte gegründet. Indem man die feste Linie zur Axe der x nimmt, kann die Gleichung des Ortes sogleich geschrieben werden $(x - x')^2 + (y - y')^2 = e^2 y^2$, eine Gleichung, welche eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, je nachdem e kleiner, grösser als Eins oder gleich Eins ist.

Aufg. 1. Wenn eine Curve so beschaffen ist, dass die Entfernung irgend eines Punktes in ihr von einem festen Punkt als eine rationale lineare Function seiner Coordinaten ausgedrückt werden kann, so muss die Curve ein Kegelschnitt und der feste Punkt ihr Brennpunkt sein.

Denn wenn die Entfernung ausgedrückt werden kann durch $\varrho = Ax + By + C$, so bezeichnet diese Gleichung, da $Ax + By + C$ der Senkrechten proportional ist, welche man auf die gerade Linie von der Gleichung $Ax + By + C = 0$ fällen kann, die Eigenschaft der Curve, dass die Entfernung irgend eines ihrer Punkte von dem festen Punkt zu seiner Entfernung von dieser geraden Linie in einem constanten Verhältniss steht.

Aufg. 2. Die Brennpunkte der im Punkte einer Ellipse als Centrum und mit der zugehörigen Tangente und Normale als Axen beschriebenen Ellipsen, welche respective die grosse oder die kleine Axe der gegebenen Ellipse in ihrem Centrum berühren, liegen auf zwei concentrischen Kreisen, deren Halbmesser die Summe und Differenz der Halbaxen derselben sind.

195. Die Länge der Senkrechten vom Brennpunkt auf die Tangente zu finden.

Die Länge der Senkrechten vom Brennpunkt $(+c, 0)$ auf die Linie $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ ist nach Art. 34 $= \frac{1 - \frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)}}$;

aber nach Art. 183 ist $\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)} = \frac{b'}{ab}$.

Also $FT = \frac{b}{b'}(a - ex') = \frac{b}{b'} . FP.$

In gleicher Weise ist $F'T' = \frac{b}{b'}(a + ex') = \frac{b}{b'} . F'P.$

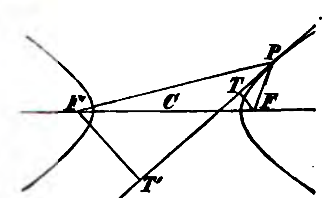
Also $FT . F'T' = b^2$ (weil $a^2 - e^2x'^2 = b'^2$); oder **das Rechteck aus den Perpendikeln von den Brennpunkten auf die Tangente ist constant und gleich dem Quadrat über der halben kleinen Axe.** Diese Eigenschaft gilt ebenso wohl für die Ellipse als für die Hyperbel.

196. **Die Brennstrahlen des Berührungspunktes bilden gleiche Winkel mit der Tangente.**

Denn wir haben

$$FT = \frac{b}{b'} FP \text{ oder } \frac{FT}{FP} = \frac{b}{b'}; \text{ aber } \frac{FT}{FP} = \sin FPT.$$

Also ist der Sinus des Winkels, den der Brennstrahl mit der Tangente bildet $= \frac{b}{b'}$. Denselben Werth finden wir für $\sin F'PT'$, den Sinus des Winkels, welchen der andre Brennstrahl mit der Tangente bildet. Diese Eigenschaft ist sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel gültig, und aus der Betrachtung der Figuren ist offenbar, dass die Tangente der Ellipse die äussere Halbirungslinie des Winkels zwischen den Brennstrahlen und die Tangente der Hyperbel die innere Halbirungslinie desselben ist.



Wenn also eine Ellipse und eine Hyperbel dieselben Brennpunkte haben, so schneiden sie einander in den Punkten, die sie gemein haben, rechtwinklig, d. h. die Tangente der Ellipse in diesem Punkt schliesst mit der Tangente der Hyperbel in demselben Punkte einen rechten Winkel ein.

Aufg. 1. Beweise analytisch, dass confocale Kegelschnitte sich rechtwinklig schneiden.

Die Coordinaten jedes Durchschnittspunktes der Kegelschnitte $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$ genügen der durch Subtraction beider Gleichungen erhaltenen Relation $\frac{(a^2-a'^2)\,x'^2}{a^2a'^2}+\frac{(b^2-b'^2)\,y'^2}{b^2b'^2}=0$.

Aber wenn die Kegelschnitte confocal sind, ist $a^2-a'^2=b^2-b'^2$, und diese Relation wird $\frac{x'^2}{a^2a'^2}+\frac{y'^2}{b^2b'^2}=0$. Diess ist aber die Bedingung (Art. 32), unter welcher die zwei Tangenten $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$ und $\frac{xx'}{a'^2}+\frac{yy'}{b'^2}=1$ rechtwinklig zu einander sind.

Aufg. 2. Bestimme die Länge einer Linie, die durch das Centrum parallel zu einem Brennstrahl gezogen und durch die entsprechende Tangente begrenzt wird.

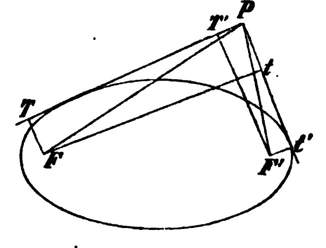
Diese Länge wird gefunden, indem man die Senkrechte vom Centrum auf die Tangente $\left(\frac{ab}{b'}\right)$ mit dem Sinus des Winkels zwischen Radius vector und Tangente $\left(\frac{b'}{b}\right)$ dividirt und ist daher $=a$.

Aufg. 3. Man bestätige, dass die Normale, welche eine der Halbirungslinien des Winkels zwischen den Radien vectoren ist, die Entfernung der Brennpunkte in zwei Abschnitte theilt, welche den Radien vectoren selbst proportional sind. (Euklid, VI, 3.) Die Entfernung des Fusspunktes der Normale in der Axe x vom Centrum ist $=e^2x'$ (Art. 188), seine Entfernungen von den Brennpunkten sind somit $c+e^2x'$, $c-e^2x'$; Grössen, welche offenbar das $e$fache der Radien vectoren $a+ex'$, $a-ex'$ sind.

Aufg. 4. Eine Normale zur Ellipse von irgend einem Punkt in der kleinen Axe aus zu ziehen.

Der durch den gegebenen Punkt und die beiden Brennpunkte gehende Kreis schneidet die Curve in den Punkten, nach denen die Normale zu ziehen ist.

197. Aus dem Satz des Artikel 195, dass das Rechteck unter den von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Normalen constant ist, kann noch eine andre wichtige Folge hergeleitet werden. Denn für zwei beliebige Tangenten ist $FT\,.\,F'T'=Ft\,.\,F't'$, oder $\frac{FT}{Ft}=\frac{F't'}{F'T'}$. Aber $\frac{FT}{Ft}$ ist das Verhältniss der Sinus der Theile, in welche die Linie FP den Winkel an



P theilt und $\frac{F't'}{F'T'}$ ist das Verhältniss der Sinus der Theile, in

welche $F'P$ denselben Winkel theilt; wir haben daher $\angle TPF = \angle tPF'$. Wenn wir einen Kegelschnitt durch P denken, der F und F' zu Brennpunkten hat, so ist in Art. 196 gezeigt, dass die Tangente an ihn gegen die Linien FP und $F'P$ gleich geneigt ist; wir schliessen daher nach dem gegenwärtigen Artikel, dass sie auch zu PT, Pt gleich geneigt ist, und leiten so den folgenden Lehrsatz ab: Die Tangenten, welche man durch einen beliebigen Punkt auf einem Kegelschnitt an einen confocalen Kegelschnitt ziehen kann, sind gegen die Tangente des Kegelschnitts in jenem Punkte gleich geneigt.

198. Man soll den Ort der Fusspunkte der Senkrechten bestimmen, die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällt werden können.

Die Senkrechte vom Brennpunkte wird in Function des von ihr mit der Axe gebildeten Winkels ausgedrückt, indem man in die Formel des Artikel 186, nämlich

$p = \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)} - x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ einsetzt

$x' = c$, $y' = 0$. Demnach ist die Polargleichung des Ortes

$$\varrho = \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)} - c \cos \alpha,$$

oder $\varrho^2 + 2c\varrho \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha,$

oder $$\varrho^2 + 2c\varrho \cos \alpha = b^2.$$

Diess ist nach Artikel 127 die Polargleichung eines Kreises, dessen Centrum in der Axe der x in der Entfernung $-c$ vom Brennpunkte liegt, der Kreis ist daher mit der Curve concentrisch. Sein Halbmesser ist nach demselben Artikel $= a$, d. h. wenn wir einen Kreis beschreiben, der die transversale Axe einer Hyperbel oder Ellipse zum Durchmesser hat, so liegt der Fusspunkt der Senkrechten vom Brennpunkte auf die Tangente in der Peripherie dieses Kreises.

Oder umgekehrt, wenn wir von einem Punkt F einen Radius vector FP zu einem gegebenen Kreise ziehen und TP senkrecht zu FP legen, so berührt die Linie TP stets einen Kegelschnitt, der F zu seinem Brennpunkt hat, und der eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem F innerhalb oder ausserhalb des Kreises ist.

Aus Art. 196, Aufg. 2 ist bekannt, dass die Linie CT, deren Länge $= a$ ist, dem Brennstrahl $F'P$ parallel läuft.

199. Den Winkel zu finden, der durch die von einem Punkte (x, y) aus an einen Central-Kegelschnitt gelegte Tangente am Brennpunkte gespannt wird.

Wir wählen das Centrum zum Anfangspunkt der Coordinaten, bezeichnen den Berührungspunkt der Tangente durch (x', y') und die Radien vectoren, welche diesem und dem gegebenen Punkt entsprechen, durch ϱ' und ϱ, endlich die Winkel, welche dieselben mit der Hauptaxe einschliessen, durch θ' und θ; alsdann gelten die Gleichungen:

$$\cos\theta = \frac{x+c}{\varrho},\quad \sin\theta = \frac{y}{\varrho} \text{ und } \cos\theta' = \frac{x'+c}{\varrho'},\quad \sin\theta' = \frac{y'}{\varrho'}$$

und demnach $\cos(\theta - \theta') = \frac{(x+c)(x'+c)+yy'}{\varrho\varrho'}$. Aber nach der Gleichung der Tangente ist $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ und wir erhalten durch Substitution des daraus für yy' entspringenden Werthes

$$\varrho\varrho' \cos(\theta - \theta') = xx' + cx + cx' + c^2 - \frac{b^2}{a^2}xx' + b^2$$
$$= e^2xx' + cx + cx' + a^2 = (a+ex)(a+ex');$$

oder weil $\varrho' = a + ex'$ ist: $\cos(\theta - \theta') = \frac{a+ex}{\varrho}$.

Weil dieser Werth nur von den Coordinaten x, y abhängt, und die Coordinaten des Berührungspunktes nicht enthält, so spannt jede Tangente von xy aus denselben Winkel am Brennpunkt; es wird also der von irgend einer Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel durch die Verbindungslinie des Brennpunkts mit ihrem Pol halbirt.

200. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Pol einer durch ihn gehenden Sehne ist senkrecht zu dieser Sehne.

Dieser Satz kann als ein specieller Fall des letzten Artikels abgeleitet werden, weil der am Brennpunkt gespannte Winkel in diesem Falle 180^0 ist. Man kann ihn aber auch direct beweisen wie folgt: Die Gleichung der Senkrechten durch einen Punkt ($x'y'$) zur Polare dieses Punktes $\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1\right)$ ist wie in Artikel 188

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2.$$

Wenn aber $x'y'$ ein Punkt in der Directrix ist, so haben wir $x' = \frac{a^2}{c}$ und man kann erkennen, dass sowohl der Gleichung der Polare als der der Senkrechten durch die Coordinaten des Brennpunktes ($x = c$, $y = 0$) genügt wird. Beim Gebrauch der Polarcoordinaten in der Untersuchung der Curven wird der von der Tangente in einer Senkrechten zum Radius vector des Berührungspunktes gebildete Abschnitt die Polarsubtangente genannt. Demnach kann das Theorem dieses Artikels auch so ausgesprochen werden: **Die Directrix ist der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente für den Brennpunkt als Pol.**

Wir werden im folgenden Kapitel erkennen, dass die Theoreme dieses und des letzten Artikels auch für die Parabel wahr sind.

Aufg. 1. Der Winkel, welcher durch den zwischen zwei festen Tangenten enthaltenen Abschnitt einer veränderlichen Tangente am Brennpunkte gespannt wird, ist constant.

Nach Art. 199 ist er die Hälfte des durch die Berührungssehne der festen Tangenten gespannten Winkels.

Aufg. 2. Wenn eine Sehne PP' die Directrix in D schneidet, so ist FD die äussere Halbirungslinie des Winkels PFP'.

Denn FT ist die innere Halbirungslinie (Art. 199); aber D ist der Pol von FT (weil es der Durchschnitt von PP', der Polare von T, mit der Directrix, der Polare von F, ist); daher ist DF senkrecht zu FT und somit die äussere Halbirungslinie.

Aufg. 3. Wenn zwei feste Punkte Q, Q' eines Kegelschnitts mit einem veränderlichen Punkte P desselben verbunden werden, so fassen die Verbindungslinien in der Directrix des Kegelschnitts ein Segment zwischen sich, welches vom zugehörigen Brennpunkt aus unter constantem Winkel gesehen wird. Denn wenn wir die Durchschnittspunkte jener beiden Sekanten der Curve mit der Directrix durch R, R' bezeichnen, so ist nach dem Vorigen $\angle PFR = \frac{1}{2}\angle PFQ + 90^0$ und $\angle PFR' = \frac{1}{2}\angle PFQ' + 90^0$. Somit $\angle RFR' = \frac{1}{2}\angle QFQ'$. Geht die Sehne QQ' durch den Brennpunkt, so ist dieser constante Winkel demnach $= 90^0$.

Der Satz ist geeignet, ein gutes Beispiel für den Gebrauch der Polar-Coordinaten in der Untersuchung der Kegelschnitte zu bilden. Er entspricht übrigens dem Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen am Kreise. Mit Hilfe der allgemeinen Definition der Brennpunkte, welche wir später entwickeln werden, kann man ihm eine noch allgemeinere Form geben.

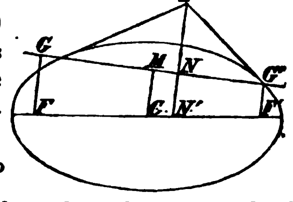
Die folgenden Sätze sind in der zwischen den Gleichungen der Polare und der Tangente bestehenden Analogie begründet.

Aufg. 4. Wenn sich ein Punkt in einer festen Senkrechten zur Axe bewegt, so dreht sich die von ihm auf seine Polare gefällte Senkrechte um einen festen Punkt in der Axe.

Denn der durch die Senkrechte bestimmte Abschnitt in der Axe ist (wie in Artikel 188) $= e^2 x'$ und daher constant, wenn x' constant ist.

Aufg. 5. Finde die Längen der vom Centrum und von den Brennpunkten auf die Polare von (x', y') gefällten Senkrechten.

Aufg. 6. Beweise, dass $CM.PN' = b^2$ ist. Dieser Satz entspricht dem im Art. 189 bewiesenen, nach welchem das Rechteck aus der Normale und der vom Centrum auf die Tangente gefällten Senkrechten constant ist.



Aufg. 7. Beweise $PN'.NN' = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2 x'^2)$. Wenn P ein Punkt der Curve ist, so giebt diese Gleichung den bekannten Ausdruck für die Länge der Normale wieder: $PN = \frac{bb'}{a}$ (Art. 189.)

Aufg. 8. Beweise $FG \,.\, F'G' = CM \,.\, NN'$. Für den speciellen Fall, wo P in der Curve liegt, geht diess über in $FG \,.\, F'G' = b^2$.

201. **Die Polargleichung der Ellipse oder Hyperbel unter der Voraussetzung zu finden, dass der Brennpunkt zum Pole genommen ist.**

Die Länge des Brennstrahls (Artikel 190) $= a - ex'$ giebt wegen $\rho \cos\theta + c = x'$ (als vom Centrum aus gemessen)

$$\rho = a - e\rho\cos\theta - ec,$$

oder

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta}.$$

Die doppelte Ordinate im Brennpunkt wird der Parameter genannt; seine Hälfte wird gefunden, indem man $\theta = 90^0$ in die eben gegebene Gleichung substituirt und ist daher $= \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$. Der Parameter wird gewöhnlich durch den Buchstaben p bezeichnet und die Gleichung alsdann geschrieben $\rho = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta}$. Der Parameter wird auch das latus rectum (bei den Alten latus erectum) genannt.

Aufg. 1. Das harmonische Mittel zwischen den Segmenten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne ist constant und dem Halbparameter gleich.

Denn wenn der Radius vector FP, rückwärts durch den Brennpunkt verlängert, die Curve noch in P' schneidet, so ist $FP = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta}$ und $FP' = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 - e \cos \theta}$, weil es dem Winkel $(180 + \theta)$ entspricht; somit $\frac{1}{FP} + \frac{1}{FP'} = \frac{4}{p}$.

Aufg. 2. Das Rechteck aus den Segmenten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne steht zur ganzen Sehne in einem constanten Verhältniss.

Dieser Satz kann als ein andrer Ausdruck des in der letzten Aufgabe enthaltenen bezeichnet werden; aber man erkennt auch direct, dass die Grössen $FP . FP'$, $FP + FP'$ in einem constanten Verhältniss stehen, denn sie sind $\frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$ und $\frac{2b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$.

Aufg. 3. Jede Sehne durch den Brennpunkt ist die dritte Proportionale zwischen der Hauptaxe und dem zu ihr parallelen Durchmesser. Denn die Länge des Halbdurchmessers, der mit der transversalen Axe einen Winkel θ bildet, (Art. 168) ist $R^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$ und daher ist die in der letzten Aufgabe gefundene Länge der Sehne $FP + FP' = \frac{2R^2}{a_{11}}$.

Aufg. 4. Die Summe zweier Sehnen, die durch den Brennpunkt parallel zu zwei conjugirten Durchmessern gezogen werden, ist constant.

Denn die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser ist constant. (Art. 181.)

Aufg. 5. Die Summe der Reciproken zweier rechtwinklig zu einander durch einen Brennpunkt gezogenen Sehnen ist constant.

202. Die auf den Scheitel bezogene Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = px - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Demnach ist in der Ellipse das Quadrat der Ordinate kleiner als das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse.

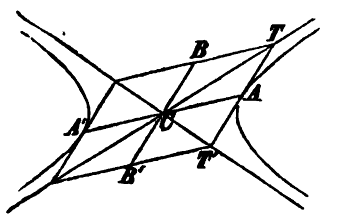
Die Gleichung der Hyperbel wird in derselben Art gefunden $y^2 = px + \frac{b^2}{a^2} x^2$. Oder in der Hyperbel ist das Quadrat der Ordinate grösser als das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass in der Parabel diese Grössen gleich sind.

Auf Grund dieser Eigenschaft sind die Namen Parabel, Hyperbel und Ellipse zuerst gegeben worden. (Pappus, Math. Coll. Buch VII.)

203. Wir haben bisher nur Eigenschaften discutirt, die der Ellipse und Hyperbel gemeinsam sind. Es giebt aber eine Klasse von Eigenschaften der Hyperbel, zu denen sich keine entsprechenden unter denen der Ellipse finden, diejenigen nämlich, welche von den Asymptoten abhängen, als welche in der Ellipse imaginär sind.

Wir sahen, dass die Gleichungen der Asymptoten immer erhalten werden, indem man die Summe der höchsten Potenzen der Veränderlichen $= 0$ setzt, vorausgesetzt, dass der Coordinatenanfang mit dem Centrum zusammenfalle. Wenn unter dieser Voraussetzung die auf ein Paar conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung der Cure $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$ ist, so ist die Gleichung der Asymptoten $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0$, d. h. diese letzteren sind

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0.$$



Demnach sind die Asymptoten parallel den Diagonalen des Parallelogramms, welches ein beliebiges Paar conjugirter Durchmesser zu seinen anstossenden Seiten hat. Denn die Gleichung von CT ist $\frac{y}{x} = \frac{b'}{a'}$ und diese Linie muss daher mit einer Asymptote zusammenfallen, während die Gleichung von AB $\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1\right)$ zeigt, dass die Linie zur andern Asymptote parallel ist. (Art. 175.)

Man kann somit aus zwei bekannten conjugirten Durchmessern die Asymptoten, oder aus den Asymptoten zu jedem gegebenen Durchmesser den ihm conjugirten finden; denn wenn man AO zu einer Asymptote parallel bis zum Durchschnitt mit der andern zieht, und es um sich selbst verlängert, so findet man B, den Endpunkt des conjugirten Durchmessers.

204. Der zwischen den Asymptoten liegende Theil einer Tangente wird im Berührungspunkt halbirt und st dem Durchmesser gleich, der dem nach dem Berührungspunkt gehenden conjugirt ist.

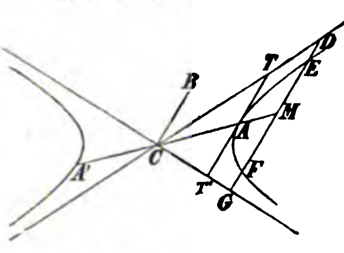
Diess ergiebt sich aus dem letzten Artikel, in welchem wir be-

wiesen, dass $AT = b' = AT'$ ist; oder auch direct, indem wir den Durchmesser durch den Punkt und den zu ihm conjugirten zu Axen wählen, so dass die Gleichung der Asymptoten ist

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0.$$

Aus derselben ergiebt sich für $x = a'$ $y = \pm b'$; und da die Tangente in a dem conjugirten Durchmesser parallel ist, so ist dieser Werth der dem Scheitel entsprechenden Ordinate der Asymptote zugleich der Werth des Abschnittes, welcher durch die letztere in der Tangente gebildet wird.

205. **Die Abschnitte DE und FG, welche auf einer die Hyperbel schneidenden geraden Linie zwischen der Curve und den Asymptoten enthalten sind, haben gleiche Länge.**



Denn wenn wir den zu DG parallelen Durchmesser und den ihm conjugirten zu Axen wählen, so folgt aus dem letzten Artikel, dass der Theil DG von dem Durchmesser halbirt wird; da aber auch die Strecke EF zwischen beiden Schnittpunkten mit der Curve halbirt wird, so ist $DE = FG$.

Die Längen dieser Linien können unmittelbar gefunden werden, denn aus der Gleichung der Asymptoten $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0$ folgt $y (= DM = MG) = \pm \frac{b'}{a'} x$, und aus der Gleichung der Curve

$$y (= EM = FM) = \pm b' \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}.$$

Also $$DE (= FG) = b' \left\{\frac{x}{a'} - \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right\},$$

und $$DF (= EG) = b' \left\{\frac{x}{a'} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right\}.$$

206. Aus diesen Gleichungen folgt, dass das Rechteck $DE \cdot DF$ constant und $= b'^2$ ist. Je grösser also DF ist, um so kleiner muss DE sein. Nun ist offenbar, dass DF um so länger wird, in je grösserer Entfernung vom Centrum es gelegen ist, und dass DF für ein unbegrenzt wachsendes x grösser als jede angebbare Grösse werden muss, d. h. **Je weiter vom Centrum**

eine gerade Linie entfernt ist, um so kleiner ist der zwischen der Curve und ihrer Asymptote enthaltene Abschnitt derselben und durch Vergrösserung jener Entfernung kann dieser Abschnitt kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden.

207. Wenn die Asymptoten zu Axen genommen werden, so verschwinden die Coefficienten a_{13} und a_{23} aus der allgemeinen Gleichung, weil der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Centrum zusammenfällt und die Coefficienten a_{11} und a_{22}, weil die Axen die Curve in unendlicher Entfernung schneiden (Art. 97, Aufg. 1); also reducirt sich die Gleichung der Curve auf die Form $xy = k^2$.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist offenbar, dass der Inhalt des durch die Coordinaten gebildeten Parallelogramms constant ist.

Für die in der Form $xy = k^2$ gegebene Gleichung ist die Gleichung einer Sehne (Art. 105)

$$(x - x')(y - y'') = xy - k^2 \text{ oder } x'y + y''x = k^2 + x'y''.$$

Für $x' = x''$ und $y' = y''$ findet man also die Gleichung der Tangente $x'y + y'x = 2k^2$ oder (wegen $x'y' = k^2$) $\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2$.

Aus dieser Form erhellt, dass die in den Asymptoten durch irgend eine Tangente gemachten Abschnitte $= 2x'$ und $2y'$ sind; ihr Rechteck ist daher $= 4k^2$ d. h. das Dreieck, welches irgend eine Tangente mit den Asymptoten bildet, hat einen constanten Inhalt, nämlich den dopelten Inhalt des durch die Coordinaten des Berührungspunktes gebildeten Parallelogramms.

Aufg. 1. Wenn zwei feste Punkte in einer Hyperbel $(x'\, y')$, $(x''\, y'')$ mit irgend einem veränderlichen Punkt $(x'''\, y''')$ derselben verbunden werden, so ist die Strecke, welche die Verbindungslinien auf jeder der Asymptoten bestimmen, constant.

Da die Gleichung einer der Verbindungslinien ist

$$x'''y + y'x = y'x''' + k^2,$$

so ist der von ihr in der Axe der x vom Anfangspunkt der Coordinaten aus gebildete Abschnitt durch die Substitution $y = 0$ gleich $x''' + x'$. Ebenso ist der Abschnitt, welcher der andern Verbindungslinie entspricht, $= x''' + x''$, und die Differenz zwischen beiden $x' - x''$ ist somit von der Lage des Punktes $(x'''\, y''')$ in der Curve unabhängig.

Aufg. 2. Bestimme die Coordinaten des Punktes, in welchem die Tangenten der Curve in $(x'\, y')$, $x''\, y'')$ sich schneiden.

Wir bestimmen aus den Gleichungen

$$x'y + y'x = 2k^2 \text{ und } x''y + y''x = 2k^2$$

die Werthe von x und y und erhalten

$$x = \frac{2k^2(x' - x'')}{x'y'' - x''y'} = \frac{2x'x''}{x' + x''}, \quad y = \frac{2y'y''}{y' + y''}.$$

208. Die Grösse k^2 durch die Axen der Curve auszudrücken.

Da die Axe den Winkel zwischen den Asymptoten halbirt, so werden die Coordinaten des Scheitels gefunden, indem man in der Gleichung $xy = k^2$, $x = y$ setzt und sind daher $x = y = k$.

Wenn man alsdann durch θ den von der Axe mit der Asymptote gebildeten Winkel bezeichnet, so ist $a = 2k \cos\theta$ (denn a ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Seitenlänge $= k$ und Basiswinkel $= \theta$); aber nach Art. 175 ist

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \text{ also } k = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}.$$

Die Asymptotengleichung der Curve ist somit $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

209. Die Senkrechte vom Brennpunkt auf die Asymptote ist gleich der conjugirten Axe b.

Denn sie ist durch $CF \sin\theta$ ausgedrückt und somit $= b$, weil

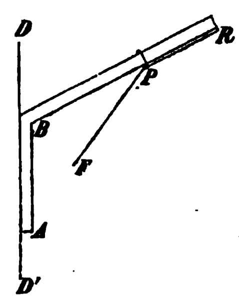
$$CF = \sqrt{(a^2 + b^2)} \text{ und } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Diess hätte auch als ein specieller Fall der Eigenschaft abgeleitet werden können, dass das Product der von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Senkrechten constant und $= b^2$ ist. Denn die Asymptote kann als eine Tangente betrachtet werden, deren Berührungspunkt in einer unendlichen Entfernung ist (Artikel 103), und die Senkrechten von den Brennpunkten auf sie sind offenbar einander gleich.

210. Der Abstand des Brennpunktes von einem Punkte in der Curve ist gleich der Länge, welche von der Directrix auf einer durch den Punkt parallel zur Asymptote gezogenen geraden Linie abgeschnitten wird.

Denn die Entfernung vom Brennpunkt ist das $e$fache des Abstandes von der Directrix (Art. 194), und die Entfernung von der Directrix verhält sich zur Länge der bezeichneten Parallellinie wie $\cos\theta$ ($= \frac{1}{e}$ Art. 173) zu 1.

Man kann daraus eine Methode zur Erzeugung der Hyperbel durch eine stetige Bewegung ableiten.



Ein in B gebrochenes Lineal ABR bewegt sich mit seiner Kante AB längs der festen Linie DD'. Ein Faden von der Länge RB ist an den zwei Punkten R und F befestigt, während ein Ring in P den Faden stets gespannt hält; dann beschreibt der Punkt P bei der Bewegung des Lineals eine Hyperbel, von welcher F ein Brennpunkt, BR die Richtung einer Asymptote und DD' die Directrix ist; denn PF ist stets gleich PB.

Zwölftes Kapitel.

Die Parabel.

211. Die Gleichung zweiten Grades, so sahen wir in Artikel 97, repräsentirt eine Parabel, wenn die ersten drei Glieder ein vollkommnes Quadrat bilden oder wenn die Gleichung von der Form ist $(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Wir sahen (Art. 99), dass wir diese Gleichung nicht so für einen endlichen Coordinatenanfang transformiren können, dass die Coefficienten von x und y beide verschwinden. Die Form der Gleichung leitet jedoch sogleich zu einer andern Methode, sie zu vereinfachen.

Wir wissen (Art. 34), dass die Grösse $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ zu der Länge der Senkrechten vom Punkt (xy) auf die durch die Gleichung $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ repräsentirte gerade Linie und ebenso die Grösse $\alpha x + \beta y$ der Senkrechten auf die Linie $\alpha x + \beta y = 0$ proportional ist.

Wenn wir also die zwei geraden Linien construiren, welche die Gleichungen $\alpha x + \beta y = 0$, $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ darstellen, so drückt die Gleichung der Curve aus, dass das Quadrat der Senkrechten von einem Punkt der Curve auf die erste

gerade Linie in einem constanten Verhältniss zu der Senkrechten auf die zweite Linie ist.

Wenn wir nun unsre Axen transformiren und die Linie $\alpha x+\beta y=0$ zur neuen Axe der x, die Linie $2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ zur neuen Axe der y machen, so erhält die transformirte Gleichung die Form $y^2=px$, weil das neue x und y den Normalen von einem Punkte auf die neuen Coordinatenaxen proportional sind.

Es ist offenbar, dass der neue Anfangspunkt ein Punkt in der Curve ist, und, weil wir für jeden Werth von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y haben, dass die neue Axe der x ein Durchmesser ist, die neue Axe der y aber parallel zu seinen Ordinaten. Aber die Ordinate eines Durchmessersin seinem Endpunkt ist nach Art. 106 eine Tangente der Curve, und die neue y Axe ist somit die Tangente der Curve im Anfangspunkt der Coordinaten.

Die Gerade $\alpha x+\beta y=0$ ist daher der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Durchmesser und

$$2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

ist die Tangente der Curve in dem Schnittpunkt derselben mit diesem Durchmesser. Und die Gleichung der Curve, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente am Endpunkte desselben als Axen, ist von der Form $y^2=px$.

212. Obgleich wir so die Gleichung der Parabel in eine wirklich einfache Form übergeführt sehen, so haben unsre neuen Axen doch die Unzweckmässigkeit, im Allgemeinen nicht rectangulär zu sein. Wir beweisen jedoch in dem Folgenden, dass es möglich ist, die Gleichung unter Beibehaltung der rectangulären Axen in diese Form zu bringen.

Wenn wir eine willkürliche Constante k einführen, so wird die Gleichung $(\alpha x+\beta y)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ der Gleichung $(\alpha x+\beta y+k)^2+2(a_{13}-\alpha k)x+2(a_{23}-\beta k)y+a_{33}-k^2=0$ äquivalent gefunden. Also ist, wie im letzten Artikel $\alpha x+\beta y+k=0$ die Gleichung eines Durchmessers und $2(a_{13}-\alpha k)x+2(a_{23}-\beta k)y+a_{33}-k^2=0$ die der Tangente in seinem Endpunkt; und wenn wir diese Linien als Axen wählen, so ist die transformirte Gleichung von der Form $y^2=px$.

Nun ist die Bedingung, dass diese zwei Linien zu einander senkrecht sind (Artikel 25), $\alpha(a_{13}-\alpha k)+\beta(a_{23}-\beta k)=0$; also

$$k=\frac{\alpha a_{13}+\beta a_{23}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Weil wir eine lineare Gleichung zur Bestimmung des besondern Werths von k erhalten, welcher die neuen Axen rectangulär macht, so giebt es einen Durchmesser, dessen Ordinaten von ihm senkrecht geschnitten werden und dieser Durchmesser wird die Axe der Curve genannt.

213. Die Gleichung kann auch durch directe Transformation der Coordinaten auf die Form $y^2 = px$ reducirt werden. Im elften Kapitel wurde die allgemeine Gleichung reducirt, indem man zuerst zu parallelen Axen durch einen neuen Anfangspunkt überging und dann diese so drehte, dass der Coefficient von xy gleich Null wurde. Diese Transformation hätte auch in der umgekehrten Ordnung vollzogen werden können und in dem Falle der Parabel ist eben diess zweckentsprechender, weil hier nicht durch Transformation zu parallelen Axen durch einen neuen Anfangspunkt die Coefficienten von x und y gleich Null gemacht werden können. Wir wählen die Linie $\alpha x + \beta y = 0$ und die zu ihr rechtwinklige $\beta x - \alpha y = 0$ zu neuen Axen; dann haben wir, weil die neuen X und Y respective die Längen der Perpendikel von einem Punkt auf die neuen Axen sind,

$$X = \frac{\alpha x + \beta y}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}, \quad Y = \frac{\beta x - \alpha y}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}};$$ für die Abkürzung $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

sind daher die Transformationsformeln

$$\gamma X = \alpha x + \beta y, \quad \gamma Y = \beta x - \alpha y,$$

also $\gamma x = \alpha Y + \beta X$, $\gamma y = \beta Y - \alpha X$. Durch diese Substitutionen geht die Gleichung der Curve in die Form

$$\gamma Y^2 + 2(a_{13}\beta - a_{23}\alpha)\, X + 2(a_{13}\alpha + a_{23}\beta)\, Y + \gamma a_{33} = 0$$

über. Durch Drehung der Axen ist also die Gleichung auf die Form $a_{22}'y^2 + 2a_{13}'x + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0$ reducirt und wenn wir nun zu parallelen Axen durch einen neuen Anfangspunkt $x'y'$ übergehen, so giebt die Substitution $x + x'$, $y + y'$ für x, y

$$a_{22}'y^2 + 2a_{13}'x + 2(a_{22}'y' + a_{23}')y + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0.$$

Bei dieser Transformation ist der Coefficient von x unverändert geblieben und kann also durch sie nicht auf Null reducirt werden; wir können aber x' und y' so bestimmen, dass der Coefficient von y und das absolute Glied verschwinden und die Gleichung also auf die Form $y^2 = px$ gebracht ist. Die entsprechenden Werthe der Coordinaten des neuen Anfangspunktes sind $y' = -\frac{a_{23}'}{a_{22}'}$,

$x' = \frac{a_{23}'^2 - a_{22}'a_{33}'}{2a_{13}'a_{22}'}$ und p ist $= -\frac{2a_{13}'}{a_{22}'}$ oder mittelst der ursprünglichen Coefficienten $p = \frac{2(a_{23}\alpha - a_{13}\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Man nennt die Grösse p in der reducirten Form der Gleichung der Parabel $y^2 = px$ den **Parameter** des Durchmessers, welcher zur Axe x gewählt wurde; und wenn die Axen rechtwinklig sind, so wird p der **Hauptparameter** genannt. (Vergl. Art. 202.)

Aufg. 1. Man bestimme den Hauptparameter der Parabel

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0.$$

Wir erhalten zuerst nach Art. 212 $k = 5$. Dann kann die Gleichung in der Form $(3x + 4y + 5)^2 = 2(4x - 3y + 8)$ geschrieben werden. Für X und Y als die Entfernungen eines Punktes von $4x - 3y + 8 = 0$ und $3x + 4y + 5 = 0$ respective ist dann $5Y = 3x + 4y + 5$, $5X = 4x - 3y + 8$ und die Gleichung kann geschrieben werden $Y^2 = \frac{2}{5}X$. Das Verfahren des jetzigen Art. fordert die Transformation zu den Linien $3x + 4y = 0$, $4x - 3y = 0$, wodurch man erhält $25Y^2 + 50Y - 10X + 9 = 0$ oder $25(Y + 1)^2 = 10X + 16$, welches in $Y^2 = \frac{2}{5}X$ übergeht, wenn man zu parallelen Axen durch $(-\frac{8}{5}, -1)$ transformirt.

Aufg. 2. Man bestimme den Parameter der Parabel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

Aufl. $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Dieser Werth kann auch direct mit Hilfe der folgenden Sätze abgeleitet werden, welche später bewiesen werden; Der Brennpunkt einer Parabel ist der Fusspunkt einer Senkrechten vom Durchschnittspunkt zweier sich rechtwinklig schneidenden Tangenten auf ihre Berührungssehne, und: Der Parameter eines Kegelschnitts wird gefunden, indem man das Vierfache des Rechtecks aus den Abschnitten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne durch die Länge dieser Sehne dividirt. (Art. 201, Aufg. 1.)

Aufg. 3. Wenn a und b die Längen zweier Tangenten einer Parabel sind, welche sich rechtwinklig schneiden, und m ein Viertheil des Parameters ist, so soll bewiesen werden, dass $\frac{a^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}$.

214. Wenn in der Originalgleichung $a_{13}\beta = a_{23}\alpha$ ist, so verschwindet in der transformirten Gleichung des letzten Artikels der Coefficient von x; die Gleichung $a_{22}'y^2 + 2a_{23}'y + a_{33}' = 0$ als äquivalent zu einer Gleichung von der Form $a_{22}'(y-\lambda)(y-\mu) = 0$ repräsentirt zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre der

neuen Axe x parallele Gerade. Man bestätigt leicht, dass in diesem Falle die allgemeine Bedingung erfüllt ist, unter welcher die Gleichung vom zweiten Grade gerade Linien darstellt. Denn diese Bedingung kann in der Form
$a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12})^2 = a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{13} + a_{22}a_{13}^2$ geschrieben werden; und wenn man für a_{11}, a_{12}, a_{22} respective α^2, $\alpha\beta$, β^2 einsetzt, so verschwindet die linke Seite der Gleichung, während die rechte auf $(a_{23}\alpha - a_{13}\beta)^2$ reducirt wird. Indem man die Bedingung $a_{23}\alpha = a_{13}\beta$ in den gleichbedeutenden Formen $a_{23}\alpha^2 = a_{13}\alpha\beta$, $a_{23}\alpha\beta = a_{13}\beta^2$ schreibt, erkennt man, dass die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade dann gerade Linien darstellt, wenn ausser $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ zugleich entweder $a_{11}a_{23} = a_{12}a_{13}$ oder $a_{23}a_{12} = a_{22}a_{13}$ ist.

215. Wenn die ursprünglichen Coordinatenaxen schiefwinklig sind, so wird die Gleichung noch immer wie in Art. 213 reducirt, indem man die Gerade $\alpha x + \beta y = 0$ und die zu ihr rechtwinklige zu Axen wählt, deren Gleichung nach Artikel 26 $(\beta - \alpha\cos\omega)x - (\alpha - \beta\cos\omega)y = 0$ ist. Für $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega$ werden die Transformationsformeln nach Artikel 34
$\gamma Y = (\alpha x + \beta y)\sin\omega$, $\gamma X = (\beta - \alpha\cos\omega)\,x - (\alpha - \beta\cos\omega)\,y$;
also
$$\gamma x \sin\omega = (\alpha - \beta\cos\omega)\,Y + \beta X \sin\omega,$$
$$\gamma y \sin\omega = (\beta - \alpha\cos\omega)\,Y - \alpha X \sin\omega.$$

Durch diese Substitutionen wird die Gleichung
$$\gamma^3 Y^2 + 2\sin^2\omega(a_{13}\beta - a_{23}\alpha)X + 2\sin\omega\{a_{13}(\alpha - \beta\cos\omega) + a_{23}(\beta - \alpha\cos\omega)\}Y + \gamma a_{33}\sin^2\omega = 0.$$

Die Transformation zu parallelen Axen geschieht ganz wie in Art. 213; der Hauptparameter ist
$$p = -\frac{2a_{13}'}{a_{22}'} = \frac{2(a_{23}\alpha - a_{13}\beta)\sin^2\omega}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aufg. Finde den Parameter der Parabel
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

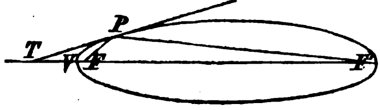
Aufl. $$p = \frac{4a^2b^2\sin^2\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

216. Aus der Gleichung $y^2 = px$ können wir sogleich die Figur der Curve erkennen. Sie muss zu beiden Seiten der Axe der x symmetrisch sein, weil jeder Werth von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für y liefert. Kein Theil von ihr kann auf der negativen Seite des Anfangspunkts liegen, weil y

für negative Werthe von x imaginär wird, und wenn wir dem x wachsende positive Werthe geben, erhalten wir wachsende Werthe für y. Also ist die Gestalt der Curve die hier dargestellte.

Obgleich die Parabel der Hyperbel gleicht, insofern sie unendliche Zweige besitzt, so besteht doch eine wichtige Verschiedenheit zwischen der Natur der unendlichen Zweige der beiden Curven; die der Hyperbel strebten, wie wir sahen, unablässig mit zwei divergirenden geraden Linien zusammenzufallen, aber diess gilt nicht für die Parabel, weil wir für die Bestimmung der Punkte, in welchen eine gerade Linie $x = ky + l$ die Parabel $y^2 = px$ schneidet, die quadratische Gleichung $y^2 - pky - pl = 0$ erhalten, deren Wurzeln nie beide unendlich sein können, so lange k und l endliche Werthe haben. Daher giebt es keine endliche gerade Linie, welche die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten im Unendlichen schneidet; denn irgend ein Durchmesser $y = m$, welcher die Curve allerdings in einem unendlich entfernten Punkte schneidet (Art. 101), trifft sie doch auch in dem Punkte $x = \frac{m^2}{p}$ und obgleich dieser Werth wächst, wenn m wächst, so wird er doch nicht unendlich, so lange m endlich ist.

217. Die Gestalt der Parabel kann aus dem folgenden Lehrsatze mit besonderer Klarheit erkannt werden: Wenn von einer Ellipse ein Scheitel und ein Brennpunkt gegeben sind, während ihre grosse Axe als unbegrenzt wachsend gedacht wird, so nähert sich die Curve fortwährend mehr der Parabel.



Die auf ihren Scheitel bezogene Gleichung der Ellipse ist (Art. 202) $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$.

Wir wünschen b in Theilen der Entfernung VF $(= m)$ auszudrücken, welche wir als unveränderlich voraussetzen. Wir haben $m = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ (Artikel 190); also $b^2 = 2am - m^2$; dadurch wird die Gleichung $y^2 = \left(4m - \frac{2m^2}{a}\right)x - \left(\frac{2m}{a} - \frac{m^2}{a^2}\right)x^2$.

Wenn wir nun voraussetzen, dass a unendlich geworden

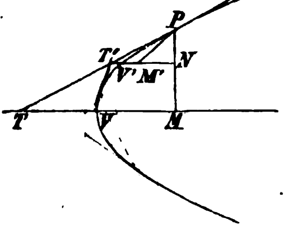
sei, so verschwinden ausser dem ersten alle Glieder auf der rechten Seite der Gleichung und die Gleichung reducirt sich auf $y^2 = 4mx$, d. i. die Gleichung einer Parabel.

Eine Parabel kann auch als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität $= 1$ ist; denn $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. Nun sehen wir, dass $\frac{b^2}{a^2}$, der Coefficient von x^2 in der vorigen Gleichung, verschwindet, wenn wir a nach den vorgeschriebenen Bedingungen wachsen lassen; demnach wird e^2 endlich $= 1$.

218. Die Gleichung der zwei Punkte der Curve verbindenden Sehne ist nach Art. 105 $(y - y')(y - y'') = y^2 - px$ oder $(y' + y'')\,y = px + y'y''$. Und für $y'' = y'$ und wegen $y'^2 = px'$ wird die Gleichung der Tangente $2y'y = p(x + x')$. Für den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Axe ergiebt sich $x = -x'$, oder die Strecke TM d. i. die Subtangente wird im Scheitel halbirt.

Da die Gleichung der Parabel für schiefwinklige Axen die Form $y^2 = p'x$ behält, wenn zu denselben ein Durchmesser und die durch seinen Endpunkt gehende Parabeltangente gewählt werden, so bleiben auch die Gleichungen der Sehne und Tangente unverändert und die Subtangente ist auch dann noch das Doppelte der Abscisse.

Diess giebt eine einfache Methode, an irgend einen Punkt einer Parabel eine Tangente zu ziehen, weil wir nur $TV = VM$ zu nehmen und PT zu ziehen haben; es erlaubt uns auch, nachdem wir diese Tangente gefunden haben, die irgend einem andern Durchmesser entsprechende Ordinate des Punktes zu bestimmen, weil wir nur $V'M' = T'V'$ zu machen und PM' zu ziehen haben.



219. Es folgt aus Artikel 106 oder kann wie in Artikel 177 bewiesen werden, dass die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $x'y'$ mit der der Tangente dieselbe Form hat und daher durch $2y'y = p(x + x')$ dargestellt ist. Wenn wir den Punkt suchen, wo diese Polare die Axe der x schneidet, so erhalten wir $x = -x'$ und sehen, dass der Abschnitt, den die Polaren zweier Punkte in der Axe

der x bilden, dem Abschnitt zwischen den von diesen Punkten auf die Axe gefällten Senkrechten gleich ist; jede dieser Grössen ist $= (x' - x'')$.

220. Wir haben erwähnt, dass die Gleichung der Parabel für einen Durchmesser und die seinem Endpunkt entsprechende Tangente die Form $y^2 = p' x$ erhält.

Wir wollen diess durch wirkliche Transformation der auf rectanguläre Axen bezogenen Gleichung $y^2 = px$ nochmals beweisen, weil es nützlich ist, den neuen Parameter p' in Theilen des alten p auszudrücken. Die Gleichung $y^2 = px$ wird durch Transformation zu parallelen Axen durch einen Punkt $x'y'$ in der Curve (indem wir $x + x'$ und $y + y'$ für x und y schreiben) in $y^2 + 2yy' = px$ übergeführt.

Wenn wir alsdann mit Beibehaltung der Axe der x eine neue Axe der y wählen, die zu jener unter dem Winkel θ geneigt ist, so ist $y \sin\theta$ für y und $x + y\cos\theta$ für x zu substituiren und unsere Gleichung wird $y^2 \sin^2\theta + 2yy' \sin\theta = px + py\cos\theta$.

Damit diese sich auf die Form $y^2 = px$ reducire, müssen wir haben $2y' \sin\theta = p\cos\theta$ oder $\tan\theta = \frac{p}{2y'}$.

Aus der Gleichung $2y'y = p(x + x')$ sehen wir aber, dass θ der von der Tangente mit der Axe der x gebildete Winkel ist. Somit nimmt die obige Gleichung auf einen Durchmesser und die entsprechende Tangente bezogen die Form an

$$y^2 = \frac{p}{\sin^2\theta}\, x \text{ oder } y^2 = p'x.$$

Die Grösse p' wird der dem Durchmesser $V'M'$ entsprechende Parameter genannt und wir sehen, dass der Parameter irgend eines Durchmessers dem Haupt-Parameter direct und dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen seine Ordinaten mit der Axe bilden, verkehrt proportional ist; denn es ist $p' = \frac{p}{\sin^2\theta}$.

Wir können den Parameter irgend eines Durchmessers aus den Coordinaten seines Scheitels ableiten vermittelst der Gleichung $\tan\theta = \frac{p}{2y'}$; denn darnach ist

$$\sin\theta = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 4y'^2)}} = \sqrt{\left(\frac{p}{p + 4x'}\right)} \text{ und } p' = p + 4x'.$$

221. Die Gleichung einer durch $(x'y')$ senkrecht zur Tangente $2yy' = p(x + x')$ gezogenen geraden Linie ist

$$p(y - y') + 2y'(x - x') = 0.$$

Der von ihr in der Axe der x gebildete Abschnitt ist $x (= VN) = x' + \frac{p}{2}$, und daher wegen $VM = x'$ die Subnormale $MN = \frac{p}{2}$.



In der Parabel ist die Subnormale constant und dem Halbparameter gleich.

Die Normale selbst ist

$$= \sqrt{(PM^2 + MN^2)} = \sqrt{\left(y'^2 + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left\{p\left(x' + \frac{p}{4}\right)\right\}}.$$

222. Ein Punkt in der Axe der Parabel, dessen Entfernung vom Scheitel einem Viertheil des Hauptparameters gleich ist, wird der Brennpunkt der Curve genannt. Es ist derselbe Punkt, welcher im Artikel 217 uns dazu führte, Analogien mit dem Brennpunkt der Ellipse zu vermuthen, und die Entwickelungen des gegenwärtigen Abschnitts werden zeigen, dass eine Parabel in jeder Beziehung als eine Ellipse betrachtet werden darf, deren einer Brennpunkt eben dieser Punkt ist, während der andre in unendlicher Entfernung liegt. Um Brüche zu vermeiden, wollen wir in den folgenden Artikeln zuweilen die Abkürzung $m = \frac{p}{4}$ anwenden.

Die Entfernung irgend eines Punktes in der Curve vom Brennpunkt zu finden.

Da die Coordinaten des Brennpunkts m, 0 sind, so ist das Quadrat seiner Entfernung von irgend einem Punkte $(x'y')$

$$(x' - m)^2 + y'^2 = x'^2 - 2mx' + m^2 + 4mx' = (x' + m)^2.$$

Demnach ist die Entfernung irgend eines Punktes vom Brennpunkt $x' + m$. Damit lässt sich das Resultat des Artikel 220 einfacher in dem Satze ausdrücken: Der Parameter irgend eines Durchmessers ist das Vierfache der Entfernung seines Endpunkts vom Brennpunkte.

223. Die Polare des Brennpunkts einer Parabel wird wie bei der Ellipse und Hyperbel die Directrix genannt. Weil der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel $= m$, ist seine Polare

nach Artikel 219 eine zur Axe senkrechte Linie in demselben Abstand auf der andern Seite des Scheitels. Die Entfernung irgend eines Punktes von der Directrix ist somit $= x' + m$, welches durch Vergleichung mit dem Ergebniss des letzten Artikels den Satz giebt: Die Entfernung irgend eines Punktes der Curve von der Directrix ist seiner Entfernung vom Brennpunkte gleich.

Wir sahen im Artikel 194, dass in der Ellipse und Hyperbel die Entfernung vom Brennpunkt zu der Entfernung von der Directrix in dem constanten Verhältniss $e:1$ steht und erkennen jetzt, dass diess auch für die Parabel gilt, weil in ihr $e = 1$ ist. (Art. 217.)

Die im Artikel 210 zur mechanischen Beschreibung der Hyperbel gegebene Methode liefert eine Parabel, wenn man den Winkel ABR einem rechten Winkel gleich macht.

224. Der Punkt, wo eine Tangente die Axe schneidet, und ihr Berührungspunkt sind vom Brennpunkt gleich weit entfernt.

Denn die Entfernung vom Scheitel bis zu dem Punkte, wo die Tangente die Axe schneidet, ist x' (Art. 218), also die Entfernung dieses letzteren Punktes vom Brennpunkt $= x' + m$.

225. Jede Tangente bildet mit der Axe und dem Radius vector des Berührungspunktes gleiche Winkel.

Diess ergiebt sich aus der Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks, welches wir im letzten Artikel als durch die Axe, die Tangente und den Brennstrahl des Berührungspunktes gebildet zeigten. Es ist nur eine Ausdehnung der Eigenschaft der Ellipse (Artikel 196), dass $\angle TPF = \angle T'PF'$; denn wenn wir den Brennpunkt F' als in unendlicher Entfernung gelegen voraussetzen, so wird die Linie PF' parallel zur Axe und $\angle TPF = \angle PTF$.

Demnach schneidet die Tangente vom Endpunkte der Brennpunkts-Ordinate die Axe unter einem Winkel von 45^0.

226. Die Länge der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Senkrechten zu bestimmen.

Die Senkrechte vom Punkt $(m, 0)$ auf die Tangente

$$yy' = 2m(x + x')$$

ist $= \frac{2m(x'+m)}{\sqrt{(y'^2 + 4m^2)}} = \frac{2m(x'+m)}{\sqrt{(4mx' + 4m^2)}} = \sqrt{\{m(x'+m)\}}$, d. h. FR (siehe Fig. p. 241) ist die mittlere Proportionale zwischen FV und FP.

Aus diesem Ausdruck und aus Artikel 221 folgt auch, dass

FR die Hälfte der Normale ist, welches wir auch geometrisch aus dem Factum erkannt haben würden, dass $TF = FN$ ist.

227. **Die vom Brennpunkt auf die Tangente gefällte Senkrechte durch den von ihr mit der Axe eingeschlossenen Winkel auszudrücken.**

Wir haben $\cos\alpha = \sin FTR = \sqrt{\left(\frac{m}{x' + m}\right)}$, (Art. 220);

daher nach Art. 226 $FR = \sqrt{\{m(x' + m)\}} = \frac{m}{\cos\alpha}$.

Die Gleichung der Tangente wird daher für den Brennpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten $x \cos\alpha + y \sin\alpha + \frac{m}{\cos\alpha} = 0$, und darnach kann die Senkrechte von irgend einem andern Punkte aus in Function des von ihr mit der Axe gebildeten Winkels ausgedrückt werden.

228. **Der Ort des Fusspunkts der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Senkrechten ist eine gerade Linie.**

Denn nehmen wir den Brennpunkt zum Pol, so ist die Polargleichung des fraglichen Ortes $\varrho = \frac{m}{\cos\alpha}$ oder $\varrho \cos\alpha = m$, eine Gleichung, welche offenbar die Scheiteltangente der Parabel repräsentirt. Wenn wir umgekehrt von irgend einem Punkt F einen Radius vector FR zu einer geraden Linie VR und PR senkrecht zu ihm ziehen, so tangirt die Linie PR stets eine Parabel, für welche der Punkt F Brennpunkt ist*).

Als eine nützliche Uebung empfehlen wir dem Leser die Untersuchung des durch den Fusspunkt der Senkrechten vom Brennpunkt auf die Tangente beschriebenen Ortes in rectangulären Coordinaten.

229. **Den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten zu bestimmen, welche einander rechtwinklig durchschneiden.**

Aus der im Artikel 227 entwickelten Gleichung einer Tangente $x \cos^2\alpha + y \sin\alpha \cos\alpha + m = 0$ ergiebt sich die Glei-

*) Die allgemeine Auflösung der Classe von Aufgaben, welcher diese Erzeugungsweise der Parabel angehört und in denen die Enveloppe einer beweglichen geraden Linie zu bestimmen ist, kann erst im weiteren Verlaufe der Untersuchung gegeben werden.

chung der zu ihr senkrechten Tangente (d. h. derjenigen, deren Normale den Winkel $90^0 + \alpha$ mit der Axe bildet) durch die Substitution von $\cos\alpha$ für $\sin\alpha$ und $-\sin\alpha$ für $\cos\alpha$
$x\sin^2\alpha - y\sin\alpha\cos\alpha + m = 0$, und indem man durch einfache Addition dieser Gleichungen α eliminirt, erhält man als die Gleichung des verlangten Ortes $x + 2m = 0$, d. i. die Gleichung der Directrix, denn die Entfernung des Brennpunkts von der Directrix ist $= 2m$.

230. **Der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten ist die Hälfte des Winkels, welchen die Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte einschliessen.**

Denn in dem gleichschenkligen Dreieck PFT ist der Winkel PTF, den die Tangente mit der Axe bildet, die Hälfte des Winkels PFN, welchen der Brennstrahl mit ihr einschliesst. Nun ist der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten gleich der Differenz der Winkel, die sie mit der Axe bilden und der Winkel zwischen den Brennstrahlen ist gleich der Differenz der von ihnen mit der Axe eingeschlossenen Winkel.

Der Lehrsatz des letzten Artikels kann als ein specieller Fall des gegenwärtigen Satzes angesehen werden, denn wenn zwei Tangenten mit einander einen rechten Winkel einschliessen, so bilden die Brennstrahlen der Berührungspunkte mit einander einen Winkel von 180^0 und die zwei Tangenten entsprechen den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne und schneiden sich daher nach der Definition der Directrix in derselben.

231. **Die gerade Linie, welche den Brennpunkt mit dem Durchschnittspunkt zweier Tangenten verbindet, halbirt den Winkel, welchen die Berührungspunkte der letztern am Brennpunkte spannen.**

Aus den Gleichungen zweier Tangenten
$x\cos^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha + m = 0,\quad x\cos^2\beta + y\sin\beta\cos\beta + m = 0,$
finden wir durch Subtraction die Gleichung der geraden Linie, welche ihren Durchschnittspunkt mit dem Brennpunkt verbindet

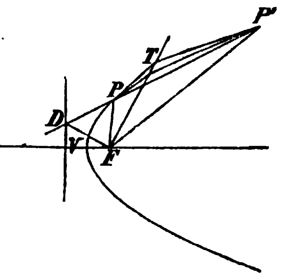
$$x\sin(\alpha+\beta) - y\cos(\alpha+\beta) = 0.$$

Diess ist die Gleichung einer geraden Linie, die mit der Axe der x einen Winkel $(\alpha+\beta)$ einschliesst. Weil aber α und β die von den Senkrechten auf die Tangenten mit der Axe gebildeten Winkel sind, so haben wir $VFP = 2\alpha$ und $VFP' = 2\beta$; daher halbirt die gerade Linie, welche mit der Axe den Winkel $(\alpha+\beta)$

bildet, den Winkel PFP'. Dieser Satz kann auch bewiesen werden, indem man wie in Artikel 199 den Winkel $(\theta - \theta')$ berechnet, unter welchem die durch den Punkt (xy) gehende Tangente einer Parabel vom Brennpunkt aus gesehen wird; denn wenn man findet $\cos(\theta - \theta') = \frac{x+m}{\varrho}$, so zeigt dieser von den Coordinaten des Berührungspunktes unabhängige Werth, dass er für jede der zwei Tangenten, die man durch (xy) ziehen kann, derselbe ist.

Zusatz 1.) Wenn wir den Fall nehmen, wo der Winkel $PFP' = 180^0$ ist, so geht PP' durch den Brennpunkt; die Tangenten TP und TP' schneiden einander in der Directrix und der Winkel TFP ist gleich 90^0. (Art. 200.) Diess kann auch direct bewiesen werden, indem man die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $(-m, y')$ in der Directrix und die Gleichung der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkt bildet; diese zwei Gleichungen sind $y'y = 2m(x - m)$ und $2m(y - y') + y'(x + m) = 0$, und sie stellen offenbar zwei zu einander rechtwinklige gerade Linien dar.

Zusatz 2.) Wenn eine Sehne PP' die Directrix in D schneidet, so ist FD die äussere Halbirungslinie des Winkels PFP'. Diess ist in der 2. Aufgabe des Artikels 200 bereits bewiesen worden.



Zusatz 3.) Wenn eine veränderliche Tangente der Parabel zwei feste Tangenten schneidet, so ist der Winkel, unter welchem der zwischen den festen Tangenten liegende Theil der veränderlichen Tangente vom Brennpunkt aus erscheint, das Supplement des Winkels, welchen die festen Tangenten bilden.

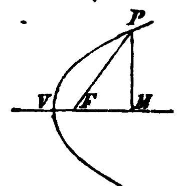
Denn der Winkel QRT ist die Hälfte des Winkels pFq (Art. 230), und nach dem jetzigen Artikel ist $\angle PFQ$ auch die Hälfte von $\angle pFq$, daher $PFQ = QRT$, d. i. gleich dem Supplement des $\angle PRQ$.

Zusatz 4.) Der Kreis, welcher dem von irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, geht durch den Brennpunkt.

Denn der durch PRQ beschriebene Kreis muss durch F gehen, weil der im Segment PFQ enthaltene Winkel das Supplement des in PRQ enthaltenen ist.

232. **Die Polargleichung der Parabel für den Brennpunkt als Pol abzuleiten.**

Wir zeigten im Artikel 222, dass der Brennstrahl $FP = \varrho = x' + m = VM + m = FM + 2m = \varrho \cos\theta + 2m$ ist.



Daraus folgt $\varrho = \frac{2m}{1 - \cos\theta}$; dieselbe Gleichung geht aus der Gleichung des Artikel 201 durch die Substitution $e = 1$ hervor. (Art. 217.) Die in den Aufgaben des Artikel 201 entwickelten Eigenschaften gelten daher auch für die Parabel. In dieser Gleichung ist θ von der Seite FM her gemessen vorausgesetzt; wenn wir ihn als von der Seite FV gemessen betrachten, so ist $\varrho = \frac{2m}{1 + \cos\theta}$.

Diese Gleichung kann geschrieben werden $\varrho \cos^2 \frac{1}{2}\theta = m$, oder $\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta = m^{\frac{1}{2}}$, und gehört somit einer Klasse von Gleichungen an, deren allgemeine Form $\varrho^n \cos n\theta = a^n$ ist. Einige Eigenschaften derselben gedenken wir später zu entwickeln.

Dreizehntes Kapitel.

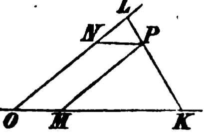
Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte.

---

233. Die Methode, die Algebra auf Probleme bezüglich der Kegelschnitte anzuwenden, ist im Wesentlichen dieselbe, wie die in dem Falle der geraden Linie und des Kreises angewendete und wird keinem Leser Schwierigkeiten darbieten, der die im dritten und achten Kapitel gegebenen Beispiele sorgfältig durch-

arbeitet hat. Wir wollen daher aus der grossen Anzahl von Aufgaben, die zu Oertern des zweiten Grades führen, nur einige auswählen und ihnen mehrere Eigenschaften der Kegelschnitte anreihen, welche zur Aufnahme in die vorhergehenden Entwickelungen nicht geeignet erschienen.

Aufg. 1. Eine Linie von constanter Länge bewegt sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels; man soll den durch einen festen Punkt in ihr beschriebenen Ort finden.

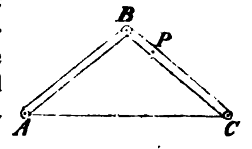


Bezeichnen wir PL durch n, PK durch m, und LK durch l, so haben wir aus ähnlichen Dreiecken $OL = \frac{ly}{m}$ und $OK = \frac{lx}{n}$.

Mittelst der Relation
$LK^2 = OL^2 + OK^2 - 2\,OL\,.\,OK \cos\omega$ folgt daraus $l^2 = \frac{l^2y^2}{m^2} + \frac{l^2x^2}{n^2} - \frac{2l^2xy\cos\omega}{mn}$ oder $\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{2xy\cos\omega}{nm} = 1$; die Gleichung einer Ellipse, die den Punkt O zu ihrem Centrum hat; denn $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}$ ist hier negativ, nämlich $= -\frac{\sin^2\omega}{m^2n^2}$.

Aufg. 2. Welchen Ort beschreibt ein Punkt Q, der in LK so angenommen wird, dass $QK = PL$ ist?

Aufg. 3. Zwei gleiche Lineale AB, BC sind durch ein Charnier in B vereinigt, der Endpunkt A ist befestigt, indess C die gerade Linie AC durchlaufen muss; man soll den durch irgend einen festen Punkt P in BC beschriebenen Ort finden.



Aufg. 4. Aus der Basislänge und dem Product der Tangenten der halben Basiswinkel den Ort der Spitze zu finden.

Indem man die Tangenten der Hälften der Basiswinkel in Theilen der Seiten ausdrückt, findet man, dass die Summe der Seiten gegeben ist, und dass daher der Ort eine Ellipse ist, welche die Basisecken zu Brennpunkten hat.

Aufg. 5. Welches ist der Ort des Mittelpunktes des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, von welchem die Basis und die Summe seiner Seiten bekannt sind?

Man kann aus dem letzten Beispiel und aus Aufg. 4, Art. 49, unmittelbar erkennen, dass der Ort eine Ellipse ist, deren Scheitel die Endpunkte der gegebenen Basis sind.

Aufg. 6. Aus der Basis und der Summe der Seiten eines Dreiecks den Ort für den Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Seiten zu bestimmen.

Aufg. 7. Welches ist der Ort des Centrums eines Kreises, der in zwei gegebenen geraden Linien vorgeschriebene Abschnitte macht.

Aufg. 8. Man soll den Ort des Mittelpunktes eines Kreises finden,

welcher zwei andere Kreise berührt, oder welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt.

Aufg. 9. Man bestimme den Ort des Centrums für einen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt geht und in einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abschnitt macht.

Aufg. 10. Bestimme den Ort des Centrums für einen Kreis, der durch einen gegebenen Punkt geht und dessen Abschnitt in einer gegebenen Geraden von diesem Punkte aus unter gegebenem Winkel erscheint.

Aufg. 11. Zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien; der Ort der dritten Ecke ist zu finden.

Aufg. 12. Ein Dreieck ABC ist einem gegebenen Kreis umgeschrieben, der Winkel an C ist gegeben und B bewegt sich längs einer festen geraden Linie; man soll den Ort von A finden.

Wir wenden Polar-Coordinaten an, deren Pol das Centrum des Kreises ist und deren Winkel gegen die Normale auf die feste gerade Linie gemessen werden, und bezeichnen in diesem Sinne die Coordinaten von A, B durch ϱ, θ; ϱ', θ'. Dann ist $\varrho' \cos\theta' = p$. Aber es ist leicht zu sehen, dass der Winkel AOB gegeben ist $(=\alpha)$; und da die Höhe des Dreiecks AOB gegeben ist, gilt die Gleichung $r = \frac{\varrho\varrho' \sin\alpha}{\sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\alpha)}}$.
Aus ihr geht durch die Substitution von $\theta + \theta' = \alpha$ die Polar-Gleichung des Ortes $r^2 = \frac{p^2\varrho^2\sin^2\alpha}{\varrho^2\cos^2(\alpha-\theta) + p^2 - 2p\varrho\cos(\alpha-\theta)}$ hervor, eine Gleichung, welche einen Kegelschnitt darstellt.

Aufg. 13. Eine gerade Linie bewegt sich so, dass sie stets einen festen Kegelschnitt berührt; in jeder ihrer Lagen bestimmt man ihren Pol in Bezug auf einen andern festen Kegelschnitt, welches ist der von diesem Pol durchlaufene Ort?

Ist $\alpha\beta$ irgend ein Punkt des Ortes, und bezeichnet $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt A, so sind nach Artikel 106 ξ, η, ζ lineare Functionen in α, β. Nach Art. 114 ist aber die Bedingung, unter welcher die Gerade $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ den Kegelschnitt B berührt, vom zweiten Grade in Bezug auf ξ, η, ζ. Der fragliche Ort ist also ein Kegelschnitt.

Aufg. 14. Bestimme den Ort des Durchschnittspunktes der Normale vom Brennpunkt auf die Tangente eines Centralkegelschnitts mit der vom Centrum nach dem Berührungspunkte gezogenen Geraden.

Aufl. Dieser Ort ist die entsprechende Directrix.

Aufg. 15. Bestimme den Ort des Durchschnittspunktes der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente mit dem vom Brennpunkt nach dem Berührungspunkt gehenden Radius vector.

Aufl. Dieser Ort ist ein Kreis.

Aufg. 16. Man bestimme den Ort des Fusspunktes der Normale, die man vom Durchschnittspunkt der Tangente mit der kleinen Axe auf den Brennstrahl des Berührungspunktes fällt.

Aufl. Es ist der Kreis aus dem Brennpunkt durch die Endpunkte der kleinen Axe.

Aufg. 17. Man bestimme den Ort der Durchschnittspunkte, welche die Tangenten in den Endpunkten conjugirter Durchmesser bilden.

Aufl. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$. Man erhält die Gleichung durch Addition der Quadrate der Gleichungen beider Tangenten unter Berücksichtigung der Relationen des Art. 180.

Aufg. 18. Theile einen Kreisbogen in drei gleiche Theile.

Der Theilpunkt wird als der Durchschnitt des gegebenen Bogens mit einer gewissen Hyperbel bestimmt. (Vergl. Aufg. 7, Art. 49.)

Aufg. 19. Durch die Endpunkte einer Sehne von constanter Länge in einem festen Kreise zieht man Parallelen zu zwei festen Geraden, welches ist der Ort ihres Durchschnittspunktes?

Aufl. Eine Ellipse, deren Axen die Winkel der durch den Kreismittelpunkt gehenden Parallelen zu den festen Geraden halbiren.

Aufg. 20. Von den parallelen Seiten eines Trapezes ist die eine nach Grösse und Lage, die andere der Grösse nach gegeben; die Summe der nicht parallelen Seiten ist bekannt und man verlangt den Ort des Durchschnittspunktes der Diagonalen zu wissen.

Aufg. 21. Die eine Ecke eines Parallelogramms, welches einer gegebenen Ellipse umgeschrieben ist, durchläuft die eine Directrix; man soll zeigen, dass die gegenüberliegende Ecke desselben die zweite Directrix beschreibt, und dass die beiden andern Ecken auf dem Kreise liegen, welchen man über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser beschreibt.

234. Wir geben in diesem Artikel einige auf die Focal-Eigenschaften der Kegelschnitte bezügliche Aufgaben und Sätze und fordern den Leser auf, die fehlenden Beweise zu entwickeln.

Aufg. 1. In einem Kegelschnitt ist die Focal-Distanz eines jeden Punktes der bis zum Durchschnitt mit der Tangente am Endpunkt der Brennpunkts-Ordinate verlängerten Ordinate des Punktes gleich.

Aufg. 2. Vom Brennpunkt eines Kegelschnittes aus werden gegen die Tangenten desselben unter gegebenem Winkel gerade Linien gezogen; man soll den Ort ihrer Fusspunkte bestimmen.

Aufg. 3. Den Ort des Poles einer festen geraden Linie in Bezug auf eine Reihe concentrischer und confocaler Kegelschnitte zu finden.

Wir wissen, dass der Pol einer geraden Linie $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus den Gleichungen $mx = a^2$ und $ny = b^2$ (Art. 177) gefunden wird; wenn die Brennpunkte des Kegelschnitts gegeben sind, so ist $a^2 - b^2 = c^2$ bestimmt, und der Ort des Pols der festen geraden Linie ist durch $mx - ny = c^2$ repräsentirt, welches die Gleichung einer zur gegebenen geraden Linie senkrechten Geraden ist.

Wenn die gegebene Linie einen der Kegelschnitte berührt, so ist ihr Pol der Berührungspunkt; d. i. die Tangenten eines Kegelschnittes in den Punkten, in denen die Tangente eines confocalen Kegelschnitts ihn schneidet, begegnen sich in der Normale des letzteren.

Aufg. 4. Man soll den Ort der Berührungspunkte der Tangenten einer Reihe von confocalen Ellipsen aus einem festen Punkte der grossen Axen bestimmen.

Aufl. Der Ort ist ein Kreis.

Aufg. 5. Die Geraden, welche je einen Brennpunkt mit dem Fusspunkt der Normalen vom andern Brennpunkt auf eine Tangente verbinden, schneiden einander in der Normale und halbiren sie.

Aufg. 6. Beweise, dass die Polar-Gleichung der Sehne, welche die Punkte von den Winkel-Coordinaten $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ verbindet,

$$\frac{p}{2\varrho} = e \cos \theta + \sec \beta \cos (\theta - \alpha) \text{ ist.}$$

Man findet diese Gleichung nützlich in Untersuchungen über Sätze, welche sich auf Winkel am Brennpunkte beziehen. Sie folgt leicht aus Aufg. 3, Art. 44.

Aufg. 7. Für Polar-Coordinaten, deren Pol mit dem Brennpunkt zusammenfällt, soll man beweisen, dass die Polargleichung der Tangente in dem Punkte, dessen Winkelcoordinate α ist, durch

$$\frac{p}{2\varrho} = e \cos \theta + \cos (\theta - \alpha) \text{ repräsentirt ist.}$$

Aufg. 8. Die Halbirungslinien der Winkel, welche die Radii vectoren eines Punktes mit der Hauptaxe bilden und die Tangenten der Curve in diesem Punkte schneiden sich in der Tangente am Endpunkte der Hauptaxe.

Aufg. 9. Wenn eine Sehne PP' eines Kegelschnitts durch einen festen Punkt O geht, so ist $\tan \frac{1}{2} PFO \,.\, \tan \frac{1}{2} P'FO$ constant.

Wir geben einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes. Denken wir irgendwo in PP' einen Punkt O genommen, und sei die Entfernung FO das e'fache der Entfernung von O von der Directrix; so gelten, da die Entfernungen von P und O von der Directrix zu PD und OD proportional sind, die Gleichungen:

$$\frac{FP}{PD} : \frac{FO}{OD} = \frac{e}{e'} \text{ oder } \frac{\sin PDF}{\sin PFD} : \frac{\sin ODF}{\sin OFD} = \frac{e}{e'}.$$

Also nach Art. 200 $\frac{\cos OFT}{\cos PFT} = \frac{e}{e'}$; oder, weil (Artikel 199) PFT die Hälfte der Summe und OFT die Hälfte der Differenz der Winkel PFO und $P'FO$ ist, $\tan \frac{1}{2} PFO \,.\, \tan \frac{1}{2} P'FO = \frac{e - e'}{e + e'}$.

Es ist offenbar, dass das Product dieser Tangenten constant bleibt, selbst wenn O nicht constant verbliebe, sondern sich auf einem Kegelschnitt bewegte, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat, wie der gegebene Kegelschnitt.

Aufg. 10. Man soll die Bedingung ausdrücken, unter welcher die gerade Verbindungslinie von zwei Punkten $x'y'$, $x''y''$ der Curve durch

einen Brennpunkt geht. Die Bedingung kann in verschiedenen äquivalenten Formen ausgedrückt werden, von denen jedoch zwei vorzüglich brauchbare dadurch erhalten werden, dass man ausdrückt, es sei $\theta''=\theta'+180^0$, für θ', θ'' als die Winkel, welche von der Axe mit den geraden Linien gebildet werden, die diese Punkte mit dem Brennpunkt verbinden. Die Bedingung $\sin\theta''=-\sin\theta'$ giebt $\frac{y'}{a-ex'}+\frac{y''}{a-ex''}=0$, $a(y'+y'')=e(x'y''+x''y')$. Die Bedingung $\cos\theta''=-\cos\theta'$ giebt $\frac{x'-c}{a-ex'}+\frac{x''-c}{a-ex''}=0$, $2ex'x''-(a+ce)(x'+x'')+2ac=0$.

Aufg. 11. Wenn in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne die Normalen gezogen sind, so halbirt eine durch ihren Durchschnittspunkt der grossen Axe parallel gezogene gerade Linie die Sehne.

Da jede Normale den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbirt, so ist der Durchschnittspunkt der Normalen der Curve in den Endpunkten einer Focalsehne das Centrum des Kreises, welcher dem von der Sehne und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte mit dem andern Brennpunkt gebildeten Dreieck eingeschrieben ist. Sind aber a, b, c die Seiten eines Dreiecks von den Ecken $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, so sind nach der 6. Aufg. des Art. 7 die Coordinaten vom Centrum des eingeschriebenen Kreises

$$x=\frac{ax'+bx''+cx'''}{a+b+c},\quad y=\frac{ay'+by''+cy'''}{a+b+c}.$$

Im gegenwärtigen Falle sind die Coordinaten der Ecken x', y'; x'', y''; $-c$, 0 und die Längen der Gegenseiten resp. $a+ex''$, $a+ex'$, $2a-ex'-ex''$. Daher ist $y=\frac{(a+ex')y''+(a+ex'')y'}{4a}$ oder mit Hilfe der ersten Relation der vorigen Aufgabe $y=\frac{1}{2}(y'+y'')$, was den Satz beweist*). In derselben Weise findet man

$$x=\frac{(a+ex'')x'+(a+ex')x''-(2a-ex'-ex'')c}{4a},$$

welches durch die zweite Relation der vorigen Aufgabe reducirt in $x=\frac{(a+ec)(x'+x'')-2ac}{2a}$ übergeht. Analoge Ausdrücke findet man für die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten der Curve in den Endpunkten einer Focalsehne, weil dieser Punkt das Centrum des Kreises ist, der dem eben betrachteten Dreieck auf der Aussenseite der Basis eingeschrieben ist. Die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Tangenten mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Normalen geht durch den Brennpunkt und ist die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze in demselben Dreieck.

Aufg. 12. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Normalen an den Enden einer Brennpunkts-Sehne.

Sind α, β die Coordinaten des Mittelpunktes der Sehnen, so ist nach der letzten Aufgabe

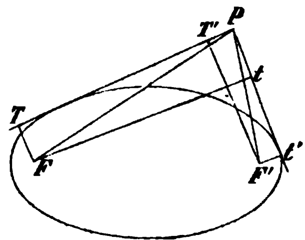
---

*) Die Formeln der 4. Aufg. des Art. 189 führen gleichfalls zum Ziel.

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(x' + x'') = \frac{a^2(x+c)}{a^2+c^2};\quad \beta = \tfrac{1}{2}(y' + y'') = y.$$

Und wenn die Gleichung des durch den Punkt $(\alpha\beta)$ beschriebenen Ortes bekannt wäre, so würde durch die eben gewonnenen Substitutionen die Gleichung des durch xy beschriebenen Ortes aus ihr abgeleitet werden. Die Polargleichung des Ortes, welchen der Mittelpunkt der Sehne beschreibt, ist aber nach Art. 201 $\varrho = \frac{1}{2}(\varrho' - \varrho'') = \frac{-b^2}{a}\,\frac{e\cos\theta}{1 - e^2\cos^2\theta}$, oder in rechtwinkligen Coordinaten mit dem Centrum als Anfangspunkt $b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = b^2 c\alpha$. Daher ist die Gleichung des gesuchten Ortes $a^2b^2(x+c)^2 + (a^2+c^2)y^2 = b^2c(a^2+c^2)(x+c)$.

Aufg. 13. Wenn θ der Winkel zwischen den von einem Punkte P an die Ellipse gezogenen Tangenten ist, und ϱ, ϱ' die Entfernungen dieses Punktes vom Brennpunkt bezeichnen, so soll bewiesen werden, dass



$$\cos\theta = \frac{\varrho^2 + \varrho'^2 - 4a^2}{2\varrho\varrho'} \text{ ist.}$$

Denn nach Art. 197 ist

$$\sin TPF.\sin tPF' = \frac{FT.F'T'}{PF.PF'} = \frac{b^2}{\varrho\varrho'}.$$

Aber man hat $\cos FPF' - \cos TPt = 2\sin TPF.\sin tPF'$, und somit $2\varrho\varrho'\cos FPF' = \varrho^2 + \varrho'^2 - 4a^2$.

Aufg. 14. Wenn man die Längen der Tangenten von T aus durch τ, τ', die der Brennstrahlen von P durch ϱ, ϱ' und die Längen der zu den Tangenten parallelen Halbdurchmesser mit d, d' bezeichnet, so gilt die Relation $\tau\tau' + dd' = \varrho\varrho'$.

Aufg. 15. Wenn ein Punkt O in der Ebene eines Kegelschnitts mit den Brennpunkten F, F' desselben verbunden wird (oder wenn man von ihm Tangenten an einen confocalen Kegelschnitt zieht), und die Schnittpunkte dieser geraden Linien mit der Curve resp. durch R, R'; S, S' bezeichnet werden, so ist $\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR'} = \frac{1}{OS} - \frac{1}{OS'}$.

Aus der quadratischen Gleichung, durch welche im Art. 95 der Radius vector bestimmt ward, geht hervor, dass die Differenz der reciproken Werthe der Wurzeln für solche Werthe von θ die nämliche sein muss, für die $(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)\cos^2\theta + 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})\cos\theta\sin\theta + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\sin^2\theta$ oder $A_{11}\cos^2\theta + 2A_{12}\cos\theta\sin\theta + A_{22}\sin^2\theta$ (Art. 114) denselben Werth hat. Diese Grösse hat aber offenbar für irgend zwei Werthe von θ den nämlichen Werth, welche den Richtungen von Linien entsprechen, die gegen die beiden Geraden $A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0$ gleich geneigt sind. Die betrachtete Function ist aber gleich Null für die Richtungen der beiden Tangenten durch O und nach Art. 197 sind die Tangenten eines confocalen Kegelschnitts aus demselben Punkte gleichgeneigt gegen diese.

Aufg. 16. Wenn man als entsprechende Punkte in zwei confocalen Ellipsen diejenigen betrachtet, deren Coordinaten den zugehörigen Axen proportional sind, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte Normalen einer dritten Ellipse, die sie sämmtlich halbirt.

235. Wir geben in diesem Artikel einige speciell auf die Parabel bezüglichen Aufgaben.

Der Leser wird keine Schwierigkeit darin finden, unter den Beispielen des vorigen Artikels diejenigen zu erkennen, deren Beweise sich auch auf die Parabel anwenden lassen.

Aufg. 1. Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der zwei Tangenten in den Punkten (x', y'), (x'', y'') der Parabel $y^2 = px$ zu bestimmen.

Aufl. $y = \frac{y' + y''}{2}$, $x = \frac{y'y''}{p}$.

Aufg. 2. Man soll den Ort des Durchschnittspunktes des vom Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Perpendikels mit der Geraden finden, welche den Scheitel mit dem Berührungspunkt verbindet.

Aufg. 3. Die Höhenperpendikel des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks schneiden sich in der Directrix.

Die Gleichung einer dieser Senkrechten ist nach Art. 32

$$\frac{y'y''' - y'y''}{p}\left(x - \frac{y''y'''}{p}\right) + \frac{y''' - y''}{2}\left(y - \frac{y'' + y'''}{2}\right) = 0;$$

sie nimmt durch die Division mit $(y''' - y'')$ die Form

$$y'\left(x + \frac{p}{4}\right) - \frac{y'y''y'''}{p} + \frac{py}{2} - \frac{p(y' + y'' + y''')}{4} = 0$$

an, und man erkennt aus der Symmetrie der Gleichung, dass die drei fraglichen Senkrechten sich in der Directrix in der Höhe

$$y = \frac{2y'y''y'''}{p^2} + \frac{y' + y'' + y'''}{2} \text{ schneiden.}$$

Aufg. 4. Der Inhalt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem Inhalt des Dreiecks, welches durch die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte gebildet wird.

Substituiren wir die Coordinaten der Ecken des Dreiecks in die Formel des Art. 36, so finden wir für den letzt bezeichneten Inhalt den Ausdruck $\frac{1}{2p}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')$ und für den ersteren die Hälfte derselben Grösse.

Aufg. 5. Bestimme den Radius des Kreises, welcher einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umgeschrieben ist.

Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines Dreiecks, welches die Seitenlängen d, e, f und den Inhalt ΔF besitzt, wird durch $\frac{def}{4F}$ ausgedrückt. Wenn aber d die Länge der Sehne zwischen den Punkten (x'', y''), (x''', y''') und θ' der Winkel ist, welchen diese Sehne mit der Axe macht, so ist offenbar $d \sin\theta' = y'' - y'''$. Durch Einsetzen des in der letzten Aufgabe abgeleiteten Ausdrucks für den Inhalt ergiebt sich der fragliche Halbmesser $R = \frac{p}{2 \sin\theta' \sin\theta'' \sin\theta'''}$. Wir können diesen Radius auch durch die zu den Seiten des Dreiecks parallelen Brennpunkts-Sehnen ausdrücken; denn nach Art. 201, Aufg. 2 ist die Länge einer Sehne, welche

den Winkel θ mit der Axe bildet, $c = \frac{p}{\sin^2\theta}$. Also $R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}$. Aus Art. 220 ergiebt sich, dass c', c'', c''' die Parameter der Durchmesser sind, welche die Seiten des Dreiecks halbiren.

Aufg. 6. Drücke den Radius des Kreises, welcher dem von drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, in Function der Winkel aus, welche dieselben mit der Axe bilden.

Aufl. $R = \frac{p}{8 \sin\theta' \sin\theta'' \sin\theta'''}$, oder $R^2 = \frac{p'p''p'''}{64p}$, wenn p', p'', p''' die Parameter derjenigen Durchmesser sind, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten gehen. (Art. 220.)

Aufg. 7. Bestimme den Winkel, welchen die zwei vom Punkte (x', y') an die Parabel $y^2 = 4mx$ gezogenen Tangenten bilden.

Die Gleichung des Tangentenpaares wird wie im Art. 110 ermittelt und ist $(y'^2 - 4mx')(y^2 - 4mx) = \{yy' - 2m(x + x')\}^2$.

Die Gleichung zweier durch den Coordinatenanfangspunkt zu ihnen gezogenen Parallelen ist alsdann $x'y^2 - y'xy + mx^2 = 0$, und der von denselben eingeschlossene Winkel wird nach Art. 87 durch

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{(y'^2 - 4mx')}}{x' + m} \text{ bestimmt.}$$

Aufg. 8. Den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel zu bestimmen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.

Aufl. Die Hyperbel
$y^2 - 4mx = (x + m)^2 \tan^2\varphi$ oder $y^2 + (x - m)^2 = (x + m)^2 \sec^2\varphi$.

Aus der letzteren Form der Gleichung geht hervor, dass die Hyperbel denselben Brennpunkt und die nämliche Directrix wie die Parabel besitzt, und dass ihre Excentricität $= \sec\varphi$ ist.

Aufg. 9. Den Ort des Fusspunktes der Senkrechten zu bestimmen, welche vom Brennpunkt einer Parabel auf die Normale gefällt wird.

Die Länge der Senkrechten von $(m, 0)$ auf

$$2m(y - y') + y'(x - x') = 0$$

ist $\frac{y'(x' + m)}{\sqrt{(y'^2 + 4m^2)}} = \sqrt{\{x'(x' + m)\}}$. Wenn aber θ der durch die Senkrechte mit der Axe der x gebildete Winkel ist (Art. 220), so ist $\sin\theta = \sqrt{\left(\frac{m}{x' + m}\right)}$, $\cos\theta = \sqrt{\left(\frac{x'}{x' + m}\right)}$, und die Polar-Gleichung des Ortes ist daher $\varrho = \frac{m\cos\theta}{\sin^2\theta}$. Sie liefert die Gleichung $y^2 = mx$ für Cartesische Coordinaten.

Aufg. 10. Die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem die den Punkten (x', y'), (x'', y'') entsprechenden Normalen sich schneiden.

Aufl. $x = 2m + \frac{y'^2 + y'y'' + y''^2}{4m}$, $y = -\frac{y'y''(y' + y'')}{8m^2}$.

Wenn durch α, β die Coordinaten des Durchschnittspunktes der entsprechenden Tangenten bezeichnet sind (Aufg. 1), so hat man auch:

$$x = 2m + \frac{\beta^2}{m} - \alpha, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{m}.$$

Aufg. 11. Man bestimme die Coordinaten derjenigen Punkte der Curve, deren Normalen durch den gegebenen Punkt $x'y'$ gehen.

Indem man zwischen der Gleichung der Curve und der der Normale auflöst, erhält man $2y^3 + (p^2 - 2px')\,y = p^2y'$ und die drei Wurzeln sind daher durch die Relation $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ verbunden. Die geometrische Bedeutung derselben besteht darin, dass die Verbindungslinie von zweien dieser Punkte und die Gerade, welche den dritten mit dem Scheitel verbindet, gleiche Winkel mit der Axe der x bilden.

Aufg. 12. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Normalen in den Endpunkten der durch (x', y') gehenden Sehnen.

Wir haben dann die Relation $\beta y' = 2m\,(x' + \alpha)$, und erhalten durch die Substitution des aus dieser Relation abgeleiteten Werthes von α in die Resultate der 10. Aufgabe

$$2mx + \beta y' = 4m^2 + 2\beta^2 + 2mx';\ 2m^2y = 2\beta m x' - \beta^2 y';$$

sodann durch Elimination von β

$$2\left\{2m(y-y') + y'(x-x')\right\}^2 = (4mx' - y'^2)(y'y + 2x'x - 4mx' - 2x'^2)$$

die Gleichung einer Parabel, deren Axe zu der Senkrechten von dem Punkte auf seine Polare parallel ist. Wenn die Sehnen einer festen Geraden parallel sind, so reducirt sich der Ort auf eine gerade Linie, wie es auch gemäss Aufg. 11 sein muss.

Aufg. 13. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der zu einander rechtwinkligen Normalen.

In diesem Falle ist

$$\alpha = -m,\ x = 3m + \frac{\beta^2}{m};\ \ y = \beta;\ y^2 = m(x - 3m).$$

Aufg. 14. Man soll aus den Längen zweier Tangenten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ω den Parameter finden.

Man ziehe den die Berührungs-Sehne halbirenden Durchmesser, so ist der Parameter desselben $p' = \frac{y^2}{x}$ und der Hauptparameter ist

$p = \frac{y^2 \sin^2\theta}{x} = \frac{s^2 y^2}{4x^3}$, wo s die Länge der vom Durchschnittspunkt der Tangenten auf die Sehne gefällten Senkrechten ist. Aber

$$2sy = ab \sin\omega \text{ und } 16x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega;$$

also $p = \frac{4a^2b^2\sin^2\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}$. (Art. 215.)

Aufg. 15. Zeige aus der Gleichung des einem Tangentendreieck der Parabel umgeschriebenen Kreises, dass er durch den Brennpunkt der Curve geht.

Die Gleichung des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises ist nach Art. 154 $x_2x_3 \sin A_1 + x_3x_1 \sin A_2 + x_1x_2 \sin A_3 = 0$; das absolute Glied in dieser Gleichung wird durch Einführung der Werthe gefunden, welche die Symbole x_1, x_2, x_3 vertreten ($x_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1$, etc.)

$$p_1p_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + p_3p_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + p_1p_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Wenn aber die Linie x_1 eine Tangente der Parabel ist und der Ursprung der Brennpunkt, so ist (Art. 227) $p = \frac{m}{\cos\alpha_1}$ und das absolute Glied

$$=\frac{m^2}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}\left\{\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos\alpha_1+\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos\alpha_2+\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos\alpha_3\right\},$$

d. h. mit Null identisch.

Aufg. 16. Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Tangenten der Parabel, wenn gegeben ist entweder 1.) das Product der Sinus oder 2.) das der Tangenten, 3.) die Summe oder 4.) die Differenz der Cotangenten der Winkel, die sie mit der Axe bilden.

Im ersten Falle ein Kreis, im zweiten eine gerade Linie, im dritten eine gerade Linie, im vierten eine Parabel.

236. Wir schliessen einige vermischte Beispiele an.

Aufg. 1. Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umgeschrieben ist, so geht sie auch durch den Durchschnittspunkt seiner Höhen.

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die Axen in gegebenen Punkten schneidet, ist (Aufg. 1, Art. 114)

$$\mu\mu' x^2 + 2a_{12}xy + \lambda\lambda' y^2 - \mu\mu'(\lambda+\lambda')x - \lambda\lambda'(\mu+\mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu' = 0.$$

Für rechtwinklige Axen repräsentirt diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel (Art. 182), wenn $\lambda\lambda' = -\mu\mu'$ ist.

Wenn daher eine Seite des gegebenen Dreiecks und die von der Gegenecke auf sie gefällte Senkrechte zu Axen genommen werden, so sind die Abschnitte λ, λ', μ gegeben und μ' ist daher auch bekannt; die Curve schneidet aber die Senkrechte, d. i. die Axe der y in dem festen Punkt $y = -\frac{\lambda\lambda'}{\mu}$, welcher nach Aufg. 7, Art. 32 der Durchschnittspunkt der Höhen im Dreieck ist.

Aufg. 2. Welches ist der Ort der Centra der gleichseitigen Hyperbeln, welche durch drei gegebene Punkte möglich sind?

Aufl. Der Kreis, welcher durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks jener Punkte geht. (Vergl. Aufg. 3, Art. 114.)

Aufg. 3. Man soll für einen durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt die Bedingung ermitteln, unter welcher der Pol der Axe x (y) in der Axe y (x) liegt.

Sie ist $a_{12}a_{33} = a_{23}a_{13}$.

Aufg. 4. Wenn in einem Dreieck jede Ecke der Pol der Gegenseite in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht der dem Dreieck umgeschriebene Kreis durch das Centrum der Curve*).

Wenn die Relation der Aufgabe 3 besteht, so ist die Gleichung des Kreises durch den Pol jeder Axe und den Coordinatenanfangspunkt

$$a_{12}(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + a_{23}x + a_{13}y = 0 \quad \text{oder}$$

$$x(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) + y(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) - (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)xy = 0,$$

eine Gleichung, welcher offenbar durch die Coordinaten des Centrums genügt wird, vorausgesetzt, dass wir haben $a_{11} + a_{22} = 2a_{12}\cos\omega$, d. h. vorausgesetzt, dass die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist. (Art. 87, 182.)

Aufg. 5. Ein durch das Centrum einer gleichseitigen Hyperbel und durch zwei beliebige Punkte beschriebener Kreis geht auch durch den

*) Dies ist ein specieller Fall eines im ~~nächsten~~ 31 Kapitel zu beweisenden Satzes. (Art. 351, Aufg. 3)

Durchschnittspunkt der geraden Linien, welche durch jeden dieser Punkte parallel zur Polare des andern gezogen werden können.

Aufg. 6. Wenn auf einer Tangente eines Kegelschnitts Punkte A und B so gewählt werden, dass AB constant ist, welches ist alsdann der Ort des Durchschnittspunkts der von A und B an den Kegelschnitt gelegten Tangenten?

Die Gleichung des Paares von Tangenten, welche vom Punkte $x'y'$ an den durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt gehen, ist in Art. 124 gefunden worden; für die Substitution $y = 0$ erhalten wir aus ihr eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die von ihnen gebildeten Abschnitte in der Axe der x sind.

Indem wir die Differenz der Wurzeln dieser Gleichung bilden und sie einer Constanten gleich setzen, erhalten wir die Gleichung des Ortes; sie ist im Allgemeinen vom 4. Grade. Für $a_{13}^2 = a_{11}a_{33}$ berührt jedoch die Axe der x den gegebenen Kegelschnitt, und die Gleichung des Ortes wird durch y^2 theilbar und reducirt sich dadurch auf den zweiten Grad. Mit Hilfe derselben Gleichung würden wir auch den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten finden, wenn die Summe, das Product u. s. w. der in der Axe gebildeten Abschnitte gegeben wäre.

237. Es ist vortheilhaft, die Lage eines Punktes in einer Curve, wenn möglich, durch eine **einzige unabhängige Veränderliche** auszudrücken, statt durch die zwei Coordinaten x', y'. So ist es im Falle der Ellipse von grossem Nutzen für die Discussion ihrer Eigenschaften, eine ähnliche Substitution zu machen, wie die in Artikel 132 in dem Fall des Kreises angewendete. Wir nehmen an $x' = a \cos \varphi$, $y' = b \sin \varphi$, eine Substitution, welche offenbar mit der Gleichung der Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ verträglich ist.

Die geometrische Bedeutung des Winkels φ ist leicht zu erkennen. Wenn wir einen Kreis über der grossen Axe als Durchmesser beschreiben, und die Ordinate in P bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in Q verlängern, so ist der Winkel $QCL = \varphi$, denn $CL = CQ \cdot \cos QCL$, oder

$$x' = a \cos \varphi;$$

und

$$PL = \frac{b}{a} QL$$

(Artikel 171), und weil $QL = a \sin \varphi$,

$$y' = b \sin \varphi.$$

238. Wenn durch P eine Parallele PN zum Radius CQ ge-

legt wird, so ist $PM : CQ = PL : QL = b : a$; aber $CQ = a$, daher $PM = b$. PN, parallel zu CQ, ist übrigens $= a$.

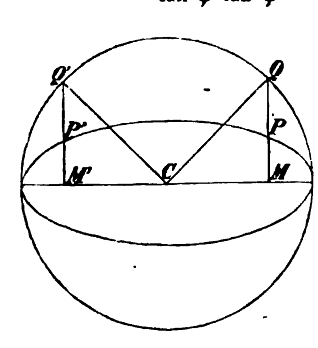
Wenn also von irgend einem Punkte der Ellipse eine Linie $= a$ bis zur kleinen Axe gezogen wäre, so ist der durch die grosse Axe in ihr bestimmte Abschnitt $= b$. Würde die Ordinate PQ bis zum ferneren Durchschnitt Q' mit dem Kreise verlängert, so ergiebt sich ebenso, dass in einer durch P zum Radius CQ' gezogenen Parallelen von den Axen Theile von constanter Länge abgeschnitten werden. Wenn daher umgekehrt eine Linie MN von constanter Länge sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels fortbewegt, und ein Punkt P so genommen ist, dass MP constant bleibt, so beschreibt P eine Ellipse, deren Axen $= MP$ und NP sind. (Vergl. Art. 49, Aufg. 12.)

Nach diesem Princip ist ein Instrument zur Erzeugung der Ellipse durch eine continuirliche Bewegung construirt worden, welches man den elliptischen Zirkel genannt hat. CA, CD' sind zwei feste Lineale, MN ein drittes Lineal von constanter Länge, welches so beweglich ist, dass seine Endpunkte die Linien CA, CD' durchlaufen; alsdann beschreibt ein in einem Punkt von MN befestigter Stift eine Ellipse. Wenn der Stift im Mittelpunkt von MN befestigt ist, so beschreibt er einen Kreis.

239. Die Betrachtung des Winkels φ liefert eine einfache Methode zur geometrischen Construction des Durchmessers, welcher einem gegebenen conjugirt ist, denn $\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}\tan\varphi$.

Also wird die Relation $\tan\theta\tan\theta' = -\frac{b^2}{a^2}$ (Artikel 178) zu

$$\tan\varphi\tan\varphi' = -1 \text{ oder } \varphi - \varphi' = 90^0.$$



Wir erhalten also die folgende Construction, um den zu irgend einem gegebenen conjugirten Durchmesser zu ziehen: Man verlängere die Ordinate des gegebenen Punktes P bis zum Durchschnitt Q mit dem über der grossen Axe beschriebenen Halbkreis, ziehe CQ und errichte CQ' senkrecht zu ihm; dann bestimmt die von Q' auf die Axe gefällte

Senkrechte einen Punkt P' der Ellipse, welcher dem fraglichen conjugirten Durchmesser angehört.

Auch können auf diese Weise die in Artikel 180 gegebenen Coordinaten von P' leicht gefunden werden; denn aus

$$\cos\varphi' = \sin\varphi \text{ folgt } \frac{x''}{a} = \frac{y'}{b}, \text{ und aus}$$

$$\sin\varphi' = -\cos\varphi \text{ sodann } \frac{y''}{b} = -\frac{x'}{a}.$$

Aus diesen Werthen geht auch hervor, dass die Dreiecke PCM, $P'CM'$ von gleichem Inhalt sind.

Aufg. 1. Die Längen zweier conjugirten Halbdurchmesser in Function des Winkels φ auszudrücken.

Aufl. $a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$, $b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$.

Aufg. 2. Die Gleichung einer Sehne der Ellipse aus den Winkeln φ und φ' zu bestimmen. (Vergl. Art. 132.)

Aufl. $\frac{x}{a}\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi') + \frac{y}{b}\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi') = \text{sos}\,\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$.

Aufg. 3. Drücke in derselben Weise die Gleichung der Tangente aus.

Aufl. $\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1$.

Aufg. 4. Die Länge der zwei Punkte α, β verbindenden Sehne zu bestimmen.

Aufl. $D^2 = a^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2$.

$$D = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Aber nach Aufg. 1 repräsentirt die mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ behaftete Grösse die Länge des dem Punkte $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ conjugirten Halbdurchmesser, und nach Aufgabe 2, 3 ist die Tangente im Punkte $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ parallel zu der die Punkte α, β verbindenden Sehne; wenn also b' die Länge des zur gegebenen Sehne parallelen Halbdurchmessers repräsentirt, so ist $D = 2b'\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Aufg. 5. Den Inhalt des durch drei Punkte α, β, γ gebildeten Dreiecks zu finden.

Nach Art. 36 ist

$$F = ab\left\{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)\right\}$$
$$= ab\left\{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma)\right\}$$
$$= 4\,ab\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha),$$

oder der Inhalt $= 2ab\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$.

Aufg. 6. Wenn die Halbirungslinien der Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks sich im Centrum durchschneiden, so ist dasselbe von constanter Fläche.

Aufg. 7. Den Radius des Kreises zu finden, welcher dem durch drei Punkte α, β, γ bestimmten Dreiecke umschrieben ist.

Der fragliche Halbmesser ist $R = \frac{def}{2F} = \frac{b'b''b'''}{ab}$, wenn durch d, e, f

die Seiten des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks und durch b', b'', b''' die zu ihnen resp. parallelen Halbdurchmesser bezeichnet werden. Bedeuten endlich c', c'', c''' die denselben Seiten resp. parallelen Brennpunkts-Sehnen, so ist $R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}$. (Art. 235, Aufg. 5.)

Aufg. 8. Die Gleichung dieses Kreises zu entwickeln.

Aufl. $x^2 + y^2 - \frac{2(a^2-b^2)x}{a} \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$
$- \frac{2(b^2-a^2)y}{b} \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) =$
$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\beta+\gamma) + \cos(\gamma+\alpha)\right\}.$

Aus dieser Gleichung kann man leicht die Coordinaten seines Centrums bestimmen.

Aufg. 9. Der Inhalt des durch drei Tangenten gebildeten Dreiecks ist nach Art. 39 $ab \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma) \tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$.

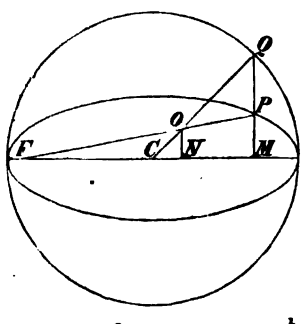
Aufg. 10. Der Inhalt des Dreiecks von drei Normalen ist

$$\frac{c^4}{4ab} \tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma) \tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) \times \left\{\sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) + \sin(\alpha+\beta)\right\}^2:$$

also schneiden sich drei Normalen in einem Punkte, wenn

$$\sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) + \sin(\alpha+\beta) = 0 \quad \text{ist.}$$

Aufg. 11. Welches ist der Ort des Punktes, in dem der Brennstrahl FP den Halbdurchmesser des Kreises CQ schneidet?



Bezeichnen wir die Central-Coordinaten von P durch x', y', die von O durch x, y, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken FON, FPM

$$\frac{y}{x+c} = \frac{y'}{x'+c} = \frac{b \sin\varphi}{a(e+\cos\varphi)}.$$

Weil nun φ der von dem Radius vector des Punktes O mit der Axe der x gebildete Winkel ist, so erhalten wir die Polar-Gleichung des Ortes, indem wir $\varrho\cos\varphi$ für x, $\varrho\sin\varphi$ für y schreiben,

$$\frac{\varrho}{c+\varrho\cos\varphi} = \frac{b}{a(e+\cos\varphi)} \text{ oder } \varrho = \frac{bc}{c+(a-b)\cos\varphi}.$$

Demnach ist der Ort eine Ellipse, von welcher C der eine Brennpunkt ist, und man kann leicht nachweisen, dass der andre mit F zusammenfällt. (Art. 201.)

Aufg. 12. Die Normale des Punktes P wird bis zum Durchschnitt mit CQ verlängert, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes?

Die Gleichung der Normale ist $\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2$; da aber, wie in der letzten Aufgabe, $\varrho\cos\varphi$ für x und $\varrho\sin\varphi$ für y substituirt werden kann, so geht dieselbe in $(a-b)\varrho = c^2$ oder $\varrho = a+b$ über. Der fragliche Ort ist daher ein mit der Ellipse concentrischer Kreis.

Aufg. 13. Man zeige, dass $\tan \frac{1}{2} PFC = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \tan \frac{1}{2}\varphi$ ist.

Aufg. 14. Wenn vom Scheitel der Ellipse ein Radius vector nach einem Punkte der Curve und durch das Centrum eine Parallele zu ihm gezogen wird, so soll man den Ort des Punktes bestimmen, in welchem diese letztere die Tangente des Punktes schneidet.

Die trigonometrische Tangente des durch den Radius vector vom Scheitel mit der Axe gebildeten Winkels ist $= \frac{y'}{x'+a}$; daher ist die Gleichung der durch das Centrum gezogenen Parallellinie

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'+a} = \frac{b \sin \varphi}{a(1+\cos\varphi)} = \frac{b}{a} \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

oder $\frac{y}{b} \sin\varphi + \frac{x}{a}\cos\varphi = \frac{x}{a}$; sonach wird der Ort des Durchschnitts dieser Linie mit der Tangente $\frac{y}{b}\sin\varphi + \frac{x}{a}\cos\varphi = 1$ durch $\frac{x}{a} = 1$ repräsentirt, d. h. der fragliche Ort ist die Tangente am andern Ende der Axe.

Dieselbe Untersuchungsmethode bleibt anwendbar, wenn der erste Radius vector durch einen beliebigen Punkt (x', y') in der Curve gezogen ward; man substituirt alsdann a' und b' für a und b, und der Ort ist die Tangente an dem diametral entgegengesetzten Punkt.

Durch den nämlichen Punkt der Scheiteltangente gehen auch die Halbirungslinien der Winkel, welche die Brennstrahlen eines Punktes mit der Axe x bilden. (Art. 234, Aufg. 8.)

240. Die Methoden des vorigen Artikels können nicht direct auf die Hyperbel angewendet werden.

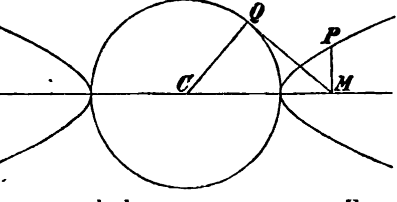
Wir können aber für dieselbe die Substitutionen $x' = a \sec\varphi$, $y' = b \tan\varphi$ mit ähnlichem Vortheil benutzen. Sie sind statthaft, weil

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

Der Winkel φ kann geometrisch dargestellt werden, indem man eine Tangente MQ vom Fusspunkt der Ordinate M an den über der Hauptaxe beschriebenen Kreis zieht; dann ist der Winkel

$$QCM = \varphi,$$

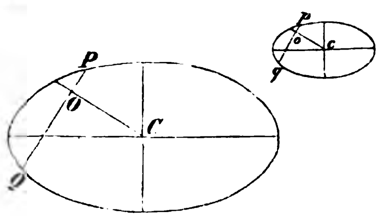
weil $CM = CQ \,.\, \sec QCM$.



Wir haben auch $QM = a \tan\varphi$, und $PM = b\tan\varphi$, d. h.: wenn man vom Fusspunkt einer Ordinate der Hyperbel eine Tangente zu dem über der Hauptaxe beschriebenen Kreise zieht, so ist diese in einem constanten Verhältniss zur Ordinate.

Aufg. Wenn man einen Punkt der conjugirten Hyperbel in analoger Weise durch $y'' = b \sec \varphi'$, $x'' = a \tan \varphi'$ ausdrückt, so soll man beweisen, dass die Endpunkte conjugirter Durchmesser durch die charakteristische Relation $\varphi = \varphi'$ verbunden sind.

241. Irgend zwei Figuren heissen **ähnlich und in ähnlicher Lage**, wenn die Radien vectoren der ersten von einem gewissen Punkt O in einem constanten Verhältniss zu den parallelen Radien vectoren der zweiten von einem andern Punkt o stehen. Wenn es möglich ist, zwei solche Punkte O und o zu finden, so kann man darnach unendlich viele andre bestimmen; denn wenn man einen Punkt C wählt und oc parallel zu OC und im constanten Verhältniss $op : OP$ zieht, so ist in den ähnlichen Dreiecken OCP und ocp die Linie cp zu CP parallel und in dem gegebenen Verhältniss. Ebenso kann man von jedem andern durch c gezogenen Radius vector zeigen, dass er zu dem durch C gelegten parallelen Radius vector in demselben Verhältniss steht. Wenn zwei Centralkegelschnitte einander ähnlich sind, so sind alle Durchmesser des einen proportional den parallelen Durchmessern des andern, weil die Rechtecke $OP . OQ$, $op . oq$ den Quadraten der parallelen Durchmesser proportional sind. (Art. 112.)



242. **Die Bedingung zu suchen, unter welcher zwei Kegelschnitte, die durch die allgemeinen Gleichungen bestimmt sind, ähnlich und in ähnlicher Lage sind.** Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in das Centrum des ersten Kegelschnitts verlegt wird, so ist nach Art. 163 das Quadrat des Radius vector für einen Punkt des ersten Kegelschnitts einer durch $a_{11} \cos^2 \theta + 2 a_{12} \cos \theta \sin \theta + a_{22} \sin^2 \theta$ dividirten Constanten gleich, und in derselben Art ist das Quadrat des parallelen Halbdurchmessers des zweiten gleich einer andern Constanten dividirt durch $a_{11}' \cos^2 \theta + 2 a_{12}' \cos \theta \sin \theta + a_{22}' \sin^2 \theta$.

Das Verhältniss beider ist also von θ unabhängig für $\frac{a_{11}}{a_{11}'} = \frac{a_{12}}{a_{12}'} = \frac{a_{22}}{a_{22}'}$.

Zwei Kegelschnitte sind demnach ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in beiden übereinstim-

men oder nur durch einen constanten Factor verschieden sind.

243. Es ist offenbar, dass die Richtungen der Axen solcher ähnlicher Kegelschnitte dieselben sein müssen, weil die grössten und kleinsten Durchmesser des einen parallel den grössten und kleinsten Durchmessern des andern sind. Wenn der Durchmesser des einen unendlich wird, so muss auch der parallele Durchmesser des andern unendlich werden, d. h. die Asymptoten von ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln sind parallel. Dasselbe folgt aus dem Resultat des letzten Artikels, weil (Art. 164) die Richtungen der Asymptoten vollständig durch die höchsten Glieder der Gleichung bestimmt sind.

Aehnliche Kegelschnitte haben dieselbe Excentricität, denn $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ muss $= \frac{m^2 a^2 - m^2 b^2}{m^2 a^2}$ sein. Aehnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte können also auch als solche definirt werden, deren Axen parallel sind und welche dieselbe Excentricität haben.

Wenn zwei Hyperbeln parallele Asymptoten haben, so sind sie ähnlich, denn ihre Axen müssen parallel sein, weil sie die Winkel zwischen den Asymptoten halbiren (Art. 103), und die Excentricität hängt nur von dem Winkel ab, den die Asymptoten einschliessen. (Art. 175.)

244. Da die Excentricität aller Parabeln dieselbe, nämlich die Einheit ist, so sind alle Parabeln ähnlich und ähnlich gelegen, deren Axen dieselbe Richtung haben. In der That, da die Gleichung einer Parabel auf ihren Scheitel bezogen $y^2 = px$ oder $\varrho = \frac{p \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ ist, so steht jeder Radius vector der einen Parabel zu dem ihm parallelen der andern in dem constanten Verhältniss $p : p'$.

Aufg. 1. Wenn in einem durch den festen Punkt O gezogenen Radius vector eines Kegelschnitts OQ in einem constanten Verhältniss zu OP genommen wird, den Ort von Q zu bestimmen.

Wir haben in die Polargleichung nur $m\varrho$ für ϱ zu substituiren, und der Ort wird als ein dem ersten Kegelschnitt ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt gefunden.

Der Punkt O kann das Centrum der Aehnlichkeit beider Kegelschnitte genannt werden; und es ist offenbar (s. auch Art. 145) der Punkt, wo sich gemeinschaftliche Tangenten der zwei Kegelschnitte durch-

schneiden; weil, wenn die Radien vectoren OP, OP' zum ersten Kegelschnitt gleich werden, auch OQ, OQ', die Radien vectoren des andern, gleich werden müssen.

Aufg. 2. Wenn durch ein Centrum der Aehnlichkeit zweier ähnlicher Kegelschnitte ein Paar Radien vectoren gezogen werden, so sind die Verbindungssehnen ihrer Endpunkte entweder parallel oder sie durchschneiden sich in der Radicalaxe der Kegelschnitte.

Diess wird genau wie in Art. 146 bewiesen.

Aufg. 3. Die dreien ähnlichen Kegelschnitten entsprechenden sechs Centra der Aehnlichkeit liegen zu dreien in vier geraden Linien. (Art. 147.)

Aufg. 4. Wenn eine gerade Linie zwei ähnliche und concentrische Kegelschnitte schneidet, so sind die zwischen den Kegelschnitten enthaltenen Abschnitte gleich.

Jede Sehne des äussern Kegelschnitts, welche den innern berührt, wird im Berührungspunkte halbirt.

Diess wird in derselben Art bewiesen, wie die Sätze der Art. 204, 205 bewiesen wurden, welche specielle Fälle des gegenwärtigen Satzes sind; denn die Asymptoten einer Hyperbel können als ein zu ihr ähnlicher Kegelschnitt betrachtet werden, weil die höchsten Glieder in der Gleichung der Asymptoten dieselben, wie die in der Gleichung der Curve sind.

Aufg. 5. Wenn eine Tangente in V, dem Scheitel der innern von zwei concentrischen und ähnlichen Ellipsen, die äussere in den Punkten T und T' schneidet, so ist jede durch V gezogene Sehne der innern die Hälfte der algebraischen Summe der parallelen Sehnen der äussern durch T und T'.

Aufg. 6. Der Ort, welchen die Schwerpunkte aller der Dreiecke bestimmen, die durch die Brennpunkte und einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnitts gebildet werden, ist ein dem gegebenen ähnlicher und concentrischer Kegelschnitt.

245. Zwei Figuren sind **ähnlich, obwohl nicht in ähnlicher Lage**, wenn die proportionalen Radien einen constanten Winkel mit einander machen, anstatt parallel zu sein; so dass, wenn wir die eine der Figuren um diesen Winkel gedreht denken, sie beide dann ähnlich und ähnlich gelegen sein werden.

Die Bedingung zu finden, unter welcher zwei durch die allgemeinen Gleichungen gegebene Kegelschnitte ähnlich sind, ohne in ähnlicher Lage zu sein.

Wir haben nur die erste Gleichung zu Axen zu transformiren, welche mit den gegebenen irgend einen Winkel θ machen und zu untersuchen, ob dem θ ein Werth beigelegt werden kann, welcher die neuen Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} den alten $a_{11}', a_{12}', a_{22}'$ proportional macht. Sei $a_{11} = ma_{11}'$, $a_{12} = ma_{12}'$, $a_{22} = ma_{22}'$, so sahen wir für rectanguläre Axen im Artikel 165, dass die

Grössen $a_{11} + a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ durch Transformation der Coordinaten unverändert bleiben, und dass also $a_{11}+a_{22}=m(a_{11}'+a_{22}')$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = m^2(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2)$ ist.

Demnach ist die geforderte Bedingung

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22})^2} = \frac{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2}{(a_{11}' + a_{22}')^2}.$$

Für schiefe Axen findet man in derselben Art nach Artikel 166 die Bedingung der Aehnlichkeit

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)^2} = \frac{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2}{(a_{11}' + a_{22}' - 2a_{12}'\cos\omega)^2}.$$

Aus den Artikeln 87, 164 geht als die geometrische Bedeutung der gefundenen Bedingung hervor, dass der Winkel zwischen den reellen oder imaginären Asymptoten der einen Curve gleich dem Winkel ist, welcher von denen der andern gebildet wird.

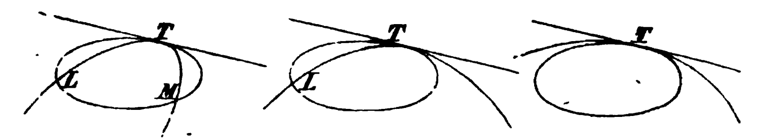
246. Zwei Curven von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung respective durchschneiden einander in mn Punkten. Denn wenn man x oder y zwischen den Gleichungen m^{ten} und n^{ten} Grades eliminirt, welche die Curven darstellen, so ist die dadurch entstehende Gleichung in der einen noch darin erscheinenden Veränderlichen vom Grade mn. („Vorlesungen" Art. 32.) Wenn in Folge des Verschwindens von einem oder mehreren Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen die resultirende Gleichung unter den Grad mn herabgeht, so sind die beiden Curven noch immer als in mn Punkten sich durchschneidend zu betrachten, von welchen Punkten jedoch einer oder mehrere im Unendlichen liegen. (Vergl. Art. 94.) Wenn so die unendlich entfernten, wie die imaginären Punkte stets mit berücksichtigt werden, so ist es wahr, dass die zwei Curven einander stets in mn Punkten durchschneiden. Insbesondere schneiden sich zwei Kegelschnitte immer in vier Punkten. Im nächsten Kapitel werden wir einige der Fälle betrachten, in welchen Durchschnittspunkte von zwei Kegelschnitten in unendlicher Entfernung sind; gegenwärtig sollen die Fälle betrachtet werden, wo zwei oder mehrere von ihnen zusammenfallen.

Weil zwischen vier Punkten sechs Gerade gezogen werden können, nämlich 12, 34; 13, 24; 14, 23, so sagen wir: Zwei Kegelschnitte haben drei Paare von Durchschnittssehnen.

247. Wenn zwei der Durchschnittspunkte zusammenfallen, so

berühren die Kegelschnitte einander und die gerade Verbindungslinie der zusammenfallenden Punkte ist ihre gemeinschaftliche Tangente. Die Kegelschnitte schneiden einander in diesem Falle in zwei reellen oder imaginären Punkten L, M, welche vom Berührungspunkte verschieden sind.

Die Berührung der Kegelschnitte ist eine Berührung der zweiten Ordnung, wenn drei ihrer Durchschnittspunkte zusammenfallen. In diesem Falle muss einer der Punkte L, M mit T zusammenfallen; z. B. wenn der Punkt M sich zum Zusammenfallen mit T bewegt.



Curven, welche eine höhere Berührung als der ersten Ordnung haben, heissen osculirende Curven und man erkennt, dass Kegelschnitte, welche osculiren, einander in einem andern Punkte schneiden.

Die Berührung zweier Kegelschnitte ist die möglichst engste, wenn sie vier auf einander folgende Punkte gemeinschaftlich haben. In diesem Falle muss die Linie LM mit der Tangente in T zusammenfallen. Die Curven haben eine Berührung der dritten Ordnung, wenn sie vier auf einander folgende Punkte gemein haben. Und da zwei Kegelschnitte nicht mehr als vier Punkte mit einander gemein haben können, so ist diess die höchste Ordnung der Berührung, welche zwischen zwei verschiedenen Kegelschnitten stattfinden kann.

So sind z. B. die Gleichungen von zwei Kegelschnitten, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen und die Axe x zur gemeinschaftlichen Tangente haben (Art. 104),

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$
$$a_{11}'x^2 + 2a_{12}'xy + a_{22}'y^2 + 2a_{13}'x = 0.$$

Und wie in Aufg. 2, Art. 189 ist

$$x\left\{(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})x + 2(a_{12}a_{22}' - a_{12}'a_{22})y + 2(a_{13}a_{22}' - a_{13}'a_{22})\right\} = 0$$

die Gleichung eines durch ihre vier Durchschnittspunkte gehenden Ortes. Der erste Factor stellt aber die durch die beiden zusammenfallenden Schnittpunkte gehende Tangente dar; der zweite bezeichnet somit die durch die beiden andern Schnittpunkte ge-

hende Gerade LM. Für $a_{13}a_{22}' = a_{13}'a_{22}$ geht auch LM durch den Anfangspunkt der Coordinaten, die Kegelschnitte haben also eine Berührung zweiter Ordnung mit einander. Wenn überdiess noch $a_{12}a_{22}' = a_{12}'a_{22}$ ist, so reducirt sich die Gleichung von LM auf $x=0$, LM fällt mit der gemeinschaftlichen Tangente zusammen und die Kegelschnitte haben eine Berührung dritter Ordnung mit einander. Wenn wir in diesem letztern Falle durch Multiplication die Coefficienten von y^2 in beiden Gleichungen identisch machen, so werden auch die Coefficienten von xy und von x einander gleich und die Gleichungen beider Kegelschnitte reduciren sich auf die Form $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$,

$$a_{11}'x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

248. Zwei Kegelschnitte können eine doppelte Berührung mit einander haben, wenn die Durchschnittspunkte 1, 2 und wieder auch 3, 4 zusammenfallen. Die Bedingung, unter welcher das im vorigen Artikel betrachtete Paar von Kegelschnitten sich noch in einem zweiten Punkte berührt, wird gefunden, indem man die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Linie LM, deren Gleichung dort gegeben ist, jeden der beiden Kegelschnitte berührt. Oder einfacher wie folgt: Man multiplicirt die Gleichungen respective mit a_{13}' und a_{13} und subtrahirt; der Rest

$$(a_{11}a_{13}' - a_{11}'a_{13})x^2 + 2(a_{12}a_{13}' - a_{12}'a_{13})xy + (a_{22}a_{13}' - a_{22}'a_{13})y^2 = 0$$

bezeichnet das Paar von Geraden, welches den Anfangspunkt der Coordinaten mit den Durchschnittspunkten L und M der beiden Kegelschnitte verbindet. Diese Geraden fallen aber zusammen, wenn $(a_{11}a_{13}' - a_{11}'a_{13})(a_{22}a_{13}' - a_{22}'a_{13}) = (a_{12}a_{13}' - a_{12}'a_{13})^2$ ist.

249. Da nun ein Kegelschnitt so bestimmt werden kann, dass er fünf gegebenen Bedingungen genügt (Art. 92), so kann ein Kegelschnitt immer gefunden werden, der einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte berührt und drei andere Bedingungen erfüllt. Soll er in dem gegebenen Punkte eine Berührung zweiter Ordnung mit ihm haben, so kann er dabei zwei andere Bedingungen erfüllen; und für eine Berührung dritter Ordnung erübrigt die Erfüllung einer weitern Bedingung. So kann stets eine Parabel gefunden werden, die im Anfangspunkt der Coordinaten eine Berührung dritter Ordnung mit dem Kegelschnitt $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ hat. Nach den letzten zwei Gleichungen des Art. 247 erhellt, dass man nur a_{11}' statt a_{11} zu setzen hat, wo a_{11}' durch die Relation $a_{11}'a_{22} = a_{12}^2$ bestimmt ist.

Wir können im Allgemeinen keinen Kreis beschreiben, der eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt besitzt, weil zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, damit diese Gleichung einen Kreis repräsentire; oder in andern Worten, wir können durch vier auf einander folgende Punkte eines Kegelschnitts keinen Kreis beschreiben, weil zur Bestimmung des Kreises drei Punkte hinreichen. Die Gleichung des durch drei auf einander folgende Punkte der Curve gehenden Kreises kann man aber leicht finden.

Man nennt diesen Kreis den osculirenden oder den Krümmungskreis der Curve.

Für die Kegelschnittsgleichung wie vorher $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$ und unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten ist die Gleichung eines im Anfangspunkt die Curve berührenden Kreises (Art. 119, Aufg. 3) $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 - 2r\sin\omega\, y = 0$, und die Bedingung, dass dieser Kreis osculirend sei (Art. 247), ist

$$a_{13} = -r a_{22}\sin\omega, \text{ oder } r = \frac{-a_{13}}{a_{22}\sin\omega} \text{ *)}.$$

Die Grösse r wird der Krümmungsradius des Kegelschnitts im Punkte T genannt.

250. Den Krümmungsradius in einem Punkte eines Centralkegelschnitts zu bestimmen.

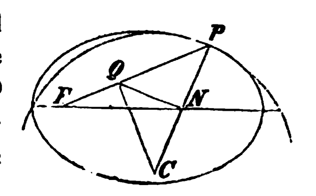
Um die Formel des letzten Artikels anzuwenden, muss die Tangente in diesem Punkte zur Axe der y gemacht werden. Nun ist die auf den Durchmesser des Punktes und den zu ihm conjugirten bezogene Gleichung $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ zu parallelen Axen durch den Punkt selbst transformirt durch die Substitution

*) In den folgenden Beispielen bestimmen wir die absolute Grösse des Krümmungsradius ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen. Das Zeichen giebt wie gewöhnlich den Sinn an, in welchem der Krümmungsradius gemessen ist. Denn es entscheidet, ob die gegebene Curve durch einen Kreis von der Gleichungsform $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 \mp 2rx\sin\omega = 0$ berührt wird, dessen Centrum in der positiven Axe der x oder dessen Centrum in der negativen Axe der x liegt (unteres Zeichen). Die Formel des Textes giebt daher einen positiven Krümmungsradius, wenn die Concavität der Curve nach dem positiven Sinne der Axe der x und einen negativen, wenn sie im entgegengesetzten Sinne gerichtet ist.

$x + a'$ für x und wird somit $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{2x}{a'} = 0$. Nach dem letzten Artikel ist daher der Krümmungsradius $= \frac{b'^2}{a' \sin \omega}$. Aber $a' \sin \omega$ ist die senkrechte Entfernung des Centrums von der Tangente, der Krümmungsradius also $= \frac{b'^2}{p}$ oder (Art. 183) $= \frac{b'^3}{ab}$.

251. Dieser Ausdruck liefert eine einfache **Construction für den Krümmungs-Radius**, der einem beliebigen Punkte der Ellipse entspricht.

Wir zeigten im Artikel 189, dass die Länge der Normale $= \frac{bb'}{a}$ und im Art. 196, dass $\cos \psi = \frac{b}{b'}$ ist, wenn ψ der vom Brennstrahl mit der Normale gebildete Winkel ist; diess gestaltet den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser um in $r = \frac{N}{\cos^2 \psi}$. Wenn wir daher eine Senkrechte zur Normale in dem Punkte errichten, wo sie die Axe schneidet, und ferner im Punkt Q, in welchem diese Senkrechte den Brennstrahl trifft, CQ senkrecht zu ihm bis zur Normale ziehen, so ist C das Centrum der Krümmung und CP der Krümmungs-Radius.



252. Eine andre Construction kann auf die Bemerkung gegründet werden, **dass die Durchschnittssehnen eines Kreises mit einem Kegelschnitt mit der Axe des letztern gleiche Winkel bilden.** Denn weil die Rechtecke unter den Segmenten der Sehnen gleich sind (Eukl. III, 35), so sind es auch die parallelen Durchmesser des Kegelschnitts (Artikel 112) und dieselben machen also mit der Axe gleiche Winkel. (Art. 170.) Nun ist in dem Falle des Krümmungskreises die Tangente in T (Fig. p. 266) die eine und die Linie TL die andre Durchschnittssehne; man hat daher nur TL so zu ziehen, dass sie mit der Axe den nämlichen Winkel, wie mit der Tangente bildet; alsdann ist der durch die Punkte P und L beschriebene Kreis, welcher den Kegelschnitt in T berührt, der Krümmungskreis.

Diese Construction zeigt, **dass der in einem Scheitel der Curve osculirende Kreis eine Berührung der dritten Ordnung mit ihr hat.**

Aufg. 1. Man soll unter Anwendung der Bezeichnungsweise des excentrischen Winkels die Bedingung aufstellen, unter welcher vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in einem Kreise liegen.

Die Sehne, welche zwei der Punkte verbindet, muss mit einer Seite der Axe denselben Winkel machen, wie die die beiden andern verbindende Sehne mit der andern; die Sehnen sind durch

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta),$$

repräsentirt, und man hat somit $\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tan\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=0$, d. i. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$, oder $=2m\pi$.

Aufg. 2. Bestimme die Coordinaten des Punktes, in welchem der osculirende Kreis den Kegelschnitt ferner schneidet.

Wir haben $\alpha=\beta=\gamma$, also $\delta=-3\alpha$, oder $X=\frac{4x'^3}{a^2}-3x'$, und $Y=\frac{4y'^3}{b^2}-3y'$.

Aufg. 3. Drei Punkte eines Kegelschnitts, deren osculirende Kreise durch einen gegebenen Punkt der Curve gehen, liegen in einem Kreise, welcher diesen Punkt enthält und bilden ein Dreieck, für welches das Centrum der Curve der Durchschnittspunkt der Seitenhalbirungslinien ist.

Aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt δ der osculirenden Kreise folgt nach der letzten Aufgabe zur Bestimmung des Berührungspunktes $\alpha=-\frac{\delta}{3}$, und da der sinus und cosinus von δ unverändert bleiben, wenn δ um 360^0 vermehrt wird, so ergiebt sich ebenso $\alpha=-\frac{\delta}{3}+120^0$, $\alpha=-\frac{\delta}{3}+240^0$. Nach der ersten Aufgabe liegen diese drei Punkte in einem durch δ gehenden Kreise.

Wenn wir in der letzten Aufgabe X, Y als gegeben voraussetzen, so ist, weil den x', y' bestimmenden cubischen Gleichungen die zweiten Glieder fehlen, die Summe der drei Werthe von x und y respective gleich, und daher ist nach der 4. Aufgabe des Art. 7 der Anfangspunkt der Coordinaten der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Seiten des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks. Wir erkennen auch, dass die Normalen in diesen Punkten die drei Höhen des Dreiecks sind und dass sie sich daher in einem Punkte schneiden. Das Dreieck der drei Punkte hat constante Fläche für alle Punkte derselben Ellipse. (Aufg. 6, Art. 239.)

253. Den Krümmungs-Radius der Parabel zu bestimmen.

Aus der auf einen Durchmesser und die Tangente bezogenen Gleichung der Parabel finden wir durch dieselbe Methode, wie in Art. 249, $r=\frac{p'}{2\sin\theta}$ (für θ als den Winkel der Axen), oder weil (Art. 220, 221) $N=\frac{p'}{2}\sin\theta$, $r=\frac{N}{\sin^2\theta}=\frac{N}{\cos^2\psi}$, da $\psi=90^0-\theta$

ist (Art. 225); die in dem letzten Artikel angegebene Construction bleibt daher auch für die Parabel gültig.

Aufg. 1. In allen Kegelschnitten ist der Krümmungs-Radius gleich dem Quotienten aus dem Cubus der Normale und dem Quadrat des Halbdurchmessers.

Aufg. 2. Drücke den Krümmungs-Radius einer Ellipse in Function des Winkels aus, welchen die Normale mit der Axe einschliesst.

Aufg. 3. Bestimme die Längen der Sehnen des Krümmungskreises, welche durch das Centrum oder den Brennpunkt eines Centralkegelschnitts gehen.

Aufl. $\frac{2b'^2}{a'}$ und $\frac{2b'^2}{a}$.

Aufg. 4. Die Brennpunktssehne des Krümmungskreises für einen Punkt im Kegelschnitt ist einer Brennpunkts-Sehne des Kegelschnitts gleich, welche der Tangente in dem Punkte parallel gezogen ist.

Aufg. 5. In der Parabel ist die Brennpunkts-Sehne des Krümmungskreises dem Parameter des durch den Punkt gehenden Durchmessers gleich.

254. Die Coordinaten des Krümmungs-Centrums für einen Centralkegelschnitt zu bestimmen.

Sie werden gefunden, indem man von den Coordinaten des Punktes im Kegelschnitt die Projectionen des Krümmungshalbmessers auf die Coordinatenaxen abzieht. Nun ist offenbar, dass dieser Radius zu seiner Projection in demselben Verhältniss steht, wie die Normale zur Ordinate y. Wir erhalten daher die Projection des Krümmungsradius auf die Axe der y, indem wir den Radius $\frac{b'^2}{p}$ durch $\frac{y'}{N}$ multipliciren, $= \frac{b'^2 y'}{b^2}$; die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist daher $= \frac{b^2 - b'^2}{b^2} y'$, d. i. weil $b'^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y'^2$ ist, $Y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y'^3$. In gleicher Art ergiebt sich seine Abscisse

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x'^3.$$

Wir würden dieselben Werthe erhalten haben, indem wir in Artikel 239, Aufg. 8, $\alpha = \beta = \gamma$ in die für die Coordinaten des Centrums erhaltenen Ausdrücke substituirten.

Wir bemerken ferner, dass das Centrum des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises der Durchschnitt der Senkrechten ist, welche auf den Seiten in ihren Mittelpunkten errichtet werden; dass also, wenn das Dreieck durch drei auf einander folgende Punkte der Curve gebildet wird, zwei seiner Seiten auf einander folgende

Tangenten der Curve und die Senkrechten zu ihnen die entsprechenden Normalen sind. Das Centrum der Krümmung irgend einer Curve ist daher der Durchschnittspunkt von zwei auf einander folgenden Normalen.

Wenn wir in der Aufgabe 4 des Artikel 189 $x' = x'' = X$, $y' = y'' = Y$ einsetzen, so erhalten wir in der That dieselben Werthe, wie die eben bestimmten.

255. Die Coordinaten des Krümmungs-Centrums bei der Parabel zu bestimmen.

Die Projection des Krümmungshalbmessers auf die Axe der y wird wie vorher durch Multiplication seiner Länge $\frac{N}{\sin^2\theta}$ mit $\frac{y'}{N}$ gefunden, und ist also $= \frac{y'}{\sin^2\theta}$; indem wir diese Grösse von y' abziehen, erhalten wir die Ordinate $Y = -\frac{y'}{\tan^2\theta} = -\frac{4y'^3}{p^2}$ (Art. 220). Ebenso ergiebt sich die Abscisse $X = x' + \frac{p}{2\sin^2\theta} = x' + \frac{p+4x'}{2}$. Dieselben Werthe können aus der Auflösung der 10. Aufgabe des Art. 235 abgeleitet werden.

256. Die Evolute einer Curve ist der Ort der Krümmungs-Centra ihrer verschiedenen Punkte.

Um die Evolute eines Centralkegelschnitts zu finden, würden wir die Coordinaten x', y' durch diejenigen (x, y) des Krümmungsmittelpunktes ausdrücken und die erhaltenen Werthe in die Gleichung der Curve substituiren; wir erhielten so (indem wir $\frac{c^2}{a} = A$, $\frac{c^2}{b} = B$ schreiben) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{B^{\frac{2}{3}}} = 1$. Ebenso wird die Gleichung der Evolute der Parabel gefunden $27py^2 = 16(x - \frac{1}{2}p)^3$; man nennt diese Curve die semicubische oder auch die Neil'sche Parabel.

Vierzehntes Kapitel.

Die Methode des Unendlich-Kleinen.

257. Die Differential-Rechnung erlaubt auf sehr einfache Weise die Bestimmung der Tangenten der Curven und die der Grösse ihrer Flächen und der Länge ihrer Bögen. Obgleich wir von ihrer Symbolik und ihren Grundbegriffen in diesem Werke weiterhin mehrfachen Gebrauch machen, so wollen wir doch einige der angedeuteten Fragen, insofern sie sich eben nur auf Kegelschnitte beziehen, hier ohne ihre directe Vermittelung behandeln, um eine Idee von der Methode zu geben, nach der solche Fragen vor der Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung behandelt wurden.

Wir geben damit zugleich ihren analytischen Begriffen die geometrische Basis. Und die geometrische Methode, welche wir zu erläutern gedenken, besitzt in Bezug auf manche Fragen vor der Analysis den Vorzug der Einfachheit und Strenge; sie hat noch in neuester Zeit zu einzelnen schönen Ergebnissen geführt (vergleiche Artikel 272), welche bei der Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung nicht gefunden worden waren.

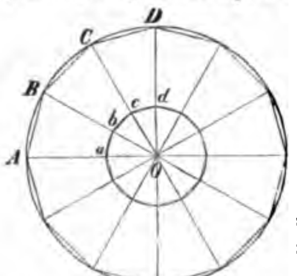
Wenn ein Polygon von gleichen Seiten einer Curve eingeschrieben ist, so nähert sich augenscheinlich der Inhalt und Umfang des Polygons um so mehr der Gleichheit mit dem Inhalt und Umfang der Curve, je grösser die Zahl der Seiten des Polygons und je kleiner damit jede einzelne Seite desselben wird; gleichzeitig nähert sich jede Seite des Polygons mehr und mehr dem Zusammenfallen mit der Tangente der Curve in dem Punkte, in welchem sie dieselbe schneidet. Wenn die Zahl der Seiten unendlich gross und die Länge jeder einzelnen Seite unendlich klein geworden ist, so fällt das Polygon mit der Curve zusammen, und die Tangente derselben in jedem ihrer Punkte wird mit der geraden Verbindungslinie zweier unendlich nahe benachbarter Punkte in ihr identisch.

Ebenso nähert sich Inhalt und Umfang eines umgeschriebenen Polygons dem Inhalt und Umfang der Curve um so mehr, je

grösser die Zahl seiner Seiten und je kleiner jede einzelne Seite wird; und gleichzeitig nähert sich der Durchschnittspunkt zweier benachbarter Seiten um so mehr dem Berührungspunkt einer jeden derselben. Man kann daher zur Untersuchung des Inhalts und Umfangs einer Curve für dieselbe ein eingeschriebenes oder umgeschriebenes Polygon substituiren, dessen Seitenanzahl unendlich gross und dessen Seiten unendlich klein sind, und man kann jede Tangente der Curve als die gerade Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte der Curve, und jeden Punkt der Curve als den Durchschnittspunkt zweier unendlich nahen Tangenten derselben betrachten.

258. Beisp. 1. Die **Richtung der Tangente in einem Punkte des Kreises zu bestimmen.**

Wir denken ein eingeschriebenes reguläres Polygon. Auf jedes der gleichseitigen Dreiecke, in welche es durch die nach seinen Ecken gehenden Radien zerlegt wird, lässt sich dann die Bemerkung anwenden, dass der Basiswinkel OBA um die Hälfte des Winkels an der Spitze kleiner ist als ein rechter Winkel. Wenn alsdann die Zahl der Seiten des Polygons als unendlich gross gedacht wird, so dass jede einzelne unendlich klein sein muss, so wird der Winkel an der Spitze jedes dieser Dreiecke kleiner als jeder angebbare Winkel, und **die Tangente des Kreises bildet daher mit dem Radius des Berührungspunktes einen rechten Winkel.**



Es bietet sich häufig die Gelegenheit zur Anwendung eines Princips dar, welches hierin mit enthalten ist, nämlich, **dass zwei unendlich nahe gerade Linien von gleicher Länge zu der geraden Linie rechtwinklig sind, welche ihre Endpunkte verbindet.**

Beisp. 2. **Die Umfänge zweier Kreise stehen in dem Verhältniss ihrer Radien.**

Wenn reguläre Polygone von gleicher Anzahl der Seiten in beide Kreise eingeschrieben werden, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke des einen mit denen des andern, dass ihre Basen ab und AB in dem Verhältniss der Radien beider Kreise stehen und daraus, dass die Umfänge beider Polygone und folg-

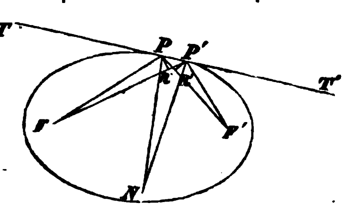
lich auch die beider Kreise als die Summen solcher Seiten, wenn ihre Anzahl unendlich gross gedacht wird, in demselben Verhältniss stehen.

Beisp. 3. Der Inhalt eines Kreises ist dem Producte aus dem Halbmesser in den halben Umfang desselben gleich.

Denn der Inhalt jedes der Dreiecke OAB, welche in den vorigen Aufgaben betrachtet worden sind, ist das Product aus der Hälfte seiner Basis in die vom Centrum auf dieselbe gefällte Senkrechte; somit ist der Inhalt jedes der betrachteten regulären Polygone gleich der mit der senkrechten Entfernung einer Seite desselben multiplicirten halben Summe seiner Seiten. Mit der Vermehrung ihrer Anzahl nähert sich ohne Ende der Umfang des Polygons dem Umfang des Kreises und jene senkrechte Entfernung einer Seite dem Halbmesser des Kreises, so dass die Differenz zwischen beiden kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden kann. Demnach ist das ausgesprochene Resultat richtig oder der Inhalt eines Kreises wird durch πr^2 ausgedrückt.

259. Beisp. 1. Die Richtung der Tangente in einem Punkte der Ellipse zu bestimmen.

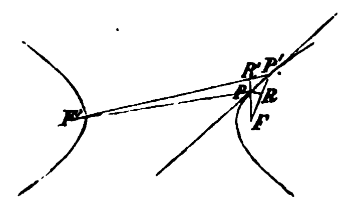
Man bezeichne durch P und P' zwei unendlich nahe Punkte der Curve, so dass man hat $FP + PF' = FP' + P'F'$. Nimmt man dann $FR = FP$ und $F'R' = F'P'$, so ist $P'R = PR'$. Die beiden Dreiecke PRP' und $PR'P'$ besitzen die gemeinschaftliche Basis PP', die gleichen Katheten $P'R$ und PR' und nach dem Princip des Art. 258 die rechten Winkel PRP' und $PR'P'$; in Folge dessen ist $\angle PP'R = \angle P'PR'$. Unter der Voraussetzung, welche wir gemacht haben, dass die Punkte P und P' unendlich nahe sind, ist $\angle TPF = \angle PP'F$, weil ihre Differenz unter jeden angebbaren Winkel herabgebracht werden kann; demnach hat man $\angle TPF = \angle P'PF'$, oder die Brennstrahlen des Berührungspunktes machen gleiche Winkel mit der Tangente.



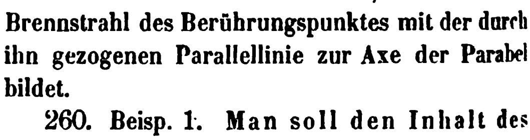
Beisp. 2. Man soll die Richtung der Tangente in einem Punkte der Hyperbel bestimmen.

Wir haben bei der nämlichen Construction wie vorher $F'P' - F'P = FP' - FP$, oder $P'R = P'R'$. Demnach ist

$\angle PP'R = \angle PP'R'$ oder die Tangente ist die innere Halbirungslinie des Winkels zwischen den Brennstrahlen des Berührungspunktes.



Beisp. 3. In derselben Art bestimmen wir die Richtung der Tangente in einem Punkte der Parabel; denn wir haben $FP = PN$ und $FP' = P'N'$; also $P'R = P'S$ oder $\angle N'P'P = \angle FP'P$. Die Tangente halbirt daher den Winkel FPN, welchen der Brennstrahl des Berührungspunktes mit der durch ihn gezogenen Parallellinie zur Axe der Parabel bildet.

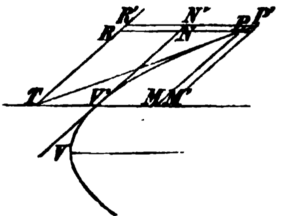


260. Beisp. 1. Man soll den Inhalt des parabolischen Sectors FVP bestimmen.

Weil $PS = PR$ und $PN = FP$ ist, so ist die Fläche des Dreiecks FPR die Hälfte des Parallelogramms $PSNN'$. Wenn wir eine Anzahl von Punkten P', P'', u. s. w. zwischen V und P nehmen, so wird die Summe aller der entsprechenden Parallelogramme $PSNN'$ u. s. w. der Gleichheit mit dem Inhalte der Fläche $DVPN$ um so mehr genähert, je näher die einzelnen Punkte P einander sind; ebenso die Summe aller Dreiecke FPR der Gleichheit mit dem Inhalte der Fläche des Sectors VFP. Demnach ist der Inhalt des Sectors PFV die Hälfte des Inhalts von $DVPN$ und somit ein Drittheil des Vierecks $DFPN$.

Beisp. 2. Durch analoge Betrachtungen bestimmt man den Inhalt des durch eine beliebige gerade Linie abgeschnittenen Segments einer Parabel.

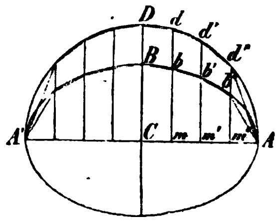
Man zieht den Durchmesser der Parabel, welcher diese gerade Linie halbirt; dann ist in der Figur das Parallelogramm von der Diagonale PR' dem Parallelogramm von der Diagonale PM' flächengleich, wie aus ihrer Beziehung zu dem Parallelogramm $TM'P'R'$ und seiner Diagonale TP' hervorgeht. Die Seite TM ist aber durch die Curve in V halbirt, und das Parallelogramm von der Diagonale PN' ist demnach die Hälfte von dem über PR'; wenn wir daher eine



Anzahl von Punkten P, P', P'', u. s. w. in der Curve wählen, so ist die Summe der Flächen aller Parallelogramme wie PM' doppelt so gross, wie die Summe aller Parallelogramme wie PN', und demnach zuletzt der Inhalt der Fläche $V'PM$ das Doppelte von dem Inhalt der Fläche $V'PN$, d. i. der Inhalt des parabolischen Segments $V'PM$ steht zu dem Inhalt des Parallelogramms $V'NPM$ in dem Verhältniss von $2:3$.

261. Beisp. 1. Der Inhalt einer Ellipse ist gleich demjenigen eines Kreises, dessen Halbmesser das geometrische Mittel zwischen den Halbaxen der Ellipse ist.

Denn theilt man die Ellipse und den über ihrer grossen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreis durch Parallelen zur kleinen Axe in schmale Flächenstreifen, so ist wegen der Relationen $mb : md = m'b' : m'd' = b : a$ das Viereck $mbb'm'$ zu dem Viereck $mdd'm'$ auch in dem Verhältniss $b:a$, und demnach die Summe aller Vierecke der einen Reihe, d. h. das der Ellipse eingeschriebene Polygon $CBbb'b''A$, zu dem entsprechenden dem Kreis eingeschriebenen Polygon $CDdd'd''A$ in dem nämlichen Verhältniss. Diese Proportionalität besteht für jede Anzahl der Seiten, welche man den beiden Polygonen geben kann; lassen wir demnach diese Anzahl unbegrenzt wachsen und gleichzeitig alle einzelnen Seiten unbegrenzt abnehmen, so erkennen wir, dass der Inhalt der Ellipse zu dem des Kreises in dem Verhältniss $b:a$ steht, so dass der Inhalt der Ellipse durch den Ausdruck πab bestimmt wird.



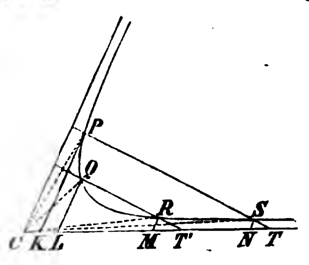
Man beweist durch dieselben Betrachtungen, dass die Flächen zweier Figuren, deren correspondirende Ordinaten zu einander in einem bestimmten Verhältniss stehen, das nämliche Verhältniss haben.

Beisp. 2. Jeder Durchmesser eines Kegelschnitts halbirt die Curve.

Die Richtigkeit des Satzes erhellt sofort aus der Betrachtung der Trapeze, in welche die dem Durchmesser entsprechenden Ordinaten die Fläche der Curve zerlegen; weil der Durchmesser alle ihm entsprechende Ordinaten halbirt, so halbirt er auch diese Trapeze und demnach die Curve, weil die Fläche derselben der

Summe dieser Trapeze gleich ist, sobald man die Ordinaten als unendlich nahe benachbart voraussetzt.

262. Beisp. 1. **Der Inhalt des Sectors einer Hyperbel, welcher durch die geraden Verbindungslinien zweier ihrer Punkte mit dem Centrum begrenzt wird, ist dem Inhalt des Segments gleich, welches durch Parallelen zu den Asymptoten von denselben Punkten aus bestimmt wird.**



Denn wegen der Gleichheit der Dreiecke PKC und QLC ist auch die Fläche PQC gleich der Fläche $PQKL$.

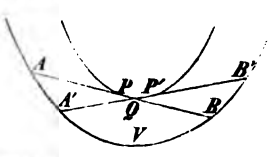
Beisp. 2. **Zwei beliebige Segmente $PQKL$ und $RSMN$ sind gleich, wenn $PK:QL = RM:SN$ ist.** Denn $PK:QL = CL:CK$, und nach Art. 205 $CL = MT'$, $CK = NT$; also $RM:SN = MT':NT$, somit QR parallel zu PT.

Nun kann leicht gezeigt werden, dass die Sectoren PCQ und RCS einander gleich sind, weil der PS und QR halbirende Durchmesser sowohl den hyperbolischen Inhalt $PQRS$ als auch die Dreiecke PCS und QCR halbirt.

Setzen wir voraus, dass die Punkte Q und R zusammenfallen, so sehen wir, dass jeder Inhalt $PKNS$ halbirt werden kann, indem man die Ordinate QL verzeichnet, welche das geometrische Mittel zwischen den Ordinaten seiner Endpunkte ist.

Und wenn eine Anzahl von Ordinaten bestimmt wird, deren Längen eine stetige geometrische Proportion bilden, so ist der von irgend zweien benachbarten unter ihnen begrenzte Inhalt von constanter Grösse.

263. **Wenn zwei Kegelschnitte ähnlich, ähnlich gelegen und concentrisch sind, so schneidet jede Tangente des inneren von beiden ein Segment von constanter Fläche von dem äusseren ab.**



In der 4. Aufgabe des Art. 244 ward bewiesen, dass eine solche Tangente im Berührungspunkte halbirt ist. Wenn wir demnach irgend zwei Tangenten dieser Art betrachten, so ist $\angle AQA' = \angle BQB'$ und je näher wir den Punkt Q bei dem Punkte P gelegen vor-

aussetzen, desto näher kommen die Seiten AQ, $A'Q$ der Gleichheit mit den Seiten BQ, $B'Q$; daher werden die Dreiecke AQA' und BQB' inhaltsgleich, wenn wir die beiden Tangenten als unendlich nahe betrachten, und die Fläche AVB ist der Fläche $A'VB'$ gleich. Weil endlich diese Fläche beim Uebergang von einer Tangente zur nächstbenachbarten unverändert bleibt, so bleibt sie es für jede beliebige Lage der begrenzenden Tangente.

Man kann in derselben Art den umgekehrten Satz beweisen, dass die Tangente einer Curve im Berührungspunkt halbirt werden muss, wenn sie in jeder ihrer Lagen eine constante Fläche von einer andern Curve abschneidet, und es gilt allgemein für jede Curve, dass der abgeschnittene Flächeninhalt constant ist, wenn die Tangente in jeder ihrer Lagen im Berührungspunkt halbirt wird.

Darnach lässt sich leicht die Aufgabe lösen: Man soll durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts eine gerade Linie so ziehen, dass sie den Minimal-Inhalt von demselben abschneide.

Wäre verlangt, dass die gesuchte gerade Linie einen gegebenen Inhalt abschneide, so hätte man durch den Punkt zu einem bestimmten ähnlichen und ähnlich gelegenen, concentrischen Kegelschnitt eine Tangente zu ziehen; mit dem abzuschneidenden Inhalt müsste die Entfernung zwischen beiden Kegelschnitten wachsen. Wenn dieser zweite innere Kegelschnitt durch den gegebenen Punkt selbst geht, so wird der abgeschnittene Inhalt am kleinsten, und weil dann die gerade Linie als Tangente der Curve in dem gegebenen Punkte halbirt wird, so hat man die gerade Linie, welche den Minimal-Inhalt abschneiden soll, nur so durch den gegebenen Punkt zu ziehen, dass sie in ihm halbirt wird.

Das nämliche Gesetz gilt für jede Curve.

Durch analoge Betrachtungen können die beiden folgenden Sätze leicht genug bewiesen werden: 1.) Wenn die Tangente AB einer Curve einen Bogen von constanter Länge von einer anderen Curve abschneidet, so wird sie in ihrem Berührungspunkte so getheilt, dass ihre Abschnitte AP und BP in dem umgekehrten Verhältniss der Tangenten der letztern Curve in A und B stehen. 2.) Wenn die Tangente AB von einer constanten Länge ist, und wenn die vom Durchschnittspunkt der in A

und B an die äussere Curve gezogenen Tangenten auf AB gefällte Senkrechte sie in M trifft, so ist stets $AP = MB$.

264. **Den Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkte einer Ellipse zu bestimmen.**

Weil der Mittelpunkt des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises der Durchschnittspunkt der auf seinen Seiten in den Mittelpunkten derselben errichteten Perpendikel ist, so ist das Centrum des durch drei auf einander folgende Punkte einer Curve gehenden Kreises der Durchschnittspunkt zweier auf einander folgenden Normalen der Curve.

Betrachten wir also zwei Dreiecke FPF' und $FP'F'$ und bezeichnen die Halbirungslinien ihrer Winkel an der Spitze durch PN, $P'N$, so beweisen wir leicht elementar-geometrisch, dass $2\angle PNP' = \angle PFP' + \angle PF'P'$ ist.

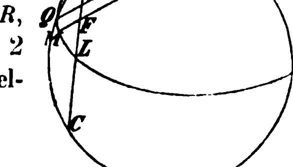
Weil nun der Bogen eines Kreises dem Radius desselben und der Grösse des Winkels proportional ist, welchen er am Centrum desselben spannt, so wird der Winkel PNP' durch $\frac{PP'}{PN}$ gemessen, wenn wir den Bogen PP' als Bogen des Kreises vom Centrum N betrachten. Ebenso wird für $FR = FP$, $\angle PFP'$ durch $\frac{PR}{FP}$ gemessen, und wir erhalten $\frac{2\,PP'}{PN} = \frac{PR}{FP} + \frac{P'R'}{F'P'}$; wenn wir den Winkel $PP'F$ durch θ bezeichnen, so ist $PR = P'R' = PP' \sin\theta$, und indem wir $PN = R$, $FP = \varrho$ und $F'P = \varrho'$ setzen, $\frac{2}{R\sin\theta} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$. Man erkennt daraus, dass die Focalsehne der Krümmung für einen Punkt der Ellipse das Doppelte des harmonischen Mittels zwischen den Brennstrahlen desselben ist.

Indem man für $\sin\theta$ den Werth $\frac{b}{b'}$, für $\varrho + \varrho'$ den Werth $2a$ und für $\varrho\varrho'$ den Werth b'^2 einsetzt, erhält man den bekannten Ausdruck $R = \frac{b'^3}{ab}$. Der Krümmungsradius der Hyperbel wird auf

eine ganz ähnliche Weise ermittelt. In dem Falle der Parabel ist ϱ' unendlich gross und daher $\frac{2}{R \sin \theta} = \frac{1}{\varrho}$.

Ein interessantes Ergebniss in Bezug auf die Focalsehne der Krümmung eines Kegelschnitts erhalten wir durch die folgende einfache Betrachtnng.

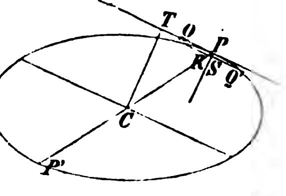
Wir ziehen in dem betrachteten Kegelschnitt eine Sehne QR parallel zu der Tangente im Punkte P, beschreiben den durch die Punkte P, Q und R bestimmten Kreis und verlängern die Focalsehne PL des Kegelschnitts, bis sie demselben zum zweiten Male in C begegnet. Dann ist nach einer Eigenschaft des Kreises $PS.SC = QS.SR$, und nach einer im Art. 201, Aufg. 2 gegebenen Eigenschaft der Kegelschnitte



$$PS \,.\, SL : QS \,.\, SR = PL : MN.$$

Daher ist für jeden so beschriebenen Kreis $SC : SL = MN : PL$. Da aber für den Krümmungskreis die Punkte S und P zusammenfallen, so ist für ihn speciell $PC : PL = MN : PL$ oder $PC = MN$, d. i. **für einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts ist die Focalsehne der Krümmung derjenigen Focalsehne des Kegelschnitts gleich, welche der Tangente jenes Punktes parallel ist.** (Art. 253, Aufg. 4.)

265. Der Krümmungs-Radius eines Central-Kegelschnitts kann auch noch wie folgt gefunden werden:



Wenn Q ein dem Punkte P unendlich naher Punkt der Curve ist, und QR eine Parallele zur Tangente der Curve in P darstellt, welche die dem Punkte P entsprechende Normale in S schneidet, wenn man dann durch die Punkte P und Q einen Kreis beschreibt, welcher die Tangente PT in P berührt, so ist QS eine Ordinate des Kreises für den Durchmesser PS desselben und daher das Rechteck aus diesem Durchmesser und dem Abschnitt PS gleich dem Quadrat über der Sehne PQ, oder der Krümmungshalbmesser des Punktes P

$= \frac{PQ^2}{2PS}$. Da aber QR stets der Tangente parallel ist, so wird für unendlich nahe benachbarte Punkte P und Q $PQ = QR$, und weil nach einer Eigenschaft der Ellipse unter der Voraussetzung, dass a' und b' den dem Punkte P entsprechenden Durchmesser PP' und seinen conjugirten bezeichnen,

$$b'^2 : a'^2 = QR^2 : PR . RP' = QR^2 : 2a' . PR$$

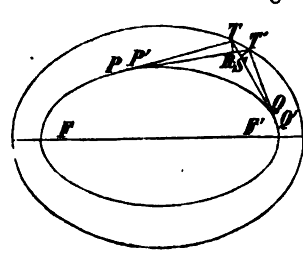
ist, $$QR^2 = \frac{2b'^2 . PR}{a'}.$$

Der Krümmungsradius ist demnach $= \frac{b^2}{a'} . \frac{PR}{PS}$.

Das Verhältniss $PR : PS$ ist aber durch die Aehnlichkeit der Dreiecke PRS und CPT stets $= CP : CT = a' : p$, und daher der Krümmungs-Radius endlich $= \frac{b'^2}{p}$.

Es ist nicht schwer, zu beweisen, dass im Durchschnittspunkt zweier confocalen Kegelschnitte das Centrum der Krümmung des einen stets der Pol seiner Tangente in Bezug auf den andern ist.

266. Wenn von einem beliebigen Punkte einer Ellipse an eine confocale Ellipse zwei Tangenten gezogen sind, so ist der Ueberschuss der Summe dieser Tangenten über den zwischen ihren Berührungspunkten enthaltenen Bogen der Ellipse constant.



Denn wenn wir einen dem ersten T unendlich nahen Punkt T' in der Curve wählen, und die Perpendikel TR, $T'S$ fällen, so ist

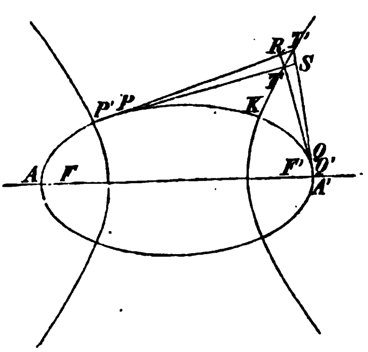
$$PT = PR = PP' + P'R,$$

weil $P'R$ als die Verlängerung der geraden Linie PP' angesehen werden kann; ebenso $Q'T' = QQ' + QS$. Wegen der Gleichheit der Winkel $TT'R$ und $T'TS$ (Art. 197) ist ferner $TS = T'R$ und daher $PT + TQ' = PT' + T'Q'$. Also

$$(PT + TQ) - (P'T' + T'Q') = PP' - QQ' = PQ - P'Q'.$$

Derselbe Satz gilt für jedes Paar von Curven, welche durch die Eigenschaft verbunden sind, dass die von einem Punkte der äusseren ausgehenden Tangenten TP, TQ der innern mit der Tangente TT' der ersteren in jenem Punkte gleiche Winkel bilden.

267. **Wenn von einem beliebigen Punkte einer Hyperbel an eine mit ihr confocale Ellipse Tangenten gezogen werden, so ist die Differenz der Bögen PK, QK immer gleich der Differenz der Tangenten TP und TQ.**



Man erkennt genau, wie vorher, dass

$$(T'P'-P'K)-(TP-PK)=T'R$$

und $(T'Q'-Q'K)-(TQ-QK)$

$$=T'S=T'R$$

ist (weil nach Art. 197 TT' den Winkel $RT'S$ halbirt).

Somit ist die Differenz zwischen den Ueberschüssen von TP über PK und von TQ über QK constant; und da sie in dem speciellen Falle, in welchem T mit K zusammenfällt, Null ist, weil beide Ueberschüsse selbst Null sind, so muss sie in jedem Falle Null sein, d. h. es ist stets $TP - PK = TQ - QK$.

Der Satz von Fagnano, **dass ein elliptischer Quadrant so getheilt werden kann, dass die Differenz seiner Theile der Differenz der Halbaxen der Ellipse gleich ist**, folgt unmittelbar aus dem vorigen; denn man hat dazu nur in den Endpunkten der Axen Tangenten an die Ellipse zu ziehen und durch ihren Durchschnittspunkt eine mit der Ellipse confocale Hyperbel zu legen, dann ist der Punkt K, in welchem sie die Ellipse schneidet, der gesuchte Theilpunkt. Seine Coordinaten sind

$$x^2=\frac{a^3}{a+b},\quad y^2=\frac{b^3}{a+b}.$$

268. **Wenn ein Polygon einem Kegelschnitt umgeschrieben ist und alle seine Eckpunkte bis auf einen sich in confocalen Kegelschnitten bewegen, so beschreibt auch der Ort dieses letzten Eckpunktes einen confocalen Kegelschnitt.**

Wir bemerken zuerst, dass, wenn die Spitze T eines einem Kegelschnitt umgeschriebenen Winkels PTQ sich auf einem confocalen Kegelschnitt bewegt, unter der Voraussetzung, dass a und b die zu TP und TQ parallelen Durchmesser und α und β die Winkel TPT' und $TQ'T'$ bezeichnen, welche jeder der Schenkel

jenes Winkels mit seiner nächstfolgenden Lage bildet, die Relation besteht $a\alpha = b\beta$. Denn nach Art. 266 ist $TR = T'S$.

Ferner ist $TR = TP.\alpha$, $T'S = T'Q'.\beta$ und TP und TQ sind den Durchmessern proportional, welchen sie parallel sind.

Wenn umgekehrt die Relation $a\alpha = b\beta$ erfüllt ist, so bewegt sich der Punkt T auf einem confocalen Kegelschnitt; denn indem wir die Aufeinanderfolge der einzelnen Schritte des Beweises umkehren, zeigen wir, dass $TR = T'S$ ist, dass demnach TT' mit TP und TQ gleiche Winkel macht und daher mit der Tangente des confocalen Kegelschnitts in T zusammenfällt, dass also T' in diesem Kegelschnitt liegt.

Wenn alsdann die den Seiten des Polygons parallelen Durchmesser durch a, b, c, u. s. w. bezeichnet werden, und d den zur letzten Seite desselben parallelen Durchmesser ausdrückt, wenn ferner α, β, γ, u. s. w., δ die dem Vorigen analog bezeichneten Winkel sind, so gelten die Relationen $a\alpha = b\beta$, $b\beta = c\gamma$, u. s. w., weil die sämmtlichen Ecken des Polygons bis auf eine sich in confocalen Kegelschnitten bewegen. Aus dieser Kette von Relationen ergiebt sich aber schliesslich $a\alpha = d\delta$, welche anzeigt, dass die letzte Ecke desselben auch einen confocalen Kegelschnitt durchläuft.

Fünfzehntes Kapitel.

Vom Gebrauch der abkürzenden Symbolik in der Theorie der Kegelschnitte.

---

269. Nachdem in den vorhergehenden Kapiteln überall nur die Cartesische Coordinaten-Methode gebraucht worden ist, wiederholen wir nun den Entwickelungsgang des vierten Kapitels an dem umfassendern Object der Gleichungen vom zweiten Grade, um uns dadurch endlich in den vollständigen Besitz der allgemeinen Hilfsmittel und Gesichtspunkte zu setzen, welche dort entwickelt worden sind. Wir zeigen wieder zuerst die Anwendung und den grossen Nutzen einer abkürzenden Symbolik.

Wenn durch $S=0$, $S'=0$ die Gleichungen von zwei Kegelschnitten dargestellt werden, so kann die Gleichung jedes dritten Kegelschnitts, welcher die vier gemeinschaftlichen reellen oder imaginären Punkte derselben enthält, in der Form $S=kS'$ ausgedrückt werden. Denn die Form dieser Gleichung zeigt (Art. 40), dass sie einen durch die vier gemeinschaftlichen Punkte von $S=0$, $S'=0$ gehenden Kegelschnitt darstellt und die Constante k kann so bestimmt werden, dass die Gleichung $S=kS'$ durch die Coordinaten irgend eines fünften Punktes befriedigt wird*). Diess bleibt unverändert wahr, wenn eine der Grössen S oder S' oder wenn beide in lineare Factoren zerlegbar gedacht werden. Wenn also $L=0$, $M=0$ die Gleichungen von geraden Linien sind, so stellt $S=kLM$, als durch die Coordinaten der vier Punkte befriedigt, welche die Geraden $L=0$, $M=0$ mit dem Kegelschnitt $S=0$ gemein haben, einen Kegelschnitt dar, welcher durch die vier Punkte geht, in denen diese Geraden den Kegelschnitt treffen; oder in andern Worten einen Kegelschnitt, welcher die Geraden $L=0$, $M=0$ zu Sehnen seines Durchschnitts mit dem Kegelschnitt $S=0$ hat. Wenn eine der Linien $L=0$, $M=0$ den Kegelschnitt $S=0$ nicht in reellen Punkten schneidet, so muss sie doch als eine Sehne des imaginären Durchschnitts betrachtet werden, und behält manche wichtige Beziehungen zu beiden Curven, wie diess im Falle des Kreises schon früher (Art. 137) gezeigt worden ist. Endlich bezeichnet $LM=kNP$ einen Kegelschnitt, welcher dem Viereck der Geraden $L=0$, $N=0$, $M=0$, $P=0$ umgeschrieben ist, wie diess schon im Art. 152 gezeigt ward**). Offenbar ist auch die Wahrheit dieser Schlüsse nicht,

*) Da fünf Bedingungen einen Kegelschnitt bestimmen, so muss die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts, welcher vier Bedingungen unterworfen ist, eine unabhängige Constante enthalten, deren Werth so lange unbestimmt bleibt, als nicht eine fünfte Bedingung gegeben ist. In derselben Art enthält die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts, welcher drei Bedingungen unterliegt, zwei unabhängige Constante etc. Die Gleichungen des Kegelschnitts durch drei Punkte und des von drei Geraden berührten Kegelschnitts in den Art. 154, 159 geben dazu Beispiele.

**) Wenn $L=0$, $M=0$ das eine und $N=0$, $P=0$ ein anderes Paar der Sehnen ist, welche vier Punkte in der Peripherie des Kegelschnitts verbinden, so ist es gleichgültig, ob die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts durch diese vier Punkte in der Form $S-kLM=0$

wie es im Art. 53 für die Bezeichnung durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ geschah, auf die Voraussetzung eingeschränkt, dass $L = 0$ eine auf die Form $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ gebrachte Gleichung sei; die hier benutzten Gründe bleiben für die allgemeine Gleichung der Geraden unverändert gültig.

Aufg. Wenn drei Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ gegeben sind und zwei andere $S_1' = 0$, $S_1'' = 0$ durch die respective dem ersten und zweiten und dem ersten und dritten von ihnen gemeinsamen Punkte gelegt werden, so liegen die vier gemeinsamen Punkte dieser Letztern und die des Paares $S' = 0$, $S'' = 0$ auf einem und demselben Kegelschnitt.

Denn die Gleichungen der Kegelschnitte S_1', S_1'' sind $S + kS' = 0$, $S + k_1 S'' = 0$ und ein durch ihre Schnittpunkte gehender Kegelschnitt hat eine Gleichung von der Form $S + kS' + k_2(S + k_1 S'') = 0$; für $k_2 = -1$ reducirt sich aber diese auf $kS' - k_1 S'' = 0$, d. h. stellt einen Kegelschnitt dar, der auch die gemeinsamen Punkte von $S' = 0$, $S'' = 0$ enthält. Man schliesst daraus, dass drei Kegelschnitte durch einen Punkt, welche durch die respectiven Schnittpunkte der aus $S' = 0$, $S'' = 0$, $S = 0$ gebildeten Paare hindurch gehen, selbst ausser jenem Punkte noch drei Punkte gemein haben; dass für drei demselben Viereck umgeschriebene Kegelschnitte S', S'', S''' und einen Kegelschnitt S die Schnittpunkte von zwei durch die S' und S einerseits und S'' und S andrerseits gemeinsame Punkte gelegten Kegelschnitten S_1', S_1'' mit den Schnittpunkten von S und S''' auf demselben Kegelschnitte liegen; endlich dass drei durch denselben Punkt gehende Kegelschnitte S_1', S_1'', S_1''', welche respective die drei Gruppen der Schnittpunkte von S', S'', S''' mit S enthalten, ausser ihm noch drei Punkte gemeinsam haben. Durch Specialisirung lassen sich zahlreiche weitere Sätze daraus ableiten.

270. Es giebt drei Werthe von k, für welche $S - kS' = 0$ ein Paar von geraden Linien darstellt. Denn die Bedingung, unter welcher diess stattfindet, wird gefunden, indem man in

$$a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0$$

oder $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ für a_{11}, a_{12}, etc. Die Werthe $a_{11} - ka_{11}'$, $a_{12} - ka_{12}'$, etc. substituirt, und das Resultat dieser Substitution ist offenbar in k vom dritten Grade und es wird durch drei Werthe von k befriedigt. Wenn also die Wurzeln dieser cubischen Gleichung in k durch k', k'', k''' bezeichnet werden, so

---

oder in den Formen $S - kNP = 0$, $LM - kNP = 0$ dargestellt wird, weil in Folge des allgemeinen Princips der Kegelschnitt $S = 0$ selbst in der Form $LM - kNP = 0$ erscheint.

repräsentiren $S - k'S' = 0$, $S - k''S' = 0$, $S - k'''S' = 0$ die drei Paare von Sehnen, welche zwischen den vier Durchschnittspunkten beider Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ gezogen werden können. (Art. 246.)

Aufg. 1. Welches ist die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die Schnittpunkte des Kegelschnitts $S=0$ mit den Coordinatenaxen geht?

Hier sind die Axen $x = 0$, $y=0$ die Durchschnittssehnen und die Gleichung muss also von der Form $S = kxy$ sein, wo k unbestimmt ist. (Aufg. 1, Art. 114.)

Aufg. 2. Man bestimme die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch fünf gegebene Punkte geht.

Nachdem man die Gleichungen der Seiten des durch vier dieser Punkte gebildeten Vierecks bestimmt hat, ist die Gleichung des Kegelschnitts in der Form $LM = kNP$ aus ihnen zusammengesetzt und die Substitution der Coordinaten des fünften Punktes liefert eine lineare Gleichung zur Bestimmung von k. Die Gleichung des durch die Punkte (1, 2), (3, 5), (−1, 4), (−3, −1), (−4, 3) gehenden Kegelschnitts erhalten wir also in der Form

$$(3x - 2y + 1)(5x - 2y + 13) = k\,(x - 4y + 17)(3x - 4y + 5),$$

und da diese Gleichung überdiess durch die Coordinaten (−4, 3) des fünften Punktes erfüllt sein muss, so wird $k = -\frac{221}{19}$ und durch Einsetzen die Gleichung des Kegelschnitts

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = 0.$$

271. Die Kegelschnitte $S = 0$, $S - kLM = 0$ berühren einander, d. h. zwei ihrer Durchschnittspunkte fallen zusammen, wenn entweder eine der Geraden $L = 0$, $M = 0$ den Kegelschnitt $S=0$ berührt, oder wenn $L = 0$, $M = 0$ sich in einem Punkte von $S = 0$ durchschneiden. Wenn also $T = 0$ die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts $S = 0$ in einem gegebenen Punkte (x', y') desselben ist, so ist $S = T(lx + my + n)$ die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts, welcher $S = 0$ im Punkte $x'y'$ berührt; und wenn drei weitere Bedingungen gegeben sind, so kann die Bestimmung des Kegelschnitts durch die Ermittelung von l, m, n vollendet werden.

Wenn die Gerade $lx + my + n = 0$ durch den Punkt (x', y') geht, so fallen drei von den vier Schnittpunkten zusammen; die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts, welcher den Kegelschnitt $S=0$ im Punkte $x'y'$ osculirt, ist also $S = T\{l(x - x') + m(y - y')\}$; und wenn verlangt wäre, insbesondere die Gleichung des osculirenden Kreises zu bestimmen, so haben wir nur auszudrücken, dass der Coefficient von xy aus dieser Gleichung verschwindet,

und dass die Coefficienten von x^2 und y^2 in ihr einander gleich sind, und erhalten die Werthe von l und m aus diesen Bedingungsgleichungen.

Die beiden Kegelschnitte haben endlich vier zusammenfallende Punkte mit einander gemein, wenn die Geraden $lx + my + n = 0$ und $T = 0$ zusammenfallen, und die allgemeine Gleichung des zweiten Kegelschnitts ist daher dann $S = kT^2$. (Vergl. Art. 247.)

Aufg. 1. Wenn die Axen des Kegelschnitts $S = 0$ zu denen des Kegelschnitts $S' = 0$ parallel sind, so haben auch die Axen von $S - kS' = 0$ dieselbe Richtung.

Denn für Coordinatenaxen, welche den Axen von $S = 0$ parallel sind, enthalten in diesem Falle weder S noch S' das Glied xy. Wenn $S' = 0$ einen Kreis darstellt, so sind die Axen von $S - kS' = 0$ denen von $S = 0$ parallel; wenn insbesondere $S - kS' = 0$ ein Paar von geraden Linien repräsentirt, so treten die Halbirungslinien der zwei von ihnen gebildeten Winkel als Axen auf und wir erhalten den Satz des Art. 252.

Aufg. 2. Wenn die Coordinatenaxen den Axen von $S = 0$ und denen von $S - kLM = 0$ parallel sind, so sind L und M Trinome von der Form $lx + my + n$, $lx - my + n'$.

Aufg. 3. Man soll die Gleichung des osculirenden Kreises für einen Centralkegelschnitt entwickeln.

Die Gleichung muss nach dem Vorigen von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)\left\{l(x - x') + m(y - y')\right\}$$

sein; indem wir ausdrücken, dass der Coefficient von xy in ihr verschwindet, reducirt sie sich auf die Form

$$l\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right),$$

und mittelst der Bedingung, dass der Coefficient von x^2 mit dem von y^2 gleich sei, ergiebt sich $l = \frac{b'^2}{b^2 - a^2}$ und die Gleichung wird

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a^2 - b^2)x'^3x}{a^4} - \frac{2(b^2 - a^2)y'^3y}{b^4} + a'^2 - 2b'^2 = 0.$$

Aufg. 4. Man bestimme die Gleichung des osculirenden Kreises für die Parabel. Sie ist

$$(p^2 + 4px')(y^2 - px) = \left\{2yy' - p(x + x')\right\}\left\{2yy' + p(x - 3x')\right\}.$$

272. Wir sahen, dass $S = kLM$ einen durch die vier Punkte P, Q, p, q gehenden Kegelschnitt repräsentirt, in denen der Kegelschnitt $S = 0$ von den Geraden $L = 0$, $M = 0$ geschnitten wird, und es ist offenbar, dass die Punkte P und q, Q und q respective um so näher zusammenfallen, je näher die Linien $L = 0$, $M = 0$ einander sind. Decken sich diese Linien, so fällt auch p auf P,

y auf Q und der zweite Kegelschnitt berührt den ersten in den Punkten P und Q; daher repräsentirt die Gleichung $S = kL^2$ einen Kegelschnitt, der mit $S = 0$ in der gemeinsamen Sehne $L = 0$ eine doppelte Berührung hat. Wenn die Gerade $L = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ nicht schneidet, so ist sie doch als eine Sehne der imaginären Berührung von $S = 0$ mit $S - kL^2 = 0$ zu betrachten. Ebenso repräsentirt $LN + kM^2 = 0$ einen Kegelschnitt, der die Geraden $L = 0$, $N = 0$ in den Punkten berührt, in welchen sie von den Geraden $M = 0$ geschnitten werden, wie diess schon im Art. 152 gezeigt ist. Die Gleichung eines Kegelschnitts, der mit $S = 0$ in den beiden Punkten $x'y'$, $x''y''$ eine doppelte Berührung hat, kann auch in der Form $S = kT'T''$ dargestellt werden, wenn $T' = 0$, $T'' = 0$ die Tangenten von $S = 0$ in diesen Punkten ausdrücken.

273. Wenn die Gerade $L = 0$ einer Asymptote des Kegelschnitts $S = 0$ parallel ist, so ist sie auch einer Asymptote jedes durch die Gleichung $S = kLM$ darstellbaren Kegelschnitts parallel. Diese Gleichung bezeichnet dann ein System von Kegelschnitten, welches durch vier Punkte geht, von denen einer unendlich entfernt ist. Wenn aber ausserdem auch $M = 0$ zur andern Asymptote des Kegelschnitts parallel wäre, so würde das System durch vier Punkte gehen, von denen zwei unendlich entfernt sind. Andere Formen der Gleichungen von Kegelschnitten, welche unendlich ferne gemeinsame Punkte besitzen, erhält man auf Grund des Princips im Art. 68, wonach die Gleichung einer unendlich fernen Geraden die Form $0x + 0y + C = 0$ hat, und des Artikel 69, wonach eine dem Anschein nach nicht homogene Gleichung in die homogene Form übergeführt werden kann, indem man in jedem der Glieder von einem geringern als dem der Gleichung selbst entsprechenden Grade eine oder mehrere der multiplicirenden Constanten durch $(0x + 0y + C)$ ersetzt denkt. So erkennt man die Gleichung eines auf seine Asymptoten bezogenen Kegelschnitts $xy = k^2$ (Art. 207) als einen besondern Fall der Gleichung $LN = M^2$, d. h. von der Gleichung eines Kegelschnitts, der $L = 0$, $N = 0$ zu Tangenten und $M = 0$ zur entsprechenden Berührungssehne hat; denn indem man die Gleichung in der Form $xy = (0x + 0y + k)^2$ schreibt, erhellt, dass $x = 0$, $y = 0$ Tangenten der Curve sind, deren Berührungspunkte in unendlicher Entfernung liegen. (Art. 164.)

274. Auch die Gleichung der Parabel ist ein specieller Fall

der Form $LN = M^2$. Wenn man ihr die Form $x(0x + 0y + p) = y^2$ giebt, so lehrt sie nicht nur, dass die Gerade $x = 0$ die Curve in dem Punkte berührt, in welchem sie von $y = 0$ geschnitten wird, sondern auch dass die unendlich entfernte gerade Linie die Curve gleichfalls in einem Punkte der Linie $y = 0$ berührt. Dieselben Beziehungen lehrt auch die allgemeine Gleichung der Parabel $(\alpha x + \beta y)^2 + (2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33})(0x + 0y + 1) = 0$; denn sie zeigt, dass die Gerade $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ und die unendlich entfernte Gerade Tangenten der Curve sind, und dass der Durchmesser $\alpha x + \beta y = 0$ die zugehörige Berührungssehne ist. **Jede Parabel besitzt also eine ganz in unendlicher Ferne gelegene Tangente.** In der That ist die Gleichung ein vollständiges Quadrat, welche die Lage der unendlich entfernten Punkte der Parabel bestimmt (Art. 96), diese Punkte fallen in einen Punkt zusammen und die unendlich entfernte Gerade ihrer Ebene ist als eine Tangente derselben zu betrachten. (Art. 104.)

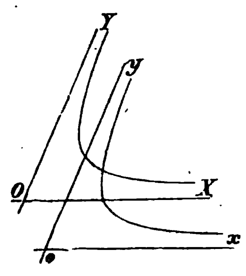
Aufg. Die allgemeine Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

kann als von der Form $LN = kMP$ betrachtet werden (Art. 152); denn das Trinom der ersten Glieder derselben bezeichnet gleich Null gesetzt ein Paar von Geraden $L = 0$, $N = 0$, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogen sind; das der Letzten hingegen bezeichnet ebenso die unendlich entfernte Gerade $M = 0$ und eine Gerade $P = 0$ oder $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Die Form der Gleichung aber beweist, dass die Geraden $L = 0$, $N = 0$ die Curve in unendlicher Form treffen und dass $P = 0$ die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte ist.

275. In Uebereinstimmung mit Art. 272 ist die Gleichung $S = kM$ als ein besonderer Fall der Form $S = MP$ zu betrachten und bezeichnet somit ein System von Kegelschnitten, welche durch die zwei endlichen Schnittpunkte von $M = 0$ und $S = 0$ und durch die unendlich entfernten Punkte gehen, in welchen $S = 0$ und $0x + 0y + k = 0$ sich schneiden. Offenbar sind aber die Coefficienten von x^2, von xy und y^2 in den Ausdrücken $S = 0$ und $S - kM = 0$ identisch und es bezeichnen also nach Art. 245 diese Gleichungen ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte. **Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte haben zwei unendlich entfernte Punkte gemein und können sich daher nur in zwei endlich angebbaren Punkten schneiden.** Wenn die betrachteten Curven Hyperbeln

sind, so ist diess auch geometrisch evident, denn nach Art. 243 sind die Asymptoten ähnlich gelegener Curven einander parallel, d. h. sie durchschneiden einander in unendlicher Ferne; da die Asymptoten aber die Curven selbst in unendlicher Ferne treffen, so ist der unendlich entfernte Schnittpunkt von zwei parallelen Asymptoten ein gemeinschaftlicher Punkt beider Curven. So sind in der Figur die unendlich entfernten Schnittpunkte der Linien OX, Ox und OY, Oy den Curven gemein; dieselbe zeigt auch einen ihrer endlich entfernten Schnittpunkte, während der andere den entgegengesetzten Aesten der Hyperbeln angehört.



Wenn die Curven Ellipsen sind, so treten imaginäre an Stelle der reellen Asymptoten. Aber die Lage der unendlich entfernten Punkte von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen wird durch dieselbe Gleichung $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ (Art. 95, 242) bestimmt und wenn gleich die Wurzeln dieser Gleichung imaginär sind, so sind es doch in beiden Fällen dieselben imaginären Wurzeln; wir schliessen daraus, dass zwei ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen durch dieselben zwei imaginären unendlich entfernten Punkte gehen. Es ward schon vorher bemerkt, dass, auch wenn die Gerade $L = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ nicht in reellen Punkten schneidet, sie doch als eine Sehne des imaginären Durchschnitts der Curven $S = 0$ und $S - kLM = 0$ angesehen werden muss, und diess bleibt unverändert wahr, wenn die Gerade $L = 0$ unendlich entfernt ist.

Wenn die Curven Parabeln sind, so werden beide durch die unendlich entfernte gerade Linie berührt; die Richtung, in welcher der unendlich entfernte Berührungspunkt liegt, ist die Richtung der Durchmesser (Art. 96) und daher für zwei ähnlich gelegene ähnliche Parabeln die nämliche (Art. 244). Also berühren einander zwei ähnlich gelegene ähnliche Parabeln in ihrem unendlich entfernten Punkte. In Summa: Die gemeinschaftlichen unendlich entfernten Punkte von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten sind reell, imaginär oder fallen in einen Punkt zusammen, jenachdem diese Kegelschnitte Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln sind.

276. Die Gleichung $S = k$ oder $S = k(0x + 0y + 1)^2$ ist offenbar auch ein specieller Fall der Gleichung $S = kL^2$ und bezeichnet daher nach Art. 272 einen Kegelschnitt, der mit $S = 0$ eine doppelte Berührung hat, für welche die Berührungssehne unendlich entfernt ist. Wenn aber die Gleichungen von zwei Kegelschnitten nur im constanten Gliede differiren, so sind diese concentrisch, da die Coordinaten des Centrums c_{33} nicht enthalten (Art. 99); und weil die ersten drei Glieder in beiden Gleichungen übereinstimmen, so sind sie ähnlich und ähnlich gelegen. A e h n l i c h e ähnlich gelegene concentrische Kegelschnitte sind somit als solche zu betrachten, die einander in zwei Punkten in unendlicher Entfernung berühren. Diess folgt auch daraus, dass die betrachteten Curven nach dem letzten Art. durch dieselben beiden unendlich entfernten Punkte gehen; denn da sie auch die nämlichen reellen oder imaginären Asymptoten besitzen, so haben sie in jenen Punkten auch dieselben Tangenten, d. h. sie berühren einander in ihnen. Wenn insbesondere die durch $S = 0$, $S = k^2$ dargestellten Curven Parabeln sind, so haben sie nach Art. 271 in ihrem gemeinschaftlichen unendlich entfernten Punkte eine Berührung der dritten Ordnung. Zwei Parabeln, deren Gleichungen nur im constanten Gliede von einander verschieden sind, sind einander gleich, wie $y^2 = px$, $y^2 = p(x + n)$; im Art. 213 ist gezeigt worden, dass der Ausdruck für den Parameter der Parabel das absolute Glied nicht enthält. Die Parabeln $S = 0$, $S = k^2$ sind also einander gleich und wir lernen, dass zwei gleiche und ähnlich gelegene Parabeln von zusammenfallenden Axen mit einander in unendlicher Entfernung eine Berührung dritter Ordnung haben.

277. Weil alle Kreise als Curven, deren Gleichungen dieselben Glieder vom zweiten Grade enthalten, als ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen zu betrachten sind, so folgt aus dem letzten Art., dass alle Kreise durch dieselben zwei imaginären Punkte in unendlicher Entfernung gehen. Auch die allgemeine Gleichungsform des Kreises in Art. 158 zeigt das Nämliche direct; denn für den Durchschnitt der unendlich entfernten Geraden mit einem beliebigen Kreise erhält man nach ihr dieselben Punkte, welche dieselbe mit dem einem festen Dreieck umgeschriebenen Kreise gemein hat. Darum können

zwei Kreise einander immer nur in zwei angebbaren Punkten schneiden und durch drei Punkte seines Umfangs ist ein Kreis vollkommen bestimmt. Es ergiebt sich ferner, dass concentrische Kreise einander in zwei unendlich entfernten imaginären Punkten berühren; darum können solche sich nie in einem Punkte im endlichen Raume treffen und ist ein Kreis bei gegebenem Centrum durch einen Punkt der Peripherie bestimmt. Kreise, welche durch zwei feste Punkte gehen, sind als Kegelschnitte anzusehen, die vier Punkte enthalten, und Kreise überhaupt sind ein Specialfall von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten. Im weitern Verfolg werden wir finden, dass die in Art. 138 f. begründeten Sätze specielle Formen allgemeinerer Sätze über Systeme von Kegelschnitten durch vier Punkte sind.

278. Es ist wichtig, die Form $l^2L^2 + m^2M^2 = n^2N^2$ zu charakterisiren, welche einen Kegelschnitt bezeichnet, in Bezug auf den die Geraden $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die Seiten eines sich selbst conjugirten Dreiecks sind (Art. 130). Denn die Gleichung kann in den äquivalenten Formen

$$n^2N^2 - m^2M^2 = l^2L^2,\quad n^2N^2 - l^2L^2 = m^2M^2,\quad l^2L^2 + m^2M^2 = n^2N^2$$

geschrieben werden; die erste derselben zeigt, dass die geraden Linien $nN + mM = 0$, $nN - mM = 0$, welche sich im Punkte $M = 0$, $N = 0$ schneiden, Tangenten der Curve mit der entsprechenden Berührungssehne $L = 0$ sind, d. h. $M = 0$, $N = 0$ ist der Pol von $L = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt. Ebenso folgt aus der zweiten Form, dass $N = 0$, $L = 0$ der Pol von $M = 0$ ist; daher ist auch $L = 0$, $M = 0$ der Pol von $N = 0$. Und das Analoge ergiebt sich auch aus der dritten Form der Gleichung, nach der die Geraden $lL \pm imM = 0$ Tangenten der Curve für die Berührungssehne $N = 0$ sind; diese imaginären Geraden schneiden einander in dem reellen Punkte $L = 0$, $M = 0$, der somit der Pol von $N = 0$ ist; dieser Punkt liegt aber im Innern des Kegelschnitts und die von ihm ausgehenden Tangenten sind imaginär.

Man erkennt in gleicher Weise, dass

$a_{11}L^2 + 2a_{12}LM + a_{22}M^2 = a_{33}N^2$ einen Kegelschnitt bezeichnet, für welchen der Punkt $L = 0$, $M = 0$ der Pol der Geraden $N = 0$ ist; denn die linke Seite der Gleichung kann in das Product von zwei linearen Factoren aufgelöst werden, welche gleich Null gesetzt gerade Linien durch den Punkt $L = 0$, $M = 0$ darstellen.

279. **Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so gehen ihre Berührungssehnen mit diesem und eines von den drei Paaren der Durchschnittssehnen, die sie mit einander bestimmen, durch einen Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.**

Für $S = 0$ als die Gleichung des dritten Kegelschnitts sind $S + L^2 = 0$, $S + M^2 = 0$ die Gleichungen der beiden ersten Kegelschnitte und man erhält durch Subtraction derselben von einander als Gleichung der fraglichen Durchschnittssehnen $L^2 - M^2 = 0$; die Durchschnittssehnen $L \pm M = 0$ bilden also mit den Sehnen der Berührung $L = 0$, $M = 0$ ein harmonisches Büschel (Art. 56).

Aufg. 1. Wenn zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung sind, so schneiden sich die Sehnen, welche ein durch die Berührungspunkte willkürlich gelegter Kegelschnitt mit beiden bestimmt, auf der Berührungssehne.

Die Gleichungen $S = 0$, $S + L^2 = 0$, $S + LM = 0$ enthalten den Beweis. Insbesondere für Paare von geraden Linien durch die Berührungspunkte und für Hyperbeln mit denselben Asymptoten ergeben sich speciellere Sätze.

Aufg. 2. Die Berührungssehnen von zwei Kegelschnitten mit ihren gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch den Schnittpunkt eines Paares ihrer gemeinsamen Sehnen.

Wenn man den Kegelschnitt $S = 0$ als ein Paar von geraden Linien denkt, so erhält man diesen Satz als einen Specialfall des vorhergehenden.

Aufg. 3. Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen und die des entsprechenden ihm umgeschriebenen Vierecks bilden mit einander ein harmonisches Büschel.

Diess ist der specielle Fall von dem Satze des Art., in welchem die Kegelschnitte $S + L^2 = 0$, $S + M^2 = 0$ sich auf ein Paar von Geraden reduciren. Der Beweis kann aber für diesen Fall auch direct geführt werden wie folgt: Sind $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$, $t_4 = 0$ die Gleichungen von zwei Tangentenpaaren und $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ die der entsprechenden Berührungssehnen, d. h. der Diagonalen des entsprechenden eingeschriebenen Vierecks, so kann man die Gleichung des Kegelschnitts in jeder der Formen $t_1 t_2 - c_1^2 = 0$, $t_3 t_4 - c_2^2 = 0$ schreiben, die daher identisch oder nur um einen constanten Factor verschieden sind. Daraus entspringt die nothwendige Identität $t_1 t_2 - \lambda t_3 t_4 = c_1^2 - \lambda c_2^2$, in welchen die rechte Seite durch ihr Verschwinden ein Paar von geraden Linien ausdrückt, die mit $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ein harmonisches Büschel bilden, und deren linke Seite daher zeigt, dass diese Geraden die Punkte $t_1 = t_3 = 0$, $t_2 = t_4 = 0$ und $t_1 = t_4 = 0$, $t_2 = t_3 = 0$ mit einander verbinden.

Aufg. 4. Man soll die Gleichungen der Diagonalen des Vierecks

aufstellen, welches von den Tangenten eines Centralkegelschnitts in den vier Punkten gebildet wird, denen die excentrischen Winkel 2α, 2β, 2γ, 2δ entsprechen.

In diesem Falle ist

$t_1 = \frac{x}{a}\cos 2\alpha + \frac{y}{b}\sin 2\alpha - 1$, $t_2 = \frac{x}{a}\cos 2\beta + \frac{y}{b}\sin 2\beta - 1$;

$c_1 = \frac{x}{a}\cos(\alpha+\beta) + \frac{y}{b}\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$ und man findet leicht $t_1 t_2 - c_1^2 = -\sin^2(\alpha-\beta)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right\}$. Nach den Ergebnissen der letzten Aufgabe findet man somit als die Gleichungen der Diagonalen $\frac{c_1}{\sin(\alpha-\beta)} = \pm\frac{c_2}{\sin(\gamma-\delta)}$.

280. **Wenn drei Kegelschnitte in doppelter Berührung mit einem vierten Kegelschnitt sind, so gehen die sechs Durchschnittssehnen derselben viermal zu je dreien durch einen Punkt.**

Denn wenn die Gleichungen der Kegelschnitte von der Form $S + L^2 = 0$, $S + M^2 = 0$, $S + N^2 = 0$ sind, so sind

$L-M=0$, $M-N=0$, $N-L=0$; $L+M=0$, $M+N=0$, $N-L=0$;
$L+M=0$, $M-N=0$, $N+L=0$; $L-M=0$, $M+N=0$, $N+L=0$

die Gruppen der Gleichungen dieser Durchschnittssehnen. Wie im letzten Art. können specielle Fälle dieses Satzes gebildet werden, indem man voraussetzt, dass einer dieser Kegelschnitte oder mehrere von ihnen in gerade Linien zerfallen. So z. B. bezeichnet $S = 0$, wenn dieser Kegelschnitt in ein Paar Gerade degenerirt, zwei gemeinschaftliche Tangenten der Kegelschnitte $S + M^2 = 0$, $S + N^2 = 0$, und wenn $L = 0$ eine gerade Linie ausdrückt, die durch den Schnittpunkt dieser Tangenten geht, so zerfällt auch $S + L^2 = 0$ in gerade Linien und repräsentirt ein Paar von Geraden, die durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten gehen; d. h. **wenn man durch den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von zwei Kegelschnitten ein Paar von geraden Linien zieht, so schneiden sich die Sehnen jedes Kegelschnitts, welche seine Durchschnittspunkte mit diesen geraden Linien verbinden, in einer der gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte.** Diess ist die Erweiterung eines im Art. 146 bewiesenen Satzes und insbesondere liegt darin, dass Tangenten in den Schnittpunkten jener geraden Linien mit den Kegelschnitten an diese sich in einer der gemeinschaftlichen Sehnen durchschneiden.

281. Wenn die durch $S+L^2=0$, $S+M^2=0$, $S+N^2=0$ dargestellten Kegelschnitte sämmtlich in gerade Linien zerfallen, so bilden sie ein dem Kegelschnitt $S=0$ umgeschriebenes Sechsseit, die Durchschnittssehnen sind Diagonalen dieses Sechsseits und man erhält den Satz von Brianchon: In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsseit schneiden sich die drei geraden Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkte. Wenn die Seiten des Sechsseits der Reihe nach durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind, so sind die Verbindungslinien von (1, 2) mit (4, 5), von (2, 3) mit (5, 6) und von (3, 4) mit (6, 1) die im Satze bezeichneten. Durch Vertauschung der Ordnung der Seiten des Sechsseits lassen sich aber aus ihnen $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2}$, d. i. 60 verschiedene Sechsseite bilden und für jedes derselben ist der ausgesprochene Satz gültig. Der Beweis kann auch so wie in Art. 279, Aufg. 3 ausgedrückt werden; wenn $t_1t_4-c_1^2=0$, $t_2t_5-c_2^2=0$, $t_3t_6-c_3^2=0$ äquivalente Formen der Gleichung des Kegelschnitts $S=0$ sind, so stellen $c_1=c_2=c_3$ drei Diagonalen dar, die sich in einem Punkte durchschneiden. Da aber keine Regel gegeben ist, nach der die durch die Gleichung $c_1=+c_2$ dargestellte Diagonale des Vierseits $t_1t_4t_2t_5$ bestimmt werden kann, so beweist dieser Schluss nur diess, dass die Verbindungslinien der Punkte (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6) sich entweder in der Geraden (3, 4) (6, 1) oder in (1, 3) (4, 6) begegnen. Andere Beweise des Satzes werden diesen Zweifel beheben.

282. Der Satz von Brianchon erlaubt uns, aus fünf gegebenen Tangenten a, b, c, d, e eines Kegelschnitts denselben zu construiren. Denn wenn wir auf einer derselben a einen Punkt P annehmen, so können wir die zweite Tangente f des Kegelschnitts von P aus mit Hilfe dieses Satzes bestimmen. Nach demselben schneiden sich die Verbindungslinien der Punktepaare ab, de; bc, ef; cd, fa in einem Punkte O; nach der Voraussetzung sind die geraden Linien ab, de und cd, fa oder cd, P bekannt und somit auch der Schnittpunkt O derselben mit einander; zieht man daher die Gerade von ihm nach dem Punkte bc, so schneidet dieselbe die Tangente e in einem Punkte Q, welcher der Tangente f aus P angehört; PQ ist also diese Tangente. Man kann sagen, sie sei die Basis

eines veränderlichen Dreiseits, dessen Basisecken sich auf den festen geraden Linien a und e bewegen, während sein Scheitel die Gerade ab, de beschreibt und seine Seiten sich um die festen Punkte bc und cd drehen.

Aufg. 1. Auf fünf Tangenten a, b, c, d, e eines Kegelschnitts den Berührungspunkt T einer unter ihnen (a) zu ermitteln.

Man lässt die sechste Tangente f mit a zusammenfallen und bestimmt ihren Schnittpunkt T mit derselben; d. h. man zieht die Gerade ab, de und schneidet sie mit bc, ef (ea) in O, zieht dann cd, O und erhält T auf a (f) da, wo diese sie schneidet.

Aufg. 2. Man soll zu fünf Tangenten das Centrum des Kegelschnitts bestimmen.

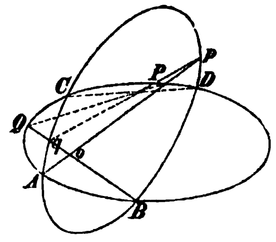
Dazu ist nur nöthig, die zu einer der gegebenen parallele, d. h. durch ihren unendlich entfernten Punkt gehende neue Tangente und für jene und diese die Berührungspunkte zu construiren; die Verbindungslinie derselben ist ein Durchmesser, sein Halbirungspunkt das Centrum.

Aufg. 3. Man construire eine Parabel aus vier Tangenten.

283. **Wenn drei Kegelschnitte durch dieselben zwei Punkte gehen, so schneiden sich ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen, welche keinen dieser Punkte enthalten, in einem Punkte.**

Ist $S=0$ die Gleichung des einen Kegelschnitts und sei $L=0$ die Gleichung der Geraden, welche die beiden gemeinsamen Punkte verbindet, so sind die Gleichungen der beiden andern Kegelschnitte von der Form $S+LM=0$, $S+LN=0$ und die Gleichung ihrer Durchschnittslinie ist daher $L(M-N)=0$; die durch $M-N=0$ dargestellte Gerade geht aber durch den Punkt $M=0$, $N=0$. In Uebereinstimmung mit der Bemerkung des Art. 277 erkennen wir diesen Satz als eine Erweiterung des Satzes im Art. 138, über die Radicalaxen von drei Kreisen, da diese letztern die unendlich entfernte Gerade ihrer Ebene zur gemeinschaftlichen Sehne haben. Der Satz des Art. 280 erscheint als fernere Erweiterung desselben Satzes und man kann von drei Kegelschnitten, welche mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, aussagen, dass sie vier Radicalcentra besitzen, in deren jedem drei ihrer gemeinschaftlichen Sehnen sich schneiden. An die Stelle des mit ihnen allen in doppelter Berührung stehenden Kegelschnitts treten im Falle der Kreise die zwei Punkte, die ihnen allen gemein sind. Der Satz unseres Art. kann wie im Art. 138 so ausgesprochen werden: Wenn vier

Punkte eines Kegelschnitts fest bestimmt sind, so geht seine Durchschnittssehne mit einem festen, durch zwei von diesen Punkten gehenden Kegelschnitt durch einen festen Punkt.



Aufg. 1. Durch die Voraussetzung, dass einer der beiden Kegelschnitte in ein Paar von Geraden OA, OB degenerirt, entsteht der Satz: Wenn man durch einen der Schnittpunkte A von zwei Kegelschnitten eine gerade Linie zieht, welche diese in den ferneren Punkten P, p respective schneidet, und durch einen zweiten Schnittpunkt B derselben eine andere gerade Linie, welche die Punkte Q, q in ihnen ferner bestimmt, so schneiden sich die Geraden PQ, pq in der zweiten Durchschnittssehne CD der Kegelschnitte.

Aufg. 2. Wenn durch den Berührungspunkt von zwei Kegelschnitten zwei Gerade gezogen werden, welche diese Curven in den Punkten P, p; Q, q respective schneiden, so begegnen sich die Geraden PQ, pq in der Durchschnittssehne der Kegelschnitte.

Dieser Satz ist auch ein specieller Fall von einem im Art. 280 gegebenen, weil einer der Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei sich berührenden Kegelschnitten in den Berührungspunkt fällt. (Vergl. den Zusatz im Art. 147.)

284. Die Gleichung des einem Viereck umgeschriebenen Kegelschnitts $LN = kMP$ liefert uns einen Beweis des Satzes von Pascal: Die drei Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer geraden Linie.

Wir bezeichnen die Ecken des Sechsecks durch a, b, c, d, e, f und wollen durch $ab = 0$ die Gleichung der geraden Verbindungslinie von a mit b ausdrücken; dann muss die Gleichung des Kegelschnitts, als dem Viereck $abcd$ umgeschrieben wie er ist, sich in der Form $ab \,.\, cd - bc \,.\, ad = 0$ schreiben lassen; und da er auch dem Viereck $defa$ umgeschrieben ist, so muss dieselbe Gleichung in der Form $de \,.\, fa - ef \,.\, ad = 0$ ausdrückbar sein. Die Identität beider Ausdrucksformen giebt uns die Gleichung $ab \,.\, cd - de \,.\, fa = ad\,(bc - ef)$, und aus dieser ist zu schliessen, dass die linke Seite der Gleichung, die gleich Null gesetzt ihrer Form gemäss eine dem Viereck der Linien ab, de, cd, af umgeschriebene Figur darstellt, in zwei Factoren zerlegbar sein muss, die daher die Diagonalen dieses Vierecks darstellen. Nun ist ad diejenige Diagonale, welche die Ecken a und d verbindet, also muss $bc - ef = 0$ die andere Diagonale

sein oder die Ecken ab, de; cd, af mit einander verbinden; da aber die Form ihrer Gleichung sie als eine durch den Punkt bc, ef gehende Gerade charakterisirt, so liegen nothwendig die drei Punkte ab, de; bc, ef; cd, fa in einer geraden Linie.

Aufg. 1. Wenn a, b, c drei Punkte einer Geraden und a', b', c' drei Punkte einer andern Geraden sind, so liegen die Durchschnittspunkte bc', $b'c$; ca', $c'a$; ab', $a'b$ in einer Geraden. Dieser specielle Fall des Pascal'schen Satzes gilt auch dann noch, wenn die zweite Gerade in unendlicher Ferne ist und also die Linienpaare bc', $c'a$; ca', $a'b$; ab', $a'c$ parallel zu drei verschiedenen Geraden gezogen sind.

Aufg. 2. Wenn man vier Gerade auf alle Arten zu dreien combinirt, so entstehen vier Dreiecke; die Durchschnittspunkte der Höhen dieser Dreiecke liegen in einer Geraden.

Sind a, b, c, d die vier Geraden und a', b', c', d' die zu ihnen rechtwinkligen Linien der Construction, so ergiebt sich der Beweis durch die Anwendung des Satzes der vorigen Aufgabe auf die drei Schnittpunkte von a, b, c mit d und die drei unendlich entfernten Punkte von a', b', c'. Der Satz folgt auch aus dem Steiner'schen Satze in der 3. Aufg. des Art. 235; denn die vier Durchschnittspunkte der Höhen müssen in der Directrix der Parabel liegen, welche die vier Geraden zu Tangenten hat.

Aufg. 3. Der angezogene Satz von Steiner ist selbst ein specieller Fall von Brianchon's Satz; denn sind a, b, c drei Tangenten der Parabel und bezeichnen a', b', c' drei zu ihnen rechtwinklige Tangenten, ist überdiess ∞ die unendlich entfernte Gerade, die auch eine Tangente ist, so betrachten wir die sechs Tangenten a, b, c, c', ∞, a' und sehen, dass die Geraden ab, $c'\infty$; bc, $a'\infty$; cc', aa' sich in einem Punkte schneiden; von ihnen sind aber die beiden ersten Höhenperpendikel des betrachteten Dreiecks und die letzte ist die Directrix, in welcher jedes Paar rechtwinkliger Tangenten sich durchschneidet. (Art. 229.)

285. Pascal's Theorem gestattet aus fünf Punkten A, B, C, D, E eines Kegelschnitts denselben zu construiren; denn wenn wir irgend eine Linie AP durch einen der gegebenen Punkte ziehen, so können wir den Punkt F bestimmen, in welchem sie den Kegelschnitt ferner schneidet und dadurch beliebig viele Punkte des Kegelschnitts construiren. Nach Pascal's Satz sind die Schnittpunkte von AB, DE; BC, EF; CD, FA in derselben Geraden und da nach der Voraussetzung die Punkte AB, DE oder O, CD, AF (AP) oder P bekannt sind, so bestimmt die Verbindungslinie von E mit dem Schnittpunkte Q von OP und BC auf der Geraden AP den Punkt F. In andern Worten: Der Punkt F ist die Spitze eines veränderlichen Dreiecks FPQ, dessen Seiten durch feste Punkte AEO ge-

hen, während seine Basisecken P, Q sich längs fester Geraden CD, CB bewegen. (Vergl. Aufg. 3, Art. 47.) In dieser Form ward das Theorem durch Mac Laurin ausgesprochen (1732).

Aufg. 1. Aus fünf Punkten eines Kegelschnitts sein Centrum zu bestimmen.

Man ziehe AP parallel zu BC und bestimme den auf ihr gelegenen Punkt F des Kegelschnitts; dann sind BC und AF zwei parallele Sehnen und die gerade Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist ein Durchmesser. Indem man ebenso auf EQ parallel CD den Punkt G des Kegelschnitts bestimmt, findet man einen zweiten Durchmesser und damit das Centrum.

Aufg. 2. Aus fünf Punkten eines Kegelschnitts die Tangente in einem von ihnen zu bestimmen.

Der Punkt F falle mit A zusammen, so nimmt die durch E gehende Gerade QF die Lage qA an und pA ist die gesuchte Tangente.

Aufg. 3. Man untersuche die Generationsmethode Mac Laurin's, d. h. man bestimme den Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Seiten durch drei feste Punkte respective gehen, während die Basisecken sich in zwei festen Geraden bewegen.

Sind $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ die Gleichungen der Seiten des von den drei festen Punkten gebildeten Dreiecks, so können nach dem Princip des Art. 60 die festen Geraden in der Form $lL + mM + nN = 0$, $l'L + m'M + n'N = 0$ ausgedrückt werden; und ist dann $L = \mu M$ die Basis, so ist die Gerade, welche den Punkt $M = 0$, $N = 0$ mit dem Durchschnittspunkt der Basis mit der ersten festen Geraden verbindet, durch $(l\mu + m)\, M + nN = 0$, und die Gerade, welche den Punkt $L = 0$, $N = 0$ mit dem Durchschnitt der Basis mit der zweiten festen Geraden verbindet, durch $(l'\mu + m')\, L + n'\mu N = 0$ dargestellt. Die Elimination von μ zwischen den beiden letzten Gleichungen giebt die Gleichung des gesuchten Ortes in der Form
$lm'LM = (mM + nN)\,(l'L + n'N)$, d. h. derselbe ist ein Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte $M = 0$, $N = 0$; $N = 0$, $L = 0$; $L = 0$, $lL + mM + nN = 0$; $M = 0$, $l'L + m'M + n'N = 0$ hindurchgeht.

286. Wie in dem Falle des Satzes von Brianchon können wir eine Anzahl von 60 verschiedenen Sechsecken aus den nämlichen sechs Punkten erhalten, wenn wir die Ordnung ihrer Aufeinanderfolge ändern. Die entsprechenden Linien bilden ein System mit zahlreichen interessanten Eigenschaften. Da z. B. der Kegelschnitt des vorigen Art. auch dem Viereck $bcef$ umgeschrieben ist, so kann seine Gleichung auch in der Form $be\,.\,cf - bc\,.\,ef = 0$ ausgedrückt werden und ihre Identität mit der zuerst gegebenen Form im Art. 284 giebt

$ab.cd - be.cf = (ad - ef)\,bc$, woraus wir wie dort schliessen, dass die Punkte ab, cf; cd, be; ad, ef in einer Geraden, nämlich der durch $ad - ef = 0$ dargestellten Linie liegen.

In gleicher Weise lernen wir aus der Identität der zweiten und dritten Form der Gleichung unseres Kegelschnitts, dass die drei Punkte de, cf; fa, be; ad, bc in einer Geraden liegen, die durch $bc - ad = 0$ dargestellt ist. Aber die drei Geraden $bc - ef = 0$, $ef - ad = 0$, $ad - bc = 0$ schneiden sich in einem Punkte und es ist damit der Satz von Steiner bewiesen, dass die drei Pascal'schen Linien, welche man für die Anordnung der Ecken in den respectiven Folgen $abcdef$, $adcfeb$, $afcbed$ erhält, sich in einem Punkte schneiden.

Man kann jedoch diesen Satz, sowie den grössten Theil aller der andern Sätze, welche die Untersuchungen von Steiner, Plücker, Cayley, Kirkmann, Hesse über die Figur des vollständigen Sechsecks bekannt gemacht haben, auch entwickeln, indem man die einfachsten Principien der Combinationslehre mit den folgenden elementaren Sätzen verbindet: Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, dass die geraden Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken durch einen Punkt gehen (Centrum der Collineation, Homologie oder Perspective), so liegen die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Seiten in einer geraden Linie (Axe der Collineation etc., Art. 60, Aufg. 3) und umgekehrt. Wenn für jedes Paar von drei Dreiecken die Durchschnittspunkte der Gegenseiten dieselben drei Punkte einer geraden Linie sind, so sind die Centra der Collineation des ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und ersten Dreiecks drei Punkte einer Geraden, und wenn für jedes Paar von drei Dreiecken die Verbindungslinien der Gegenecken dieselben drei Geraden aus einem Punkte sind, so sind die drei entsprechenden Axen der Collineation drei Gerade aus einem Punkte. Sind dann a, b, c, d, e, f die sechs Punkte des Kegelschnitts, die wir die Punkte P nennen wollen, so werden sie durch fünfzehn Gerade verbunden, die wir die Geraden C nennen werden. Jede derselben, z. B. ab wird von den vierzehn anderen geschnitten und zwar durch vier im Punkte a, durch vier andere in b und also durch sechs in anderen von a und b verschiedenen Punkten, z. B. ab, cd, etc.

Wir wollen diese als die Punkte p bezeichnen; ihre Anzahl ist fünfundvierzig, denn in jeder der Linien C sind sechs derselben gelegen und da zwei Linien C durch jeden Punkt p gehen, so ist ihre Zahl die dreifache Zahl der C. Wenn wir die Seiten des Sechsecks in der Ordnung $abcdef$ nehmen, so sagt Pascal's Satz, dass die drei Punkte p in einer Geraden liegen, welche als (ab, de), (bc, ef), (cd, fa) zu bezeichnen sind und wir können diese Gerade als die Pascal'sche Linie $\left\{\begin{matrix} ab \,.\, cd \,.\, ef \\ de \,.\, fa \,.\, bc \end{matrix}\right\}$ bezeichnen, um die drei Punkte bequem erkennen zu lassen, durch welche sie geht.

Durch jeden Punkt p gehen vier Pascal'sche Linien, nämlich z. B. durch (ab, de) die Linien $abcdef$, $abfdec$, $abcedf$, $abfedc$; wir finden also die Zahl der Pascal'schen Linien, indem wir die Zahl der Punkte p mit vier multipliciren und durch drei dividiren, weil jede von ihnen drei Punkte p enthält, oder sie ist gleich sechzig. Es ist auch die Zahl der verschiedenen möglichen Anordnungen der Buchstaben $abcdef$. Betrachten wir nun drei Dreiecke (1), (2), (3) von den Seiten ab, cd, ef; de, fa, bc; cf, be, ad respective, so liegen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten von (1) und (2) in derselben Pascal'schen Linie und die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken schneiden sich also in einem Punkte; sie sind aber $\left\{\begin{matrix} ab \,.\, de \,.\, cf \\ cd \,.\, fa \,.\, be \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} cd \,.\, fa \,.\, be \\ ef \,.\, bc \,.\, ad \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} ef \,.\, bc \,.\, ad \\ ab \,.\, de \,.\, cf \end{matrix}\right\}$, d. i. drei Pascal'sche Linien und wir haben Steiner's Satz wieder gefunden. Wir werden den Schnittpunkt als den Punkt g und durch die Charakteristik $\left\{\begin{matrix} ab \,.\, de \,.\, cf \\ cd \,.\, fa \,.\, be \\ ef \,.\, bc \,.\, ad \end{matrix}\right\}$ bezeichnen, welche offenbar macht, dass in jeder Pascal'schen Linie nur ein einziger Punkt g liegt; denn wenn die Pascal'sche Linie $\left\{\begin{matrix} ab \,.\, de \,.\, cf \\ cd \,.\, fa \,.\, be \end{matrix}\right\}$ gegeben ist, so erhält man die Charakteristik des bezüglichen Punktes g durch Untersetzen der in ihren Verticalreihen nicht enthaltenen Buchstaben unter dieselben. Da aber in jedem Punkt g drei Pascal'sche Linien zusammentreffen, so ist die Zahl dieser Punkte gleich zwanzig. Wenn wir die Dreiecke 2, 3 und 1, 3 betrachten, so sind die Verbindungslinien entsprechender Ecken in beiden Fällen

dieselben und die drei Axen der Collineation treffen sich somit in einem Punkte; derselbe ist aber offenbar der Punkt g von der Charakteristik $\left\{\begin{matrix} ab\,.\,cd\,.\,ef \\ de\,.\,fa\,.\,bc \\ cf\,.\,be\,.\,ad \end{matrix}\right\}$ und leitet uns daher zu keinem neuen Satze.

Aufg. Man zeige, dass die Durchschnitte der sechs Paare abwechselnder Seiten eines Pascal'schen Sechsecks in natürlicher Ordnung ein Brianchon'sches Sechsseit bildet und dass ebenso die Verbindungslinien der sechs Paare abwechselnder Ecken eines Brianchon'schen Sechsseits in dieser Ordnung ein Pascal'sches Sechseck bilden.

287. Betrachten wir nun die Dreiecke

$$ab, \qquad cd, \qquad ef \qquad 1)$$

$$\left\{\begin{matrix} ab\,.\,ce\,.\,df \\ de\,.\,bf\,.\,ac \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} cd\,.\,bf\,.\,ae \\ af\,.\,ce\,.\,bd \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} ef\,.\,bd\,.\,ac \\ bc\,.\,ae\,.\,df \end{matrix}\right\} \qquad 4)$$

$$\left\{\begin{matrix} ab\,.\,ce\,.\,df \\ cf\,.\,bd\,.\,ae \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} cd\,.\,bf\,.\,ae \\ be\,.\,ac\,.\,df \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} ef\,.\,bd\,.\,ac \\ ad\,.\,ce\,.\,bf \end{matrix}\right\} \qquad 5)$$

so sind die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten von 1 und 4 drei Punkte derselben Pascal'schen Linie und die Verbindungslinien entsprechender Ecken gehen daher durch einen Punkt. Diese sind aber die drei Pascal'schen Linien $\left\{\begin{matrix} ab\,.\,ce\,.\,df \\ cd\,.\,bf\,.\,ae \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} cd\,.\,bf\,.\,ae \\ ef\,.\,ac\,.\,bd \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} ef\,.\,ac\,.\,bd \\ ab\,.\,ce\,.\,df \end{matrix}\right\}$ und wir können den Schnittpunkt bezeichnen als den Punkt h von der Charakteristik $\left\{\begin{matrix} ab\,.\,ce\,.\,df \\ cd\,.\,bf\,.\,ae \\ ef\,.\,ac\,.\,bd \end{matrix}\right\}$. Sie weicht von der der Punkte g darin ab, dass nur eine der Verticalreihen die sechs Buchstaben ohne Auslassung oder Wiederholung enthält. In jeder Pascal'schen Linie giebt es drei Punkte h, nämlich in $\left\{\begin{matrix} ab\,.\,cd\,.\,ef \\ de\,.\,af\,.\,bc \end{matrix}\right\}$ die folgenden $\left\{\begin{matrix} \overline{ab}\,.\,cd\,.\,ef \\ de\,.\,af\,.\,bc \\ cf\,.\,bd\,.\,ae \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} ab\,.\,\overline{cd}\,.\,ef \\ de\,.\,af\,.\,bc \\ ac\,.\,be\,.\,df \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} ab\,.\,cd\,.\,\overline{ef} \\ de\,.\,af\,.\,bc \\ bf\,.\,ce\,.\,ad \end{matrix}\right\}$.

Daraus entspringt Kirkmann's Erweiterung des Steiner'schen Satzes: Die Pascal'schen Linien schneiden sich zu dreien nicht nur in Steiner's zwanzig Punkten g, sondern auch in sechzig andern Punkten h. Auch das erste Beweisverfahren des vorigen Art. lässt sich auf diesen Satz anwenden.

Wenn wir ebenso die Dreiecke 1 und 5 betrachten, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken dieselben wie für 1 und 4 und die entsprechenden Seiten durchschneiden sich daher in einer Geraden, offenbar einer Pascal'schen Linie. Endlich müssen sich die entsprechenden Seiten von 4 und 5 in drei Punkten einer Geraden schneiden, d. h. die drei Punkte h von den Charakteristiken $\begin{Bmatrix} \overline{ab} . ce . df \\ de . bf . ac \\ cf . ae . bd \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} ae . \overline{cd} . bf \\ bd . af . ce \\ ac . be . df \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} ac . bd . \overline{ef} \\ df . ae . bc \\ ce . bf . ad \end{Bmatrix}$ liegen in einer Geraden; und da überdiess die Axe von 4 und 5 durch den Schnittpunkt der Axen von 1, 4 und 1, 5 gehen muss, d. h. durch den Punkt g, der aus den vollständigen Verticalreihen der vorigen Punkte h entsteht, oder $\begin{Bmatrix} ab . cd . ef \\ de . af . bc \\ cf . be . ad \end{Bmatrix}$, so haben wir den Cayley-Salmon'schen Satz: Es giebt zwanzig gerade Linien x, deren jede einen Punkt g und drei Punkte h enthält.

Ebenso kann man beweisen, dass die zwanzig Geraden x zu vieren durch fünfzehn Punkte y gehen. Die vier Linien x nämlich, deren Punkte g in der vorigen Bezeichnung eine Verticalreihe gemein haben, gehen durch denselben Punkt.

Betrachten wir ferner die Pascal'schen Linien, welche sich in einem Punkte h schneiden, z. B.

$\begin{Bmatrix} ab . ce . df \\ de . bf . ac \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} de . bf . ac \\ cf . ae . bd \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} cf . ae . bd \\ ab . df . ce \end{Bmatrix}$, so können wir, indem wir in jeder von ihnen einen Punkt p wählen, ein Dreieck bilden, welches die Ecken (df, ac), (bf, ae), (bd, ce) hat und dessen Seiten daher sind

$$\begin{Bmatrix} ac . bf . de \\ df . ae . cb \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} bf . ce . ad \\ ae . bd . cf \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} bd . ac . ef \\ ce . df . ab \end{Bmatrix}.$$

Nehmen wir dann in jeder einen Punkt h, indem wir unter jede der obigen Pascal'schen Linien die Zeile $af . cd . be$ schreiben, so entsteht ein Dreieck von den Seiten

$$\begin{Bmatrix} ac . bf . de \\ be . cd . af \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} cf . ae . bd \\ be . cd . af \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} df . ab . ce \\ be . cd . af \end{Bmatrix}.$$

Die Durchschnitte der entsprechenden Seiten dieses Dreiecks, d. h. die Punkte g von den Charakteristiken

$$\left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ ac.bf.de \\ df.ae.bc \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ cf.ae.bd \\ ad.bf.ce \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ df.ab.ce \\ ac.ef.bd \end{matrix}\right\} \text{ mit } \left\{\begin{matrix} be.cd.af \\ cf.ab.de \\ ad.ef.bc \end{matrix}\right\},$$

d. h. dem vierten, der gleichfalls die Zeile $be.cd.af$ enthält, liegen also in einer Geraden. Und da man fünfzehn verschiedene Producte von der Form $be.cd.af$ bilden kann, so entspring dem der Satz von Steiner: Die Punkte g liegen zu vieren in fünfzehn geraden Linien J.

Sechszehntes Kapitel.

Von den projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

---

288. Wir gehen dazu weiter, aus den vorher betrachteten Formen der Gleichungen von Kegelschnitten diejenigen Schlüsse zu ziehen, die sich auf Grund des Satzes von Art. 34 hier ebenso ergeben, wie in Art. 54 f.

So drückt die Gleichung $x_1 x_3 = k x_2^2$ aus (vergl. Art. 153), dass das Product der senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von zwei festen Tangenten desselben zu dem Quadrat seines Abstandes von der zugehörigen Berührungssehne in einem constanten Verhältniss ist.

Die Gleichung $x_1 x_3 = k x_2 x_4$ führt zu dem wichtigen Satz: Das Product der senkrechten Abstände eines Punktes des Kegelschnitts von zwei Gegenseiten eines demselben eingeschriebenen Vierecks steht zu dem Product der Abstände des Punktes von den beiden andern Gegenseiten desselben in einem constanten Verhältniss. Aus dieser Eigenschaft erkennen wir weiter, dass das Doppelverhältniss eines Strahlbüschels, dessen Strahlen durch vier feste Punkte eines Kegelschnitts gehen und dessen Scheitel ein Punkt desselben ist, constan-

ten Werth hat für alle Lagen dieses Letzteren. Denn $x_1 = \frac{OA \,.\, OB}{AB} \sin AOB$, $x_3 = \frac{OC \,.\, OD}{OD} \sin COD$, etc. sind die senkrechten Abstände und die Substitution dieser Werthe liefert durch Unterdrückung des Factors $OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD$ auf beiden Seiten die Gleichung $\frac{\sin AOB}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin COD} = k \,.\, \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}$, in welcher die rechte Seite constant und die linke der Ausdruck des fraglichen Doppelverhältnisses ist. Man darf auf Grund dieses Satzes von dem Doppelverhältniss von vier Punkten eines Kegelschnitts sprechen, indem man darunter das Doppelverhältniss eines Strahlbüschels denkt, welches einen fünften Punkt des Kegelschnitts mit ihnen verbindet. Auf den Satz von der Unveränderlichkeit desselben ist zurückzukommen, sobald einige andere Formeln des Vorhergehenden ihre entsprechende Interpretation gefunden haben werden.

289. Wenn $S = 0$ die Gleichung eines Kreises ist, so bezeichnet nach Art. 122 der Werth von S, welcher durch die Substitution der Coordinaten x, y eines beliebigen Punktes erhalten wird, das Quadrat der von ihm an den Kreis gezogenen Tangente; daher drückt die Gleichung $S - k x_1 x_3 = 0$ aus, dass der Ort eines Punktes, für den das Quadrat der von ihm an einen festen Kreis gehenden Tangente in constantem Verhältniss zu dem Product seiner Entfernungen von zwei festen Geraden steht, ein Kegelschnitt ist, welcher durch die vier Punkte geht, die der Kreis mit diesen beiden Geraden gemein hat. Die Wahrheit dieses Satzes ist von dem Halbmesser des Kreises und von der Realität der ihm mit den beiden Geraden gemeinsamen Punkte unabhängig und er enthält daher den folgenden in sich: Der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat der Entfernung von einem gegebenen festen Punkte zu dem Product seiner Abstände von zwei festen Geraden in constantem Verhältniss steht, ist ein Kegelschnitt. Die festen Geraden können als Sehnen seines imaginären Durchschnitts mit einem unendlich kleinen Kreise betrachtet werden, der den festen Punkt zum Centrum hat.

290. Aehnliche Schlüsse zieht man aus der Gleichung $S - k x_1^2 = 0$ für den Fall, dass $S = 0$ einen Kreis darstellt. Wir lernen, dass der Ort eines Punktes, für den die von

ihm an einen festen Kreis gehende Tangente zu seiner Entfernung von einer festen Geraden in constantem Verhältniss steht, ein Kegelschnitt ist, der in dieser Geraden mit dem Kreise eine doppelte Berührung hat. In dem speciellen Falle des unendlich kleinen Kreises erhalten wir die Fundamentaleigenschaft des Brennpunktes und der Directrix und müssen daraus schliessen, dass der Brennpunkt eines Kegelschnitts als ein unendlich kleiner Kreis anzusehen ist, der den Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten in der Directrix berührt.

291. Allgemein ist das Resultat der Substitution der Coordinaten eines Punktes in die Gleichung eines Kegelschnitts dem Rechteck der Segmente proportional, die der Kegelschnitt auf einer durch diesen Punkt in fester Richtung gezogenen Sehne bestimmt. Denn nach Art. 111 ist diess Rechteck

$$= \frac{a_{33}'}{a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta},$$ wenn wie in Art. 93 durch a_{33}' das Resultat der Substitution der Coordinaten in die linke Seite der Gleichung bezeichnet wird; so lange also der Winkel θ constant ist, ist diess Rechteck der Grösse a_{33}' proportional. Demnach können die letztbewiesenen Sätze auf den allgemeinen Fall eines Kegelschnitts $S = 0$ erweitert werden.

Aufg. 1. Wenn zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung sind, so ist für jeden Punkt des einen das Quadrat seines Abstandes von der Berührungssehne beider in constantem Verhältniss zu dem Rechteck der Segmente, welche der andere auf dieser Senkrechten bestimmt.

Aufg. 2. Wenn eine Gerade von constanter Richtung zwei Kegelschnitte in den Punkten P, Q; p, q schneidet und ein Punkt O auf ihr so bestimmt wird, dass die Rechtecke $OP \,.\, OQ$ und $Op \,.\, Oq$ in constantem Verhältniss sind, so ist der Ort des Punktes O ein Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht.

Aufg. 3. Der Durchmesser des Kreises, welcher dem von zwei Tangenten eines Centralkegelschnitts und ihrer Berührungssehne gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, ist $= \frac{b'b''}{p}$ für b', b'' als die den Tangenten parallelen Halbdurchmesser und p als den senkrechten Abstand der Berührungssehne vom Centrum.

Wir setzen die Gleichung als durch eine solche Constante dividirt voraus, dass das Substitutionsresultat für die Coordinaten des Centrums

der Einheit gleich wird. Sind dann t', t'' die Längen der Tangenten und ist S' das Resultat der Substitution der Coordinaten ihres Schnittpunktes, so gelten die Proportionen $t'^2 : b'^2 = S' : 1$, $t''^2 : b''^2 = S' : 1$; ist aber h die senkrechte Entfernung der Berührungssehne, so gilt nach der Anm. des Art. 163 auch die Proportion $h : p = S' : 1$; daher ist $t' t'' : h = b' b'' : p$ und da nach der Elementargeometrie die linke Seite den Durchmesser des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises giebt, so ist der Satz bewiesen.

Aufg. 4. Aus der Formel der vorigen Aufg. geht der Ausdruck des Art. 250 für den Radius des osculirenden Kreises hervor, indem man die beiden Tangenten zusammenfallen lässt. Man erhält denselben auch mittelst des folgenden Satzes: Wenn n, n' die Längen von zwei sich durchschneidenden Normalen und p, p' die Abstände der zugehörigen Tangenten vom Centrum bezeichnen und wenn b' der der Verbindungslinie beider Curvenpunkte parallele Halbdurchmesser ist, so gilt die Relation $np + n'p' = 2b'^2$. Denn für S' als das Resultat der Substitution der Coordinaten des Mittelpunkts der Sehne in die Gleichung des Kegelschnitts, h, h' als die Abstände dieses Mittelpunktes von den beiden Tangenten und 2β als die Länge der Sehne folgt wie in der letzten Aufgabe $\beta^2 = b'^2 S'$, $h = pS'$, $h' = p'S'$ und man sieht leicht, dass $nh + n'h' = 2\beta^2$ ist. Damit ist aber die angegebene Relation bewiesen.

292. Die Erörterungen der Art. 77, 78 geben das Recht, die bisher gedeuteten symbolischen Formeln auch nach einem System der Linien-Coordinaten zu interpretiren, wie es a. a. O. entwickelt worden ist. Dann ist durch $\Sigma = \lambda \Sigma'$ jeder Kegelschnitt ausgedrückt, der die gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ zu Tangenten hat, und die Constante λ wird durch Festsetzung einer fünften Tangente bestimmt; sie kann insbesondere auf dreifache Weise so bestimmt werden, dass die Gleichung $\Sigma = \lambda \Sigma'$ ein Paar von Punkten darstellt. Es ist ferner $\Sigma = \lambda \xi_1 \xi_3$ die Gleichung eines Kegelschnitts, der dem Vierseit der von den Punkten $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ an den Kegelschnitt $\Sigma = 0$ gehenden Tangentenpaare eingeschrieben ist und $\xi_1 \xi_3 = \lambda \xi_2 \xi_4$ die eines dem Vierseit von den Ecken $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ eingeschriebenen Kegelschnitts. Die Kegelschnitte $\Sigma = 0$ und $\Sigma = \lambda \xi_1 \xi_3$ berühren einander, wenn entweder einer der Punkte $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ auf dem Kegelschnitt $\Sigma = 0$ liegt, oder wenn die gerade Verbindungslinie von beiden eine Tangente desselben ist. (Art. 271.) Die Kegelschnitte $\Sigma = 0$ und $\Sigma = \lambda \xi_1^2$ berühren einander doppelt, so dass $\xi_1 = 0$ den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten bezeichnet; etc.

Diese Interpretation erstreckt sich aber offenbar auch auf

die metrischen Relationen des Art. 288 und liefert die Sätze: **Das Product der Abstände einer Tangente des Kegelschnitts von zwei festen Punkten desselben ist zum Quadrat ihres Abstandes vom Durchschnittspunkt der zugehörigen Tangenten in constantem Verhältniss. Das Product der Abstände einer Tangente des Kegelschnitts von zwei Gegenecken eines demselben umgeschriebenen Vierseits ist zum Product ihrer Abstände von den beiden andern Gegenecken desselben in constantem Verhältniss.** Und wenn die bewegliche Tangente die vier festen Tangenten AB, BC, CD, DA in den Punkten a, b, c, d schneidet, so hat man für die Abstände der vier Ecken des umgeschriebenen Vierseits von der beweglichen Tangente die Ausdrücke $\frac{ab \,.\, \sin abB \,.\, \sin baB}{\sin bBa}$, $\frac{ad \,.\, \sin adA \,.\, \sin daA}{\sin dAa}$, etc. und die zwischen ihnen bestehende Relation liefert durch das Verschwinden der sinus der Basiswinkel und nach der Constanz der Winkel des Vierseits das Gesetz: $\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = \text{const.}$, d. h. **vier feste Tangenten eines Kegelschnitts bestimmen auf einer beweglichen Tangente desselben eine Punktreihe von constantem Doppelverhältniss.** In gleicher Weise wie im Art. 288 entsteht hier der **Begriff des Doppelverhältnisses von vier Tangenten eines Kegelschnitts.**

293. Dieser Satz und der des Art. 288, welche beide so recht im beherrschenden Mittelpunkte der Theorie der Kegelschnitte stehen, knüpfen unmittelbar an das an, was in Art. 59, 78 von den projectivischen Strahlbüscheln und Punktreihen gesagt worden ist und man tritt mit ihnen in den Zusammenhang der dort abgebrochenen allgemeinen Gedankenentwickelung wieder ein. Denn sie lassen sich auch so aussprechen:

Der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen von zwei projectivischen Strahlbüscheln ist ein Kegelschnitt, welcher auch durch die Scheitel (Träger) der beiden Büschel hindurchgeht.

Die Enveloppe der geraden Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen ist ein Kegelschnitt, der die Träger dieser Reihen selbst berührt.

Der directe Beweis für beide Sätze ist folgendermassen zu führen.

Sind $A_1 + kA_2 = 0$ und $B_1 + kB_2 = 0$ die Gleichungen der beweglichen Strahlen beider Büschel, so wird die Gleichung des bezeichneten Ortes durch Elimination von k zwischen den vorigen Gleichungen gefunden, also in der Form $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. Diese Gleichung hat wie die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen x und y sechs Glieder und daher fünf unbestimmte Coefficienten; sie kann somit durch die Bedingung, dass die dargestellte Curve fünf Punkte enthalte, zur Gleichung jeder beliebigen Curve zweiter Ordnung gemacht werden. Geometrisch bestimmen fünf Punkte zwei projectivische Büschel, da drei von ihnen mit den beiden übrigen verbunden drei Paare entsprechender Strahlen beider Büschel liefern (Art. 59). Dass der erzeugte Kegelschnitt auch durch die Scheitelpunkte beider Büschel hindurchgehe, beweist die Bemerkung, dass seiner Gleichung die gleichzeitigen Voraussetzungen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ und ebenso die anderen $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ genügen. Die Verbindungslinie der Scheitel ist für jedes der beiden Büschel derjenige Strahl, welcher der Tangente der Kegelschnittslinie im Scheitel des andern Büschels entspricht; daraus

Sind $U_1 + \lambda U_2 = 0$ und $V_1 + \lambda V_2 = 0$ die Gleichungen der beweglichen Punkte beider Reihen, so wird die Gleichung der bezeichneten Enveloppe durch Elimination von λ zwischen den vorigen Gleichungen gefunden, also in der Form $U_1V_2 - U_2V_1 = 0$. Diese Gleichung hat wie die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen ξ und η sechs Glieder und daher fünf unbestimmte Coefficienten; sie kann somit durch die Bedingung, dass die dargestellte Curve fünf Gerade berühre, zur Gleichung jeder beliebigen Curve zweiter Classe gemacht werden. Geometrisch bestimmen fünf Gerade zwei projectivische Reihen, da drei von ihnen durch ihren Schnitt mit den beiden übrigen drei Paare entsprechender Punkte beider Reihen liefern (Art. 78). Dass der Kegelschnitt auch die Träger beider Reihen berühre, beweist die Bemerkung, dass seiner Gleichung die gleichzeitigen Voraussetzungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ und ebenso die andere $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ genügen. Der Durchschnittspunkt der Träger ist für jede der beiden Reihen derjenige Punkt, der dem Berührungspunkte der Kegelschnittslinie mit dem Träger der andern Reihe entspricht; daraus entspringen lineare Con-

entspringen lineare Constructionen zur Bestimmung dieser Tangenten.

structionen zur Bestimmung dieser Berührungspunkte.

Wenn zwei projectivische Punktreihen in verschiedenen geraden Linien durch die Gruppen entsprechender Punkte a, b, c; a', b', c' bestimmt sind und d, d' die beweglichen Punkte derselben bezeichnen, so dass die Gerade dd' den dadurch bestimmten Kegelschnitt umhüllt, so ist auch für P und P' als zwei feste Punkte der Ort des Schnittpunktes der Strahlen Pd und $P'd'$ ein durch P, P' gehender Kegelschnitt. Ebenso umhüllen einen Kegelschnitt die Verbindungslinien der durch zwei beliebige gerade Linien mit den beweglichen vierten Strahlen von zwei projectivischen Büscheln bestimmten Schnittpunkte.

Aufg. 1. Der durch die Büschel $A_1 + kA_2 = 0$, $B_1 + kB_2 = 0$ erzeugte Kegelschnitt hat für $A_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $A_2 \equiv a_1' x_1 + \ldots = 0$, $B_1 \equiv b_1 x_1 + \ldots = 0$, $B_2 \equiv b_1' x_1 + \ldots = 0$ die Gleichung

$$x_1^2 (a_1 b_1' - a_1' b_1) + x_1 x_2 \{(a_1 b_2' - a_2 b_1') + (a_2 b_1' - a_2' b_1)\}$$
$$+ x_2^2 (a_2 b_2' - a_2' b_2) + x_1 x_3 \{(a_1 b_3' - a_1' b_3) + (a_3 b_1' - a_3' b_1)\}$$
$$+ x_2 x_3 \{(a_2 b_3' - a_2' b_3) + (a_3 b_2' - a_3' b_2)\} + x_3^2 (a_3 b_3' - a_3' b_3) = 0.$$

Derselbe Kegelschnitt wird erzeugt durch projectivische Büschel, die in zwei beliebigen Punkten desselben ihre Scheitel haben und deren Gleichungen daher sind

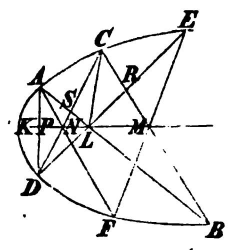
$$(A_1 + kA_2) + m(B_1 + kB_2) = 0, \quad (A_1 + lA_2) + m(B_1 + lB_2) = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnitts ist daher auch

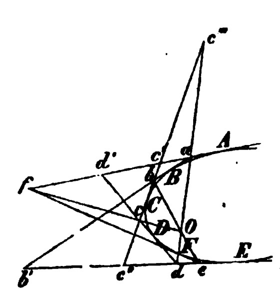
$$\begin{vmatrix} A_1 + kA_2, & B_1 + kB_2 \\ A_1 + lA_2, & B_1 + lB_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} 1, & k \\ 1, & l \end{vmatrix} = 0$$

und man erkennt daraus, dass es derselbe Kegelschnitt ist, den die Gleichung $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ auch darstellt. Diese Betrachtung überträgt sich direct auf die projectivischen Punktreihen und die Erzeugung des Kegelschnitts als Enveloppe.

Aufg. 2. Die Erzeugungsmethode der Kegelschnitte aus projectivischen Büscheln liefert einen einfachen Beweis von Pascal's Satz und giebt damit die Constructionen des Art. 285. Sind A, B, C, D, E, F sechs Punkte eines Kegelschnitts und denken wir die Punkte A und E als Scheitel der Strahlbüschel, so sollen diese selbst durch das Symbol $A \,.\, CDFB$ und $E \,.\, CDFB$ und ihre Doppelverhältnisse durch $\{A \,.\, CDFB\}$ und $\{E \,.\, CDFB\}$ bezeichnet werden, in der Art, dass die beiden ersten Strahlen die Schenkel des getheilten Winkels und die beiden folgenden die



Theilstrahlen desselben angeben. (Vergl. Art. 56.) In analoger Weise sei die Punktreihe und ihr Doppelverhältniss ausgedrückt. Dann hat man zunächst $\{E \,.\, CDFB\} = \{A \,.\, CDFB\}$ und daher, wenn man diese Büschel durch die Transversalen BC, DC respective schneidet, nach dem Fundamentalsatz des Art. 57 (78) für die entstehenden Reihen $\{ERMB\} = \{CDNS\}$. Bildet man dann aus dem Schnittpunkt L der Geraden AB und DE Strahlbüschel über diesen Reihen respective, so haben dieselben die drei Strahlen CL, DE, AB entsprechend gemein und es ergiebt sich daher aus ihrer Projectivität (Art. 59), dass auch das vierte Paar entsprechender Strahlen, d. i. NL, LM eine Gerade bilde. Also liegen die Schnittpunkte L, M, N der Gegenseitenpaare AB, DE; BC, EF; CD, FA in einer Geraden.



Aufg. 3. Ganz ebenso geht aus der Erzeugung durch projectivische Reihen der Satz von Brianchon hervor. Sind A, B, C, D, E, F sechs Tangenten eines Kegelschnitts, so bestimmen die Tangenten C, D, F, B auf den beiden Tangenten A und E projectivische Reihen c, d', f, a; c', d, e, b'. Bildet man über ihnen aus den Punkten (C, D) und $(B; C)$ respective Strahlenbüschel, so erzeugen diese auf der geraden Linie von (A, B) nach (D, E) projectivische Punktreihen, welche drei Paare entsprechender Punkte in c'', d, a vereinigt haben und bei denen daher auch das vierte Paar entsprechender Punkte in einen Punkt O zusammenfällt.

Aufg. 4. Eine sich um den festen Punkt P drehende Gerade schneidet zwei feste gerade Linien OA, OA' in den Punkten A, A'; von diesen aus sind constante Längen Aa, $A'a'$ auf jede dieser Linien in bestimmtem Sinne aufgetragen; dann ist die Enveloppe der geraden Verbindungslinie aa' ihrer Endpunkte ein Kegelschnitt, der jene Linien zu Tangenten hat. Denn für vier Lagen der sich um P drehenden Geraden ist $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$ und wegen $\{ABCD\} = \{abcd\}$, $\{A'B'C'D'\} = \{a'b'c'd'\}$ auch $\{abcd\} = \{a'b'c'd'\}$.

Wenn die Enveloppe einer beweglichen geraden Linie durch diese Methode als ein Kegelschnitt erkannt ist, so ist zu erwägen nützlich, ob dieselbe in einer ihrer Lagen ganz in unendliche Ferne fallen kann; denn in diesem Falle ist der Kegelschnitt sofort als eine Parabel erwiesen. So kann im letzten Beispiel aa' nur unendlich entfernt sein, wenn auch die entsprechende Lage von AA' es ist; es kann diess also nur geschehen, wenn P unendlich fern ist, d. h. wenn die Transversale der beiden festen Geraden eine feste Richtung hat. In ähnlicher Art kann auch die Natur des Ortes eines beweglichen Punktes durch Betrachtung specieller Lagen näher bestimmt werden, nachdem er als ein Kegelschnitt erkannt ist.

294. Indem wir bei diesen wichtigen Eigenschaften verweilen, um einige ihrer zahlreichen Consequenzen zu entwickeln, beginnen wir mit besondern schon früher gefundenen Fällen. Wenn von vier Punkten A, B, C, D einer Geraden, deren Doppelverhältniss $\{ABCD\}$ bekannt ist, einer (D) in unendlicher Ferne liegt, so reducirt sich dasselbe wegen $AD = BD$ auf das einfache Verhältniss $AC : BC$. Bilden die vier Punkte insbesondere eine harmonische Reihe oder ist ihr Doppelverhältniss $= -1$, so entspricht der unendlich entfernten Lage von D die Relation $AC = BC$, d. h. C ist die Mitte von AB.

Die folgenden Aufgaben knüpfen an die Sätze des Art. 109 an, die wir mit Benutzung der Begriffe von conjugirten Punkten oder harmonischen Polen (Punkte, deren einer in der Polare des andern liegt) und von conjugirten Geraden oder harmonischen Polaren (Gerade, deren eine durch den Pol der andern geht) so ausdrücken: Conjugirte Punkte oder harmonische Pole (O, R) sind mit den in ihrer geraden Verbindungslinie liegenden Punkten des Kegelschnitts (R', R'') harmonisch und conjugirte Gerade sind mit den durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten des Kegelschnitts harmonisch. Offenbar geht von jedem Punkte ein Büschel harmonischer Polarenpaare aus und in jeder Geraden liegt eine Reihe von Paaren harmonischer Pole. Insbesondere sind conjugirte Durchmesser conjugirte Gerade oder harmonische Polaren aus dem Centrum und ihre Richtungen sind conjugirte Punkte in der unendlich entfernten Geraden; jene sind harmonisch conjugirt zu den Asymptoten, diese zu den unendlich entfernten Punkten des Kegelschnitts.

Aufg. 1. Wenn durch einen Punkt eine Parallele zu einer Asymptote einer Hyperbel oder zum Durchmesser einer Parabel gezogen wird, so halbirt die Curve die in ihr gemessene Strecke zwischen dem Punkte und seiner Polare. Denn R'' ist in unendlicher Entfernung, also R' die Mitte von OR.

Aufg. 2. Wenn durch einen Punkt eine Sehne parallel zu seiner Polare gezogen wird, so ist dieselbe in ihm halbirt. Denn R ist unendlich entfernt und daher O die Mitte von $R'R''$.

Aufg. 3. Das Centrum ist derjenige Punkt, dessen Polare unendlich entfernt ist. Denn wenn die Polare von O unendlich entfernt ist, so schneidet jede durch O gehende Sehne sie in unendlicher Entfernung und wird also in O halbirt.

Aufg. 4. Jeder Durchmesser eines Kegelschnitts kann als die Polare des unendlich entfernten Punktes angesehen werden, in welchem seine Ordinaten sich schneiden. Denn sobald der feste Punkt selbst in unendlicher Ferne liegt, so werden die durch ihn gehenden Sehnen parallel und in seiner Polare halbirt. Die Gleichung der Polare eines Punktes (Art. 106)

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})\frac{y'}{x'}+(a_{13}x+a_{23}y+a_{33})\frac{1}{x'}=0$$

bestätigt diess, denn liegt $x'y'$ in unendlicher Ferne auf der Geraden $my = nx$, so ist $y' : x' = n : m$ und x' unendlich gross zu setzen, und die Gleichung der Polare wird

$m(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + n(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$, d. h. zur Gleichung des zu $my = nx$ conjugirten Durchmessers. (Art. 100.)

Aufg. 5. Das Segment auf einer Parallelen zur Polare eines Punktes, welches zwischen den von ihm aus an die Curve gehenden Tangenten liegt, wird von dem nach ihm gehenden Durchmesser halbirt. Denn wenn im zweiten der vorausgeschickten Sätze die eine der durch den Punkt gezogenen Geraden ein Durchmesser ist, so ist die andere dem ihm conjugirten Durchmesser parallel und die Polare jedes Punktes in einem Durchmesser ist parallel zum conjugirten Durchmesser.

Aufg. 6. Die Asymptoten bilden mit jedem Paar conjugirter Durchmesser ein harmonisches Büschel und der zwischen ihnen liegende Abschnitt einer Tangente wird im Berührungspunkt halbirt. Denn diess entspricht dem Falle des zweiten der obigen Sätze, wo der gewählte Punkt das Centrum ist. (Art. 204.)

295. Weit zahlreicher sind die Sätze, welche aus den Eigenschaften vom Doppelverhältniss von vier Punkten und von vier Tangenten eines Kegelschnitts hervorgehen*). Denn von den vier Punkten der Curve können wir einen oder zwei im Unendlichen denken und der Scheitel des Büschels kann selbst unendlich entfernt sein oder er kann mit einem der vier Punkte zusammenfallen, so dass eine der Strahlen zur Tangente des Kegelschnitts in diesem Punkte wird; endlich kann aber das Doppelverhältniss des Büschels auf einer beliebigen Geraden gemessen und diese kann insbesondere parallel zu einem der Strahlen des Büschels gewählt werden, so dass das Doppelverhältniss sich auf ein einfaches Verhältniss reducirt. Aehnlich bei dem Doppelverhältniss von vier Tangenten. Wir zeigen zuerst die beiden Fundamentaleigenschaften als Eigenschaften von Sechs-

*) Die Ausführung einer vollständigen Theorie der Kegelschnitte auf diesen beiden Grundeigenschaften giebt Chasles in seinem „*Traité des sections coniques*" (Paris 1865), wovon bis jetzt jedoch nur der erste Theil vorliegt.

ecken und Sechsseiten auf, welche von der Kegelschnittstheorie unabhängig sind. In den folgenden Aufgaben über specielle Fälle sodann geben wir nur die Lage des Büschels oder der Reihe, die Transversale oder den Punkt, an welchen das Doppelverhältniss gemessen wird und den resultirenden Satz an und überlassen die nähere Nachweisung seiner Beziehung zum allgemeinen Grundgesetz dem Leser zur Uebung. Die Aufgaben 3 bis 11 gehören zu dem Satz vom Doppelverhältniss von vier Punkten, 12 bis 14 zu dem vom Doppelverhältniss von vier Tangenten und 15 bis 24 geben Beispiele von Problemen, welche mit Hilfe dieser Eigenschaften einfach gelöst werden können.

Aufg. 1. Wenn von sechs Punkten A, B, C, D, E, F irgend vier C, D, E, F mit den beiden übrigen A, B Büschel von gleichem Doppelverhältniss bestimmen, so thun diess jede vier mit den übrigen zwei.

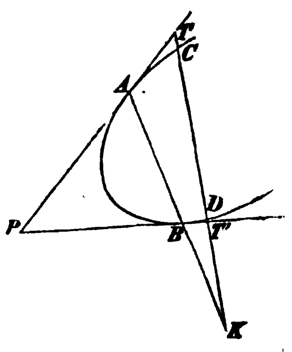
Wir beweisen zuerst, dass die Voraussetzung $\{A.CDEF\}=\{B.CDEF\}$ die Folge nach sich zieht, dass $\{C.ABEF\}=\{D.ABEF\}$ ist. Nennen wir die Durchschnitte der geraden Linie EF, welche die gemeinschaftlichen Punkte der Gruppen $CDEF$ und $ABEF$ verbindet, mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks $ABCD$ nämlich BC, AD; CA, BD; AB, CD respective G, G'; H, H'; K, K', so folgt aus $\{A\,.\,CDEF\} = \{B\,.\,CDEF\}$ die Relation $\{HG'EF\} = \{GH'EF\}$ oder $\{HGEF\} = \{G'H'EF\}$ und daher $\{C\,.\,ABEF\} = \{D\,.\,ABEF\}$. In derselben Art ergiebt sich der Beweis für die übrigen fünf Fälle, in welchen beiden Gruppen zwei Punkte gemeinsam angehören. Für die acht Fälle, in welchen dieselben drei gemeinsame Punkte enthalten, folgt aber der Satz hieraus ohne weiteren Beweis.

Aufg. 2. Wenn von sechs Geraden irgend vier mit den beiden übrigen Punktreihen von gleichem Doppelverhältniss stimmen, so thun es jede vier mit den übrigen zwei.

Der Beweis entspricht dem Vorigen genau nach dem Princip der Dualität.

Die Sätze von Pascal und Brianchon, von Steiner etc. gelten und beweisen sich unabhängig von den Kegelschnitten allgemein für solche Figuren aus sechs Punkten oder aus sechs Geraden.

Aufg. 3. $\{A\,.\,ABCD\} = \{B\,.\,ABCD\}$. Wenn man diese Doppelverhältnisse durch die Segmente der Linie CD misst, die von den Tangenten in A und B respective in T, T' und von der Sehne AB in K geschnitten wird, so sind sie $\{TCKD\}=\{KCT'D\}$, d. h. wenn eine



Sehne CD zwei Tangenten in T, T' und ihre Berührungssehne in K schneidet, so ist immer $KD.TK.CT' = CK.KT'.TD$. Natürlich ist bei Aufstellung der Doppelverhältnisse sorgfältig darauf zu achten, dass die entsprechenden Strahlen und die zugehörigen Punkte der Reihen in gleicher Ordnung folgen.

Aufg. 4. Wenn T und T' zusammenfallen, so wird $KD.CT = -KC.DT$; d. h. jede durch den Schnittpunkt von zwei Tangenten gehende Sehne wird von der Berührungssehne harmonisch getheilt.

Aufg. 5. Ist T' unendlich entfernt oder CD parallel PT', so erhält man $KT^2 = CT.DT$.

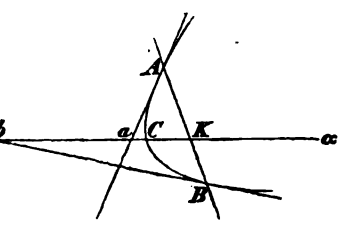
Aufg. 6. Ist einer von den vier Punkten des Kegelschnitts unendlich entfernt, so ist $\{O.ABC\infty\}$ constant. Misst man dann dieses Doppelverhältniss auf der Geraden $C\infty$ und schneiden OA, OB dieselbe in a, b respective, so reducirt sich das Doppelverhältniss auf $aC:bC$ und wir erhalten den Satz: Wenn zwei feste Punkte A, B einer Hyperbel oder Parabel mit einem veränderlichen Punkte O derselben Curve verbunden werden und die Verbindungslinien eine feste die Curve in C schneidende Parallele zu einer Asymptote (bei der Hyperbel) oder einem Durchmesser (bei der Parabel) in Punkten a, b schneiden, so ist das Verhältniss $aC:bC$, d. h. das Verhältniss der von diesen bis zur Curve gemessenen Abschnitte constant.

Aufg. 7. Wenn man dasselbe Doppelverhältniss auf einer andern Parallelen misst, so erfährt man, dass die geraden Verbindungslinien von drei festen Punkten einer Hyperbel oder Parabel mit einem veränderlichen Punkte derselben von einer festen Parallele zu einer Asymptote oder einem Durchmesser in Punkten a, b, c so geschnitten werden, dass $ab:ac$ constant ist.

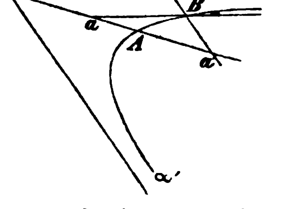
Aufg. 8. Setzen wir in der Aufg. 6 voraus, dass die geraden Linien, welche die Punkte A, B mit einem vierten Punkte O' verbinden, den Strahl $C\infty$ in a', b' schneiden, so ist $ab:a'b' = aC:a'C$; wird nun auch noch der Punkt C in unendlicher Entfernung gedacht, so dass die gerade Linie $C\infty$ eine Asymptote wird, so wird das Verhältniss $ab:a'b'$ der Einheit gleich und wir erhalten den Satz: Wenn in einer Hyperbel zwei feste Punkte mit einem veränderlichen Punkte verbunden werden, so bestimmen die Verbindungslinien in jeder Asymptote einen Abschnitt von unveränderlicher Länge. (Art. 207, Aufg. 1.)

Aufg. 9. $\{A.ABC\infty\} = \{B.ABC\infty\}$. Werden diese Doppelverhältnisse auf der geraden Linie $C\infty$ gemessen und schneiden die Tangenten in A und B dieselbe in a, b, die Berührungssehne AB aber in K, so ist $\frac{aC}{KC} = \frac{KC}{bC}$. Wenn also eine Parallele zu einer Asymptote

einer Hyperbel oder zum Durchmesser einer Parabel zwei Tangenten und ihre Berührungssehne schneidet, so ist der Abschnitt zwischen Curve und Berührungssehne das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten von der Curve zu den Tangenten. Oder umgekehrt: Wenn eine gerade Linie ab von fester Richtung die Seiten eines Dreiecks in Punkten a, b, K schneidet und ein Punkt C in ihr so bestimmt wird, dass $CK^2 = Ca \cdot Cb$ ist, so ist der Ort von C eine Parabel, wenn Cb der Halbirungslinie der Basis des Dreiecks parallel ist (Art. 219) und sonst immer eine Hyperbel, deren eine Asymptote zu ab parallel ist.



Aufg. 10. Sind zwei von den festen Punkten unendlich entfernt, so hat man z. B. $\{\infty . AB\infty\infty'\} = \{\infty' . AB\infty\infty'\}$ und die geraden Linien $\infty\infty$, $\infty'\infty'$ sind die beiden Asymptoten, $\infty\infty'$ aber ist unendlich ferne gerade Linie selbst. Misst man diese Doppelverhältnisse auf dem Durchmesser OA und wird diese Linie von den Parallelen zu den Asymptoten $B\infty$, $B\infty'$ in a, a' geschnitten, so ist $\frac{AO}{aO} = \frac{a'O}{AO}$, d. h. Parallelen zu den Asymptoten, die durch einen beliebigen Punkt einer Hyperbel gezogen werden, bestimmen in einem Halbdurchmesser vom Centrum aus gemessene Segmente, die diesen selbst zur mittleren geometrischen Proportionale haben.

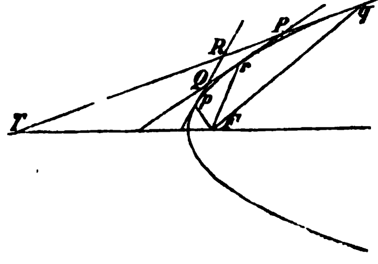


Wenn daher umgekehrt durch einen festen Punkt O eine gerade Linie gezogen wird, die zwei festen vom Punkt B ausgehenden Strahlen in den Punkten a, a' begegnet, so ist der Ort eines Punktes A auf ihr, dessen Abstand von O das geometrische Mittel zwischen Oa und $O'a'$ ist, eine Hyperbel, die den Punkt O zum Centrum und ihre Asymptoten parallel den festen Strahlen Ba, Ba' hat.

Aufg. 11. $\{\infty . AB\infty\infty'\} = \{\infty' . AB\infty\infty'\}$.

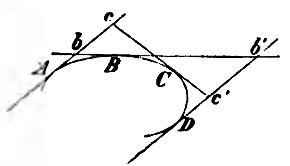
Werden die Segmente in den Asymptoten gemessen, so erhält man $\frac{aO}{bO} = \frac{b'O}{a'O}$, oder das Rechteck, welches von den durch irgend einen Punkt der Curve gezogenen Parallelen zu den Asymptoten gebildet wird, ist constant. (Art. 207.)

Aufg. 12. Die Eigenschaft vom Doppelverhältniss von vier Tangenten nimmt eine sehr einfache Form an im Falle der Parabel, wo eine der Tangenten ganz in unendlicher Entfernung ist: Drei feste Tangenten einer Parabel



schneiden jede vierte Tangente derselben in Punkten A, B, C so, dass $AB : AC$ constant ist. Fällt die veränderliche Tangente der Reihe nach mit jeder der gegebenen Tangenten zusammen, so erhalten wir den Satz $\frac{pQ}{QR} = \frac{RP}{Pq} = \frac{Qr}{rP}$.

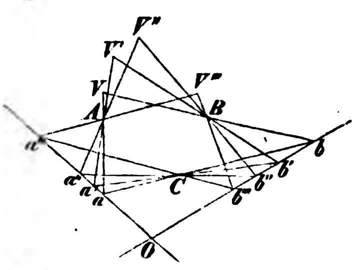
Aufg. 13. Wenn wir annehmen, dass zwei von den vier festen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel einander parallel sind und die veränderliche Tangente nach einander mit beiden zusammenfallen lassen, so ist im ersten Falle das Verhältniss $\frac{Ab}{Ac}$ und im zweiten $\frac{Dc'}{Db'}$; daher ist das Rechteck $Ab \,.\, Db'$ sonstant.



Aus dem Gesetz vom Doppelverhältniss von vier Punkten leitet man ab, dass die geraden Linien, welche die Punkte A, D mit einem beliebigen Punkte O der Curve verbinden, die parallelen Tangenten in Punkten b, b' schneiden, für welche das Rechteck $Ab \,.\, Db'$ gleichfalls constant ist.

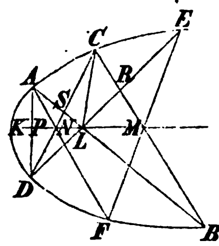
Aufg. 14. Wenn man die Asymptoten einer Hyperbel und zwei beliebige Tangenten derselben und die von ihnen auf den Asymptoten selbst bestimmten Doppelverhältnisse betrachtet, so entspringt für O als das Centrum und a, a'; b, b' als die Schnittpunkte der respectiven Tangenten mit den beiden Asymptoten die Relation $Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob'$, d. h. das Rechteck der Segmente ist constant, welche eine Tangente der Hyperbel auf den beiden Asymptoten derselben vom Centrum aus bestimmt.

Aufg. 15. Man soll Mac Laurin's Methode der Erzeugung der Kegelschnitte beweisen, bei welcher ein Kegelschnitt als der Ort der freien Ecke V eines Dreiecks gefunden wird, dessen Seiten sich um die festen Punkte A, B, C drehen, während zwei seiner Ecken sich in den festen geraden Linien Oa, Ob bewegen.



Wenn vier solche Dreiecke abV, $a'b'V'$, $a''b''V''$, $a'''b'''V'''$ verzeichnet sind, so ergiebt sich aus der Identität der Büschel $(C \,.\, aa'a''a''')$ und $(C \,.\, bb'b''b''')$ die Relation $\{aa'a''a'''\} = \{bb'b''b'''\}$ und daher auch $\{A \,.\, aa'a''a'''\} = \{B \,.\, bb'b''b'''\}$ oder $\{A \,.\, VV'V''V'''\} = \{B \,.\, VV'V''V'''\}$, d. h. die Punkte A, B, V, V', V'', V''' liegen in demselben Kegelschnitt. Wenn die ersten drei Lagen des beweglichen Dreiecks fest sind, so ist der Ort von V''' der durch die Punkte A, B, V, V', V'' gehende Kegelschnitt. Oder in Worten: Die Strahlenbüschel aus A und B sind projectivisch mit einander, weil sie beide mit dem Strahlenbüschel aus C projectivisch sind; daher ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ein durch A und B gehender Kegelschnitt. (Art. 293.)

Aufg. 16. Wenn vier Punkte A, D, F, B eines Kegelschnitts und zwei feste Gerade DC, DE aus einem derselben gegeben sind, so soll die Enveloppe der Sehne CE bestimmt werden, welche die ferneren Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve begrenzen.



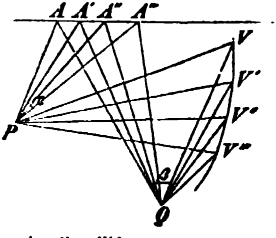
Die Ecken des Dreiecks CEM bewegen sich in den festen Geraden DC, DE, NL und zwei seiner Seiten gehen durch die festen Punkte B, F; daher umhüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt, der von den Geraden DC, DE berührt wird. Diess entspricht nach dem Princip der Dualität der Erzeugungsmethode von Mac Laurin.

Aufg. 17. Wenn vier Punkte A, B, D, E eines Kegelschnitts und zwei Gerade AF, CD aus zweien derselben gegeben sind, so geht die durch ihre ferneren Schnittpunkte mit der Curve bestimmte Sehne durch einen festen Punkt. (Vergl. Art. 283.)

Denn das Dreieck CFM hat zwei Seiten, welche durch die festen Punkte B, E gehen und seine Ecken bewegen sich auf den festen und in einem Punkt sich schneidenden Geraden AF, CD, NL; daher geht CF durch einen festen Punkt. (Diess entspricht nach dem Princip der Dualität dem Satze der Aufg. 2 im Art. 47.)

Aufg. 18. Chasles hat darauf aufmerksam gemacht, dass der Beweis in der Aufg. 15 noch anwendbar ist, wenn die Seite ab, anstatt durch einen festen Punkt C zu gehen, einen Kegelschnitt berührt, der die geraden Linien Oa, Ob zu Tangenten hat. Denn dann schneiden irgend vier Lagen der Seite ab diese Tangenten Oa, Ob so, dass $\{aa'a''a'''\} = \{bb'b''b'''\}$ ist (Art. 292) und die Fortsetzung des vorigen Beweises bleibt bestehen.

Aufg. 19. Die Methode der Erzeugung der Kegelschnitte von Newton zu beweisen: Zwei Winkel von onstanter Grösse drehen sich um ihre festen Scheitel P und Q und der Schnittpunkt des einen Paars ihrer Schenkel durchläuft eine gerade Linie AA'; dann ist der Ort des Schnittpunktes V ihrer andern Schenkel ein Kegelschnitt, welcher durch die beiden Punkte P und Q hindurchgeht. Denn sind, wie vorher, vier Lagen der sich drehenden Winkel gegeben, so ist $\{P.AA'A''A'''\} = \{Q.AA'A''A'''\}$;



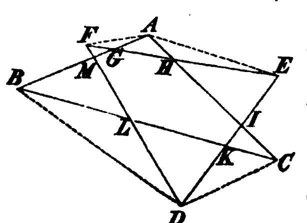
es ist aber $\{P.AA'A''A'''\} = \{P.VV'V''V'''\}$ und $\{Q.AA'A''A'''\} = \{Q.VV'V''V'''\}$, weil die entsprechenden Winkel beider Büschel übereinstimmen. Also ist $\{P.VV'V''V'''\} = \{Q.VV'V''V'''\}$, und der Ort von V''' ist wie vorher ein durch P, Q, V, V', V'' gehender Kegelschnitt.

Aufg. 20. Chasles hat auch diese Methode dadurch erweitert,

dass er den Punkt A anstatt in einer geraden Linie in einem durch die Punkte P und Q gehenden Kegelschnitt bewegt denkt; denn auch dann ist immer $\{P.AA'A''A'''\} = \{Q.AA'A''A'''\}$.

Aufg. 21. Der Beweis bleibt auch noch derselbe, wenn anstatt der Unveränderlichkeit der Winkel APV, AQV festgesetzt wäre, dass dieselben in festen geraden Linien constante Abschnitte bestimmen; denn auch dann gälte die Gleichheit der Doppelverhältnisse $\{P.AA'A''A'''\} = \{P.VV'V''V'''\}$, weil beide Büschel in einer festen geraden Linie Abschnitte von derselben Länge bestimmen. Wenn also die Basis eines Dreiecks und der von den Seiten desselben in irgend einer festen geraden Linie bestimmte Abschnitt gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kegelschnitt.

Aufg. 22. Die Ecken von zwei demselben Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiecken ABC, DEF sind sechs Punkte eines Kegelschnitts.



Denn die geraden Linien AB, AC, DE, DF bestimmen in den beiden andern BC und EF Punktreihen von gleichem Doppelverhältniss $\{BCKL\} = \{GHEF\}$; also ist auch $\{D.BCKL\} = \{A.GHEF\}$ oder $\{D.BCEF\} = \{A.BCEF\}$, was den Satz beweist.

Ebenso beweist man den Satz: Die Seiten von zwei demselben Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecken sind sechs Tangenten eines Kegelschnitts. Die Aufsuchung und den Beweis anderer den vorher entwickelten Eigenschaften nach dem Princip der Dualität entsprechenden Sätze überlassen wir dem Leser.

Aufg. 23. Das Doppelverhältniss von vier Durchmessern eines Kegelschnitts ist dem der respective conjugirten Durchmesser gleich. Die conjugirten Durchmesser bilden zwei projectivische Büschel aus dem Centrum als dem gemeinsamen Scheitel, oder die Richtungen der Paare conjugirter Durchmesser bilden zwei projectivische Reihen in der unendlich entfernten geraden Linie. Denn nach Art. 187 ist jedes Paar von conjugirten Durchmessern einem Paar von Supplementarsehnen parallel; und das Doppelverhältniss von vier aus einem Punkte der Curve gezogenen Sehnen dem Doppelverhältniss ihrer Supplementarsehnen gleich.

Aufg. 24. Ein Kegelschnitt ist einem gegebenen Viereck umgeschrieben; man soll den Ort seines Centrums bestimmen. (Vergl. Art. 114, Aufg. 3.)

Denkt man Durchmesser des Kegelschnitts nach den Mittelpunkten der Seiten des Vierecks gezogen, so ist ihr Doppelverhältniss dem ihrer respective conjugirten gleich und daher constant, weil diese den zugehörigen Seiten des Vierecks parallel sind. Der fragliche Ort ist daher ein durch die Mittelpunkte der gegebenen Seiten gehender Kegelschnitt. Da aber das betrachtete System drei Kegelschnitte enthält, welche in Paare von geraden Linien degenerirt sind, nämlich die Gegenseitenpaare und das

Diagonalenpaar des Vierecks, so sind die Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare und der Diagonalen gleichfalls Punkte des Ortes und es liegen also diese mit den Seitenmitten auf einem Kegelschnitt. Wäre einer der gegebenen Punkte unendlich entfernt, so erhält man als den Ort der Centra der Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte gehen und eine Asymptote zu einer festen Geraden parallel haben, eine Parabel. Allgemeiner ist der Ort des Pols einer festen Geraden in Bezug auf die durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ein Kegelschnitt.

296. Wenn man den Kegelschnitt als Erzeugniss von zwei projectivischen Büscheln betrachtet, und mit seiner Gleichung die einer Geraden $\xi x + \eta y + 1 = 0$ verbindet, so erhält man die Bestimmung der Schnittpunkte von beiden, wenn man zwischen den Gleichungen

$$A_1 + kA_2 = 0, \quad A_1' + kA_2' = 0, \quad \xi x + \eta y + 1 = 0$$

die Coordinaten x, y eliminirt. Man erhält zur Bestimmung derjenigen Werthe von k, welche den Schnittpunkten entsprechen, die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2, & b_1 + kb_2, & c_1 + kc_2 \\ a_1' + ka_2', & b_1' + kb_2', & c_1' + kc_2' \\ \xi \quad , & \eta \quad , & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

oder in entwickelter Form die Gleichung der Schnittpunkte $U + 2kV + k^2W = 0$, wenn wir durch U, V, W Polynome ersten Grades in ξ, η bezeichnen, nämlich

$$\xi(b_1c_1' - b_1'c_1) + \eta(c_1a_1' - c_1'a_1) + (a_1b_1' - a_1'b_1) \equiv U,$$
$$\xi(b_2c_2' - b_2'c_2) + \eta(c_2a_2' - c_2'a_2) + (a_2b_2' - a_2'b_2) \equiv W,$$
$$\xi(b_2c_1' + b_1c_2' - c_2b_1' - c_1b_2') + \eta(c_2a_1' + c_1a_2' - a_2c_1' - a_1c_2')$$
$$+ (a_2b_1' + a_1b_2' - b_2a_1' - b_1a_2') \equiv V.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich zwei Werthe von k zur Bestimmung der fraglichen Punkte. Soll die betrachtete Gerade eine Tangente der Curve sein, so müssen beide Schnittpunkte zusammenfallen, die zur Bestimmung von k dienende Gleichung muss also zwei gleiche Wurzeln haben, d. h. es gilt die Relation $UW - V^2 = 0$. Diese Gleichung wird durch die Coordinaten ξ, η aller Tangenten der Curve erfüllt und ist daher die schon im Art. 114 gefundene Gleichung der Curve in Liniencoordinaten oder ihre Tangentialgleichung. Sie ist in ξ, η vom zweiten Grade, d. h. die Curve zweiter Ordnung ist im Allgemeinen immer auch von der zweiten Classe*). Wenn man auf

*) Dass diese Uebereinstimmung der Ordnung und Classe bei Curven höhern Grades nicht im Allgemeinen stattfindet, sei hier besonders bemerkt.

ihre Form die vorigen Betrachtungsweisen anwendet, so sieht man, dass $U = 0$, $W = 0$ die Gleichungen von zwei Punkten der Curve sind, während $V = 0$ den Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten oder den Pol der Verbindungslinie jener Punkte darstellt.

297. Von dem Gesetz des vorigen Art. existiren zwei Ausnahmefälle: Es giebt einen Ort zweiter Ordnung, der nicht von der zweiten Classe ist und eine Enveloppe zweiter Classe, die nicht von der zweiten Ordnung ist. Wenn die beiden erzeugenden projectivischen Büschel einen Strahl entsprechend gemein haben, so dass z. B. die entsprechenden Strahlen $A_1 = 0$ und $A_1' = 0$ sich decken, so nehmen die Gleichungen der beweglichen Strahlen beider Büschel die specielle Form an $A_1 + kA_2 = 0$, $A_1 + kA_2' = 0$ und die Elimination von k liefert für den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen die Gleichung $A_1(A_2' - A_2) = 0$. Der Ort ist also aus zwei geraden Linien zusammengesetzt, die durch $A_1 = 0$ und $A_2' - A_2 = 0$ dargestellt sind; die erste ist der gemeinschaftliche Strahl, die gerade Linie durch beide Scheitel; die zweite ist der Ort der Schnittpunkte aller übrigen entsprechenden Strahlen: Die Büschel sind in perspectivischer Lage. (Art. 59.)

Ganz das Analoge entspringt aus der Voraussetzung, dass in dem gemeinschaftlichen Punkte von zwei projectivischen Reihen zwei entsprechende Punkte derselben vereinigt sind. Die Reihen selbst sind dann in der Form $U_1 + \lambda U_2 = 0$, $U_1 + \lambda U_2' = 0$ darstellbar und der erzeugte Kegelschnitt ist in $U_1(U_2' - U_2) = 0$ gegeben. Er besteht also aus zwei Punkten, dem gemeinsamen sich selbst entsprechenden Punkte $U_1 = 0$ und dem Punkte $U_2' - U_2 = 0$, in welchem die Verbindungslinien aller andern entsprechenden Punktepaare zusammenlaufen. Die Punktreihen sind in perspectivischer Lage. Für ein Paar von Geraden ACE, BDF besteht aber noch die Construction des Pascal'schen Sechsecks für sechs beliebige Punkte A, B, C, D, E, F auf ihnen (Art. 284, Aufg. 1) und für ein Paar von Punkten die des Brianchon für sechs beliebige Gerade durch sie.

298. Die grosse Bedeutung, welche nach den Ergebnissen der vorigen Art. die Lehre von den projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln für die verschiedensten Theile der Theorie

der Kegelschnitte offenbar besitzt, führt uns auf diese Grundgebilde selbst zurück. Die gründliche Untersuchung der Elementarformen, als aus welchen die Kegelschnitte entstehen, wird die der letzteren erleichtern.

In projectivischen Büscheln oder Reihen entspricht einem Punkte oder Strahl im einen ein Punkt oder Strahl im andern und umgekehrt, und vier entsprechende Strahlen oder Punkte haben in beiden gleiches Doppelverhältniss. Wie aus dem ersten das letztere, so folgt auch aus diesem jenes. Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse $\frac{k-l}{n-l} : \frac{k-m}{n-m} = \frac{k'-l'}{n'-l'} : \frac{k'-m'}{n'-m'}$ folgt durch Entwickelung $a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$, wenn a, b, c, d von k, l, m, k', l', m' allein abhängige Constanten, λ, λ' aber die Theilverhältnisse zusammengehöriger Elemente n, n' sind. Diese Gleichung gestattet zu jedem Werthe von λ den entsprechenden Werth von λ' zu finden und liefert für jeden Werth des einen nur einen bestimmten Werth des andern. Drei Paare entsprechender Elemente bestimmen die beiden projectivischen Elementarformen (Art. 59) und diese Gleichung, als welche nur drei unbestimmte Coefficienten enthält und deren Hauptcharakter es ist, dass sie die allgemeinste Gleichung vom ersten Grade in Bezug auf λ sowohl als auf λ' ist. Man kann sagen: Zwei Reihen von Punkten oder Büschel von Strahlen oder von Punkten und Strahlen, die in einer geometrischen Abhängigkeit stehen, sind projectivisch, sobald einem Elemente des einen nur und immer ein Element des andern entspricht und umgekehrt. (Man vergleiche hiermit die Hauptsätze über das Auftreten projectivischer Gebilde bei den Kegelschnitten, besonders Art. 288 und 292 und weiterhin Art. 301 und 302.)

Eine Substitution zeigt, dass das Doppelverhältniss $\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda''-\lambda'} : \frac{\lambda-\lambda'''}{\lambda''-\lambda'''}$ unverändert bleibt, wenn man $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ durch Werthe von der Form des aus jener Relation hervorgehenden Ausdrucks für λ' oder respective $-\frac{b\lambda+d}{a\lambda+c}, -\frac{b\lambda'+d}{a\lambda'+c}$, etc. ersetzt. Die Elemente für $\lambda' = -\frac{b}{a}$ und $\lambda = -\frac{c}{a}$ entsprechen den Elementen, für welche respective $\lambda = \infty$ oder $\lambda' = \infty$ sind;

ebenso $\lambda' = -\frac{d}{c}$ und $\lambda = -\frac{d}{b}$ denen für $\lambda = 0$ oder $\lambda' = 0$. Diese Coefficientenverhältnisse bestimmen also die den beiden Fundamentalpunkten jeder Reihe entsprechenden Punkte der andern Reihe. Den Werthen $\lambda = \mp 1$ entspricht $\lambda' = \pm \frac{b \mp d}{c \mp a}$, etc.; ebenso für Strahlbüschel.

Wird das erste Paar der Fundamental-Elemente einander entsprechend gedacht, so ist für $\lambda = 0$ auch $\lambda' = 0$, d. h. $d = 0$; ebenso bedingt das Entsprechen des zweiten Paars derselben wegen $\lambda' = \infty$ für $\lambda = \infty$ die Relation $a = 0$, d. h. jener Voraussetzung entspricht die Form $a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' = 0$, dieser die Form $b\lambda + c\lambda' + d = 0$ der Gleichung der Projectivität, oder $\frac{b}{a\lambda'} + \frac{c}{a\lambda} = -1$, $\frac{b\lambda}{d} + \frac{c\lambda'}{d} = -1$ respective. Beide Voraussetzungen zugleich geben ihr die Gestalt $b\lambda + c\lambda' = 0$ oder $\lambda : \lambda' = -c : b =$ const. Und lassen wir die Elemente sich wechselseitig entsprechen oder $\lambda = 0$ werden, wenn $\lambda' = \infty$ wird und $\lambda' = 0$ für $\lambda = \infty$, so folgt $c = 0$, $b = 0$ oder die Relation der Projectivität $a\lambda\lambda' + d = 0$, d. h. $\lambda\lambda' = -d : a =$ const. Da die Werthe $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$ sich entsprechen, wenn $a + b + c + d = 0$ ist, so ist diess für projectivische Punktreihen die Bedingung ihrer Aehnlichkeit. Für Strahlbüschel können die Fundamentalstrahlen in beiden Büscheln rechtwinklig zu einander sein; denn für zwei zu einander rechtwinklige Strahlen des einen Büschels ist das Product ihrer Theilverhältnisse gleich -1, so dass die Theilverhältnisse der entsprechenden Strahlen des andern Büschels die Werthe $\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c}$, $\frac{b - d\lambda}{a - c\lambda}$ erhalten und als die Bedingung ihrer Rechtwinkligkeit die quadratische Gleichung

$\lambda^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ac + bd}\lambda = 1$ geben. Sie liefert zwei stets reelle Werthe, die den beiden entsprechenden Strahlen des zugehörigen orthogonalen Paares angehören. Nur für die gleichzeitige Erfüllung von $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, $ac + bd = 0$, d. h. für $a = \pm d$, $b = \mp c$ giebt es unendlich viele solche Paare entsprechender rechtwinkliger Strahlen, d. h. für einstimmig gleiche oder entgegengesetzt gleiche Büschel. Das Beispiel des

Kreises zeigt die unendliche Zahl der Paare orthogonaler entsprechender Strahlen bei einstimmig gleichen Büscheln.

299. Wenn zwei projectivische Punktreihen in derselben geraden Linie liegen oder zwei projectivische Büschel denselben Scheitel haben, so können Paare von entsprechenden Punkten oder entsprechenden Strahlen in einen Punkt oder Strahl zusammenfallen. Da dem Element $A_1 + \lambda A_2 = 0$ des einen das Element $(a\lambda + c)A_1 - (b\lambda + d)A_2 = 0$ des andern entspricht, so findet das Zusammenfallen entsprechender Elemente statt für die zwei durch Elimination von A_1, A_2 zwischen diesen Gleichungen bestimmten Werthe von λ, d. h. für die, welche aus der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \lambda \\ a\lambda + c, & b\lambda + d \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d = 0$$

hervorgehen. Lässt man diese Doppelelemente zu fundamentalen werden, so stellen sich beide Gebilde in der Form

$$A_1 + m\lambda A_2 = 0, \quad A_1 + m'\lambda A_2 = 0$$

dar und das Doppelverhältniss, welches zwei entsprechende Elemente mit den Doppelelementen bestimmen, ist constant, nämlich $= m : m'$. Für $(b + c)^2 = 4ad$ fallen beide Doppelelemente zusammen; $(b + c)^2 \geqq 4ad$ bedingt ihre Realität*). Sind die auf einander gelegten Strahlbüschel gleich, so sind unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinatenaxen ihre Gleichungen

$$A_1 + \lambda A_2 = 0, \ (A_1 \cos\alpha - A_2 \sin\alpha) + \lambda\,(A_1 \sin\alpha + A_2 \cos\alpha) = 0$$

und die Doppelstrahlen daher durch

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \lambda \\ \lambda\sin\alpha + \cos\alpha, & \lambda\cos\alpha - \sin\alpha \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } \lambda^2 + 1 = 0, \text{ d. i. } \lambda = \pm i$$

gegeben. In der That bilden die Strahlen, für welche die Tangente ihres Winkels gegen die Axe A_1 oder x den Werth i hat, gleiche Winkel gegen alle Richtungen; denn für $\alpha = \text{arc} . \tan i$ wird

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} = \frac{i - \tan\beta}{1 + i \tan\beta} = i.$$

Wenn zwei projectivische Reihen in derselben Geraden liegen, so kann ferner jeder Punkt derselben als jeder von beiden Reihen angehörig betrachtet werden und es entspricht ihm in der

---

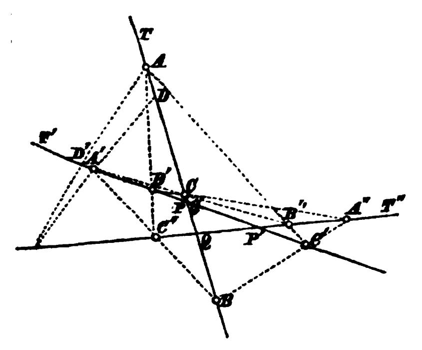
*) Für die Construction der Doppelstrahlen und also auch der Doppelpunkte vergleiche man Art. 308, Aufg. 6.

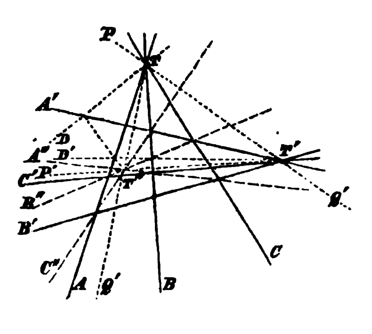
jedesmaligen andern Reihe ein anderer Punkt, je nachdem man ihn der ersten oder der zweiten Reihe zuzählt. Dem Punkte vom Theilverhältniss μ entspricht als einem zur Reihe λ gehörigen Punkte der Punkt $\lambda' = -\frac{b\mu + d}{a\mu + c}$ und als einem zur Reihe λ' gehörigen der Punkt $\lambda = -\frac{c\mu + d}{a\mu + b}$; ebenso bei concentrischen Strahlbüscheln. Wenn aber $b = c$ ist, so entspricht dem Werthe μ ebensowohl in der Reihe λ als in der Reihe λ' der Werth $-\frac{b\mu + d}{a\mu + b}$. Die Relation $a\lambda\lambda' + b(\lambda + \lambda') + d = 0$ bezeichnet also zwei projectivische Gebilde in derselben Geraden oder um denselben Punkt, in denen zwei entsprechende Elemente sich **wechselseitig** entsprechen, d. h. so, dass man jedes von ihnen ebensowohl zum einen als zum andern Gebilde rechnen kann, ohne ihr Entsprechen zu stören. Solche Reihen oder Büschel bilden eine **Involution**. Jede zwei projectivische Gebilde in derselben Geraden oder um denselben Punkt können in involutorische Beziehung gebracht werden, indem man die Elemente beider Gebilde, welche einem und demselben Elemente entsprechen, je nachdem es zu dem einen oder andern gerechnet wird, zur Deckung bringt; denn jenes einmalige wechselseitige Entsprechen fordert die Relation $b = c$ und diese bedingt das **jedesmalige** wechselseitige Entsprechen. Aus der Entstehung der Involution ergiebt sich, dass eine Involution aus Paaren von Elementen besteht, also z. B. aus Paaren von Punkten a, a'; b, b'; etc. und dass das Doppelverhältniss von vier Punkten der Reihe dem ihrer vier entsprechenden gleich ist; also drückt z. B.

$\{abca'\} = \{a'b'c'a\}$ oder $\frac{ab}{cb} : \frac{aa'}{ca'} = \frac{a'b'}{c'b'} : \frac{a'a}{c'a}$, d. h. auch $ab \,.\, ca' \,.\, b'c' = a'b' \,.\, c'a \,.\, cb$ das involutorische Entsprechen aus. Denken wir insbesondere c' als den unendlich entfernten Punkt der Reihe, so giebt $\{acb\infty\} = \{a'\infty b'c\}$ wegen $a\infty = b\infty$, $a'\infty = b'\infty$ die einfache Relation $ac \,.\, a'c = bc \,.\, b'c$, d. h. **der Punkt, welcher dem unendlich fernen Punkte der Reihe entspricht, liegt so, dass das Product seiner Entfernungen von den Punkten eines Paars constant** ist. Man nennt ihn den **Centralpunkt der Involution**. Es ist entweder $ca \,.\, ca' = \pm\, q^2$, d. h. die ent-

sprechenden Punkte liegen entweder auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Centralpunktes. Man erkennt aus der Relation des Centralpunktes z. B., dass Kreise, die das nämliche Radicalcentrum haben, in jeder durch dasselbe gehenden Geraden eine Involution bestimmt.

300. Nach dem Vorigen können projectivische Systeme in derselben Geraden oder aus demselben Punkte durch eine blosse Lagenveränderung in doppelter Weise involutorisch gemacht werden, indem man die Elemente von beiden Systemen zum Zusammenfallen bringt, welche dem nämlichen Element im jedesmaligen anderen entsprechen, wenn man es nach einander als dem einen und dem andern System angehörig betrachtet. Da nun zwei projectivische Punktreihen in verschiedenen Geraden von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene aus durch projectivische Büschel projicirt und zwei projectivische Strahlbüschel von verschiedenen Scheiteln durch eine beliebige Gerade ihrer Ebene in projectivischen Büscheln geschnitten werden, so entspringt die Frage nach dem Ort der Punkte, für welche insbesondere jene Büschel in Involution, und nach der Enveloppe der Geraden, für welche insbesondere jene Reihen in Involution sind. Man beantwortet sie durch folgende Betrachtungen.





Wenn in zwei projectivischen Reihen von Punkten $A, B, \ldots$; $A', B', \ldots$ in verschiedenen Geraden T, T' die entsprechenden Punkte wechselsweis durch Gerade mit einander verbunden werden, so schneiden sich die zu-

Wenn in zwei projectivischen Büscheln von Geraden $A, B, \ldots$; $A', B', \ldots$ von verschiedenen Scheiteln T, T' die entsprechenden Strahlen wechselsweis zum Durchschnitt gebracht werden, so liegen die zusammengehörigen Paare

sammengehörigen Paare derselben $AB', A'B$; $AC', A'C$; $BC', B'C$; etc. in Punkten C'', B'', A'' einer Geraden T'', welche die Punkte P' und Q enthält, die dem gemeinschaftlichen Punkte beider Reihen P, Q' in der jedesmaligen andern Reihe entsprechen.

der Schnittpunkte AB', $A'B$; BC', $B'C$; CA', $C'A$; etc. in Geraden C'', B'', A'' eines Büschels T'', welches die Strahlen P' und Q enthält, die dem gemeinschaftlichen Strahl beider Büschel P, Q' in dem jedesmaligen andern Büschel entsprechen.

Denn man hat nach der Voraussetzung die Relation $\{A\,.\,A'B'C'\ldots\} = \{A'\,.\,ABC\ldots\}$ und da AA' zwei entsprechende Elemente vereinigt, so sind die darin betrachteten Gebilde in perspectivischer Lage und der Satz ist der Ausdruck derselben.

Man erkennt zuerst, dass diese Sätze zur bequemsten Construction entsprechender Elementenpaare von projectivischen Gebilden führen, sobald drei Paare entsprechender Elemente von beiden gegeben sind; wir empfehlen die speciellen Fälle zur besonderen Uebung. Wenn die beiden gegebenen Gebilde selbst perspectivisch zu einander sind, so ist das Centrum oder die Axe dieser Perspective der Pol respective die Polare der Geraden oder des Punktes der vorigen Sätze. Diese Gerade und dieser Punkt entsprechen aber zugleich der oben gestellten Frage, denn

die Gerade des ersten Satzes ist der Ort der Scheitel aller der involutorischen Büschel, welche über den beiden gegebenen projectivischen Reihen gebildet werden können.

der Punkt des zweiten Satzes ist die Enveloppe aller der Geraden, welche durch ihren Schnitt mit den beiden gegebenen projectivischen Büscheln Reihen in Involution erzeugen.

Im ersten Falle entspricht dem Strahl, welcher von dem in jener Geraden gewählten Scheitel nach dem gemeinschaftlichen Punkte beider Reihen geht, diese Gerade selbst in gleicher Weise, ob man ihn nun dem ersten oder zweiten Büschel zuzählt; und im zweiten Falle entspricht dem Punkte, in welchem die durch jenen Punkt gezogene Gerade den gemeinschaftlichen Strahl beider Büschel schneidet, dieser Punkt selbst in gleicher Weise, ob man ihn nun der ersten oder zweiten Reihe angehörig betrachtet. Darin ist aber nach dem Vorhergehenden die involutorische Beziehung begründet.

Wenn die beiden betrachteten projectivischen Reihen oder Büschel auf Tangenten oder um Punkte eines Kegelschnitts gebildet sind, so liefern die Gerade und der Punkt der Sätze dieses Artikels die Polare des Schnittpunktes der beiden Tangenten und respective den Pol der Verbindungslinie der Scheitel; sind die projectivischen Reihen perspectivisch und auf einem Kegelschnitt gelegen, so kommt man ebenso vom Pol zur Polare und umgekehrt und erkennt so die Beziehungen der harmonischen Pole und Polaren zur Involution auch auf diesem Wege.

301. Nach dem Früheren enthält eine Involution im Allgemeinen **zwei sich selbst entsprechende oder doppelte Elemente**, nach den Werthen von λ, welche aus $a\lambda^2 + 2b\lambda + d = 0$ hervorgehen. Ist f ein Doppelelement, so ist $\{afba'\} = \{a'fb'a\}$, d. h. $\frac{af}{a'f} : \frac{ab}{a'b} = \frac{a'f}{af} : \frac{a'b'}{ab'}$ oder $\overline{af}^2 : \overline{a'f}^2 = ab \,.\, ab' : a'b \,.\, a'b'$ und es ist somit das Verhältniss der äusseren oder inneren Theilung der Strecke aa' durch das Element f bestimmt. Sind f_1, f_2 die beiden doppelten Elemente, so ist nothwendig

$\{af_1f_2a'\} = \{a'f_1f_2a\}$, d. h. $\frac{af_1}{f_2f_1} : \frac{aa'}{f_2a'} = \frac{a'f_1}{f_2f_1} : \frac{a'a}{f_2a}$ oder

$\frac{f_1a}{f_2a} = -\frac{f_1a'}{f_2a'}$, oder **das Paar der Doppelelemente bestimmt mit jedem Paar entsprechender Elemente ein harmonisches Gebilde.** Sie sind reell oder imaginär, je nachdem die entsprechenden Punkte der Involution auf gleichen oder entgegengesetzten Seiten des Centralpunktes liegen, weil dem entsprechend $\overline{cf}^2 = \pm\, q^2$ ist*). Wenn insbesondere in einer involutorischen Reihe einer der Doppelpunkte unendlich entfernt ist, so halbirt der andere die Entfernung zwischen je zwei entsprechenden Punkten, und die Entfernung der Punkte ab ist der der entsprechenden Punkte $a'b'$ gleich oder **ähnliche Punktreihen sind nur dann in Involution, wenn sie entgegengesetzt gleich sind.** Können die Doppelelemente sich decken und unter welchen Umständen?

Endlich giebt es nach der am Schlusse des Art. 298 gegebenen Formel ein Paar von entsprechenden zu einander recht-

*) Man hat die Doppelelemente auch als **Brennpunkte** und **Brennstrahlen der Involution** bezeichnet.

winkligen Strahlen in jedem involutorischen Büschel, welches durch die Relation $\lambda^2 - \frac{a-d}{b}\lambda = 1$ bestimmt ist. Man bezeichnet diese beiden Strahlen als Axen der Involution; sie halbiren die von den Doppelstrahlen der Involution $a\lambda^2 + 2b\lambda + d = 0$ gebildeten Winkel. (Art. 88.) In dem Falle der gleichzeitigen Relationen $a = d$, $b = 0$ sind sie unbestimmt, d. h. in dem Falle der einstimmig gleichen Büschel. Die Drehung eines rechten Winkels um seinen Scheitel beispielsweise erzeugt ein involutorisches Büschel; seine Doppelstrahlen entsprechen wie oben den Werthen $\lambda = \pm i$.

Man kann schliesslich diese Beziehung der Involution mit Hilfe des im Art. 299 Begründeten ähnlich aussprechen, wie den Hauptsatz vom projectivischen Entsprechen. Man denke einen beliebigen Punkt in der Geraden der beiden Reihen oder eine beliebige Gerade durch den Scheitel der beiden Büschel und zu diesem Element stets das harmonisch conjugirte in Bezug auf zwei entsprechende Elemente der Involution bestimmt; dann bilden diese harmonisch conjugirten Elemente ein Gebilde von unveränderlichem Doppelverhältniss, wie auch jenes Element gewählt war; oder die Gebilde, welche zwei verschiedenen Elementen so entsprechen, sind projectivisch. Der Hauptsatz des Art. 298 liefert den Beweis. Man darf jenes Doppelverhältniss als das der involutorischen Paare selbst bezeichnen und kann sagen: Wenn zwei Gebilde (Punktreihen oder Strahlbüschel oder Reihe und Büschel) einander so entsprechen, dass jedem Element des ersten ein Element des zweiten und jedem Element des zweiten zwei Elemente des ersten in gleicher Weise entsprechen, so sind diese Paare von Elementen in Involution und entsprechen den Elementen des zweiten Gebildes nach gleichem Doppelverhältniss. In den folgenden Aufgaben stellen wir einige Fälle der Involution zusammen, wie sie schon im Früheren aufgetreten sind.

Aufg. 1. Wenn man von jedem Punkte einer geraden Linie aus die beiden Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, so begegnen diese irgend einer festen Tangente in zwei Punkten, die ein involutorisches System bilden und deren Paare den Punkten jener geraden Linie nach gleichem Doppelverhältniss entsprechen. Die in den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit dem Kegelschnitt an diesen gezogenen Tangenten bestimmen in der festen Tangente die Doppelpunkte dieser Involution.

insbesondere bestimmen die Paare der parallelen Tangenten in einer festen Tangente eine involutorische Reihe, die in den Asymptoten ihre Doppelpunkte hat.

Aufg. 2. Wenn man von einem festen Punkte aus Transversalen nach einem gegebenen Kegelschnitt und von einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts aus nach den Endpunkten der bezüglichen Sehnen die Geraden zieht, so bilden diese ein Büschel involutorischer Paare und entsprechen dem Büschel der Transversalen projectivisch. Die Doppelstrahlen gehen nach den Berührungspunkten der von jenem Punkte aus an den Kegelschnitt möglichen Tangenten. Wenn umgekehrt die Schenkel von Winkeln aus einem Punkte eines Kegelschnitts Paare einer Involution sind, so gehen die von ihnen bestimmten Sehnen durch einen Punkt; also insbesondere die von rechten Winkeln und die von solchen, deren Schenkel gegen eine feste gerade Linie gleich geneigt sind. (Art. 189, Aufg. 2.)

Aufg. 3. Wenn man durch einen Punkt des Kegelschnitts gerade Linien nach den Enden von zwei Sehnen desselben zieht, so bilden sie mit der Tangente desselben und dem nach dem Schnittpunkt der Sehnen gehenden Strahl drei Paare in Involution.

Aufg. 4. Wenn ein Vierseit einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, so bilden die Schnittpunkte einer beliebigen Tangente desselben mit den Paaren der Gegenseiten, der Berührungspunkt und der Durchschnitt mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare drei Paare in Involution.

Aufg. 5. Auf jeder geraden Linie in der Ebene eines Kegelschnitts liegt eine involutorische Reihe von in Bezug auf ihn conjugirten Punkten oder harmonischen Polen. Die Doppelpunkte derselben sind die Punkte, welche sie mit dem Kegelschnitt gemein hat. Von jedem Punkte aus geht ebenso ein involutorisches Büschel von conjugirten Geraden oder harmonischen Polaren, welches die von ihm an den Kegelschnitt gehenden Tangenten zu Doppelstrahlen hat. (Art. 300.)

Aufg. 6. Auf der unendlich entfernten geraden Linie liegt eine Involution von Punktepaaren, die in Bezug auf jeden Kreis conjugirt sind (Art. 121); die Doppelpunkte dieser Involution sind die imaginären unendlich fernen Punkte aller Kreise derselben Ebene. (Art. 277. Vergl. oben den Fall der Doppelstrahlen mit $i = \pm 1$.)

Aufg. 7. Die Richtungen von zwei zu einander rechtwinkligen geraden Linien sind harmonisch conjugirt zu den imaginären unendlich entfernten Kreispunkten und umgekehrt.

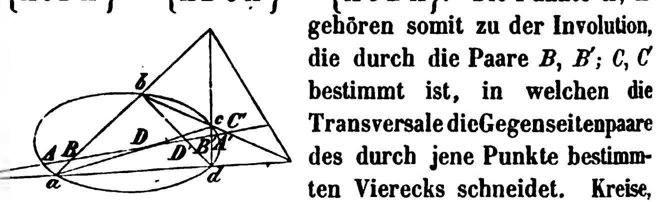
Aufg. 8. Vom Centrum eines Kegelschnitts aus geht ein involutorisches Büschel harmonischer Polaren, nämlich conjugirter Durchmesser, dessen Doppelstrahlen die Asymptoten sind. Das Paar der entsprechenden rechtwinkligen Strahlen dieses Büschels bilden die Axen des Kegelschnitts.

Aufg. 9. Aus dem Satze der zweiten Aufgabe folgt die einfache Construction der Axen und Doppelstrahlen eines durch zwei Strahlenpaare A, A'; B, B' bestimmten involutorischen Büschels: Man legt durch den Scheitel des Büschels einen Kreis und zieht die den Paaren A, A'; B, B'

entsprechenden Sehnen; sie schneiden sich in einem Punkte P, durch welchen die Sehnen aller Paare der Involution gehen. Das rechtwinklige Paar hat seine Enden in dem durch P gehenden Durchmesser; das Paar der Doppelstrahlen geht nach den Berührungspunkten der Tangenten, die man von P aus an den Kreis ziehen kann. Es ist offenbar, dass man durch dieselbe Construction die Doppelpunkte einer involutorischen Reihe bestimmen kann.

302. **Die Kegelschnitte eines Systems, welche die nämlichen vier Punkte enthalten, schneiden eine beliebige Gerade in Punktpaaren einer Involution.**

Denn nach der Eigenschaft vom Doppelverhältniss von vier Punkten eines Kegelschnitts ist $\{a.AdbA'\} = \{c.AdbA'\}$, und wenn man diese Büschel mit der Transversale AA' durchschneidet, somit $\{ACBA'\} = \{AB'C'A'\} = \{A'C'B'A\}$. Die Punkte A, A' gehören somit zu der Involution, die durch die Paare B, B'; C, C' bestimmt ist, in welchen die Transversale die Gegenseitenpaare des durch jene Punkte bestimmten Vierecks schneidet.



Kreise, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, oder allgemeiner Kreise von derselben Radicalaxe schneiden jede gerade Linie in Punktepaaren einer Involution; die Radicalaxe bestimmt den Centralpunkt, die zwei Kreise des Systems, welche die Gerade berühren, geben die Doppelpunkte an.

Nach dem Princip der Dualität entspricht dem vorigen Hauptsatz der andere: **Die Kegelschnitte eines Systems, welche die nämlichen vier Geraden berühren, haben mit einem beliebigen Punkte Tangentenpaare in Involution gemein.** Da speciell die Diagonalen ac, bd eines Vierecks $abcd$ einen Kegelschnitt durch die vier Punkte bilden, so schneidet jede Transversale die vier Seiten und die Diagonalen eines Vierecks in Punktepaaren BB', CC', DD', welche in Involution sind. Und jeder Punkt bestimmt mit den Gegenecken und den Gegenseitenschnittpunkten eines vollständigen Vierseits drei Paare von involutorischen Geraden.

Das vorige Gesetz erlaubt, in der durch zwei Paare BB', DD' bestimmten Involution den Punkt C' zu construiren, welcher dem Punkte C entspricht: Wir ziehen aus einem beliebigen Punkte a die geraden Linien aB, aD, aC und construiren ein Dreieck bcd,

dessen Ecken in diesen drei Linien respective liegen, während zwei seiner Seiten durch die Punkte B', D' gehen; die dritte Seite desselben geht durch C'. Man kann den Punkt a in unendlicher Entfernung wählen und hat dann in aB, aD, aC drei Parallelen. Für C als in unendlicher Ferne liefert dieselbe Construction das Centrum der Involution. Am einfachsten bestimmt man dasselbe aber so: Man zieht durch B und D die parallelen geraden Linien Bb, Dc und durch B' und D' das andere Paar von Parallelen $D'b$ und $B'c$, so geht die gerade Linie bc durch das Centrum des Systems.

Aufg. 1. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so schneidet eine Transversale diesen und zwei Seiten des Dreiecks, die dritte Seite und die Tangente des Kegelschnitts in der gegenüberliegenden Ecke in sechs Punkten einer Involution. Denn die Tangente bildet mit dem Dreieck ein eingeschriebenes Viereck.

Aufg. 2. Jede Transversale schneidet einen Kegelschnitt und zwei feste Tangenten desselben in zwei Punktepaaren, welche eine Involution bestimmen, die in der Berührungssehne jener festen Tangenten desselben einen Doppelpunkt hat. Denn die Berührungssehne bildet als ein Paar von Gegenseiten mit den Tangenten ein eingeschriebenes Viereck.

Man bildet leicht die nach dem Princip der Dualität entsprechenden Sätze.

Aufg. 3. In jeder Transversale werden von einer Hyperbel und ihren Asymptoten Segmente bestimmt, die denselben Mittelpunkt haben. Denn in diesem Falle ist einer der Doppelpunkte in unendlicher Entfernung.

Aufg. 4. Wenn zwei Kegelschnitte einem Viereck umgeschrieben sind, so sind die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente zu ihren Schnittpunkten mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks harmonisch conjugirt. Denn sie sind die Doppelpunkte der Involution, welche diese bestimmen.

Aufg. 5. Wenn drei Kegelschnitte demselben Viereck umgeschrieben sind, so wird eine gemeinschaftliche Tangente von zweien unter ihnen durch den dritten harmonisch getheilt.

Aufg. 6. Wenn man durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Sehnen von zwei Kegelschnitten eine Tangente an den einen derselben legt, so wird diese durch den andern harmonisch getheilt. Denn jener Punkt ist ein Doppelpunkt, etc. Darum halbirt der Berührungspunkt einer zur Radicalaxe zweier Kreise parallelen Tangente die in ihr gelegene Sehne und in allen Sehnen des einen von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten, welche Tangenten des andern sind, giebt der Berührungspunkt die Mitte an. (Art. 244, Aufg. 4.)

Aufg. 7. Wenn zwei Kegelschnitte mit einander in doppelter Berührung sind (oder wenn sie eine Berührung dritter Ordnung mit einander

haben), so wird jede Tangente des einen in ihren Schnittpunkten mit dem andern und in dem Schnittpunkte mit der Berührungssehne beider Kegelschnitte harmonisch getheilt. Denn die gemeinschaftlichen Sehnen fallen zusammen, etc. Die Anwendung auf concentrische Kreise, überhaupt ähnliche concentrische und ähnlich gelegene Kegelschnitte ist offenbar.

Aufg. 8. Man soll einen Kegelschnitt durch vier Punkte a, b, c, d construiren, der eine gegebene Gerade berührt. Der Berührungspunkt ist einer der Doppelpunkte des Systems involutorischer Paare, welches in der Geraden durch die Schnittpunkte mit den Gegenseitenpaaren des Vierecks $abcd$ bestimmt ist und diese können construirt werden, wie Art. 308 zeigen wird (Aufg. 6); das Problem hat daher zwei Auflösungen.

Aufg. 9. Wenn eine Parallele zu einer Asymptote einen Kegelschnitt in C und die Seiten eines eingeschriebenen Vierecks in den Punkten a, b, c, d schneidet, so ist $Ca \,.\, Cc = Cb \,.\, Cd$; denn C ist das Centrum des Systems.

Aufg. 10. Man soll die Aufgaben des Art. 295 als Fälle der Involution behandeln.

In der Aufg. 3 ist k ein Doppelpunkt, in Aufg. 4 ebenso T, in Aufg. 5 ist T ein Centrum, etc.

Aufg. 11. In einem System von Kegelschnitten durch dieselben vier Punkte giebt es auf jeder beliebigen geraden Linie zwei reelle oder imaginäre Punkte, welche in Bezug auf alle seine Kegelschnitte conjugirt oder harmonische Pole sind. Es sind die Doppelpunkte der durch dieselben bestimmten Involution.

Wenn ein System von Kegelschnitten vier feste Gerade berührt, so gehen durch jeden Punkt zwei reelle oder imaginäre gerade Linien, welche in Bezug auf alle diese Kegelschnitte conjugirt oder harmonische Polaren sind.

Aufg. 12. Alle die Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gehen, haben ein reelles oder imaginäres System von parallelen conjugirten Durchmessern.

Denn man denke die Transversale des Satzes der vorigen Aufgabe unendlich entfernt, etc.

Aufg. 13. Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte bilden ein Strahlbüschel. (Vergl. Art. 114, Aufg. 2.)

Denn wenn sich die Polaren des Punktes P in Bezug auf zwei Kegelschnitte des Systems im Punkte P' schneiden, so sind P und P' in Bezug auf beide Kegelschnitte harmonische Pole; daher sind sie es auch in Bezug auf jeden dritten Kegelschnitt des Systems und somit muss die Polare von P in Bezug auf einen solchen gleichfalls durch P' gehen.

Aufg. 14. Der Ort des Pols einer Geraden in Bezug auf die durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte der Diagonalen und der Gegenseitenpaare des Vierecks geht. Denn wenn man in Bezug auf zwei Punkte P und Q die Polarenbüschel bildet, so entsprechen die Strahlen derselben einer einem und sie sind

daher projectivisch; also ist der Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen ein Kegelschnitt. Diese Schnittpunkte sind aber die Pole der geraden Linie PQ in Bezug auf die Kegelschnitte des Systems oder die Scheitel der Polarenbüschel für den in der Geraden PQ fortbewegten Pol.

Aufg. 15. Wenn mehrere Kegelschnitte demselben Viereck umgeschrieben sind, so gehen die einer und derselben Richtung conjugirten Durchmesser durch einen Punkt.

Aufg. 16. Das Büschel der Polaren des Punktes P in Bezug auf vier demselben Viereck umgeschriebene Kegelschnitte hat ein von der Lage von P unabhängiges Doppelverhältniss.

Aufg. 17. Die Büschel der Tangenten, welche man in den vier gemeinsamen Punkten von vier Kegelschnitten an dieselben ziehen kann, haben gleiches Doppelverhältniss. Man kann in Folge dieser Eigenschaften von dem Doppelverhältniss von vier Kegelschnitten sprechen, die demselben Viereck umgeschrieben sind.

Aufg. 18. Die Reihen der Berührungspunkte, welche in den vier gemeinsamen Tangenten von vier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten durch diese gebildet werden, haben dasselbe Doppelverhältniss.

Aufg. 19. Man soll durch einen gegebenen Punkt o eine Gerade ziehen, die einen festen Kegelschnitt S in Punkten p, q schneidet, welche mit einem festen Punkte n desselben und drei festen Punkten a, b, c ausser ihm auf einem Kegelschnitte liegen. Durch die Punkte $abcn$ geht ein Büschel von Kegelschnitten, von denen jeder den Kegelschnitt S in drei Punkten p, q, r ferner schneidet; da jeder Punkt p von S nur einen Kegelschnitt dieses Büschels und somit nur ein Dreieck p, q, r bestimmt, so umhüllen die Seiten dieses Dreiecks einen Kegelschnitt U, und die von o an diesen gehenden Tangenten lösen die Aufgabe. Die drei Paare von Geraden bc, an; ca, bn; ab, cn, welche zu den Kegelschnitten des Büschels gehören, liefern in bc, ca, ab Tangenten des Kegelschnitts U. Man hat also den Satz: Jeder einem Dreieck umgeschriebene und einen festen Punkt eines Kegelschnitts enthaltende Kegelschnitt schneidet diesen in drei andern Punkten, deren Verbindungslinien Tangenten eines dem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts sind.

303. Auf derselben Eigenschaft der Gleichung einer Geraden in der Normalform $x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$ (Art. 34), durch die Substitution der Coordinaten eines Punktes die Länge der von ihm auf die Gerade gefällten Normale zu liefern, ruht ebenso wie die Fundamentalsätze dieses Kapitels die folgende Betrachtung, welche aber zu neuen Anwendungen führt. In Art. 186 ist begründet worden, dass die Länge der vom Centrum einer Ellipse auf die Tangente derselben gefällten Normale aus den

conjugirten Durchmesser-Axen a' und b' und den von ihr mit diesen eingeschlossenen Winkeln α und β durch $p^2 = a'^2 \cos^2 \alpha + b'^2 \cos^2 \beta$ bestimmt ist. Sind dann $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, $L_4 = 0$ die Gleichungen von vier Geraden in der Normalform, also $L_i = x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i - p_i = 0$ und bezeichnen α_i und β_i die von ihrer Normale mit den Axen x und y eingeschlossenen Winkel, p_i aber den senkrechten Abstand vom Coordinatenanfang und φ, ψ; φ', ψ' die Winkel, welche die Normalen der Axen der Ellipse $2a$ und $2b$ mit den Coordinatenaxen x und y bilden, so hat man für das Quadrat der Entfernung des Centrums (x, y) von derselben den doppelten Ausdruck $L_i^2 = (x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i - p_i)^2$
$= a^2 (\cos \alpha_i \cos \varphi + \cos \beta_i \cos \psi)^2 + b^2 (\cos \alpha_i \cos \varphi' + \cos \beta_i \cos \psi')^2$
für $i = 1, 2, 3, 4$.

Wenn man zwischen diesen vier Gleichungen die Grössen $a, b, \cos \varphi, \cos \psi, \cos \varphi', \cos \psi'$ eliminirt, so muss die entstehende Gleichung den Ort der Centra für alle diejenigen Kegelschnitte darstellen, welche die vier gegebenen Geraden berühren. Diese Elimination geschieht durch Addition der vier Gleichungen nach Multiplication derselben mit Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, welche durch die drei Relationen $\Sigma \lambda_i \cos \alpha_i^2 = 0$, $\Sigma \lambda_i \cos^2 \beta_i = 0$, $\Sigma \lambda_i \cos \alpha_i \cos \beta_i = 0$ bestimmt sind, in denen die Σ Summen von vier gleichgebildeten Ausdrücken für $i = 1, 2, 3, 4$ bezeichnen. Da die rechte Seite in Folge dieser Relationen verschwindet, so erhält man als Summe
$\lambda_1 (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 - p_1)^2 + \ldots + \lambda_4 (x \cos \alpha_4 + y \cos \beta_4 - p_4)^2 = 0$
oder $\Sigma_1^4 \lambda_i L_i^2 = 0$, eine Gleichung, die in Folge der zwischen den λ bestehenden Relationen linear und also die Gleichung einer Geraden oder genauer gesprochen die Gleichung von zwei Geraden ist, deren eine ganz in unendlicher Ferne liegt; da die Polare einer Ecke des Tangentenvierseits in Bezug auf den Ort der Centra der Kegelschnitte durch die gegenüberliegende Ecke desselben geht, so ergiebt sich nach dem Gesetz der harmonischen Theilung des Art. 109 der letzte Theil und damit die volle Begründung des Satzes: Der Ort der Centra der Kegelschnitte, welche vier feste Gerade berühren, ist die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen ihres Vierseits verbindet. Einige weitere Anwendungen dieser Methode vereinigen wir in den folgenden Aufgaben.

Aufg. 1. Jeder Kegelschnitt, welcher zwei von den Diagonalen eines Vierseits harmonisch theilt, thut diess auch mit der dritten Diagonale desselben.

Denn sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, $L_4 = 0$ die Seiten desselben, so hat die Curve $\lambda_1 L_1^2 + \lambda_2 L_2^2 + \lambda_3 L_3^2 + \lambda_4 L_4^2 = 0$ für den Punkt l_1, l_2, l_3, l_4 die Polare $\lambda_1 l_1 L_1 + \lambda_2 l_2 L_2 + \lambda_3 l_3 L_3 + \lambda_4 l_4 L_4 = 0$, und wenn dieser Punkt der Durchschnitt von zweien der festen Geraden ist, z. B. $l_1 = l_2 = 0$, so geht die Polare durch den Durchschnitt der beiden andern festen Geraden, denn sie ist für das gewählte Beispiel $\lambda_3 l_3 L_3 + \lambda_4 l_4 L_4 = 0$. Die drei Paare von Gegenecken sind also in Bezug auf jede dieser Curven harmonisch conjugirt. Da die Gleichung derselben drei willkürliche Parameter $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ enthält, so kann eine Curve des Systems durch drei beliebige Punkte geführt werden und die harmonische Theilung der drei Diagonalen zählt nur für zwei Bedingungen. Wenn insbesondere durch specielle Wahl der λ drei der conjugirten Punkte in eine Gerade fallen, so liegen die drei andern in einer zweiten Geraden oder der Ort der Pole der Geraden $L = 0$ in Bezug auf alle dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist eine Gerade $L^* = 0$, für die die Identität $\Sigma_1^4 \lambda_i L_i^2 \equiv L L^*$ erfüllt ist; und wenn jene im Unendlichen liegen, so bilden diese die Mitten der Diagonalen.

Aufg. 2. Wenn die Quadrate der linearen Polynome der Gleichungen von fünf Geraden $L_1 = 0$, etc.; $L_5 = 0$ zu einer linearen Summe $\Sigma_1^5 \lambda_i L_i^2 = 0$ verbunden werden, so repräsentirt dieselbe die Schaar der Durchmesser des Kegelschnitts, welcher die gegebenen Geraden zu Tangenten hat.

Aufg. 3. Wenn für sechs Gerade $L_1 = 0$, etc., $L_6 = 0$ die Identität $\Sigma_1^6 \lambda_i L_i^2 = 0$ erfüllt werden kann, so sind dieselben Tangenten des nämlichen Kegelschnitts. Denn diese Identität legt den fünf Verhältnissen $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5 : \lambda_6$ sechs Bedingungen auf und setzt also eine gewisse Beziehung der Geraden zu einander voraus. Denkt man den Kegelschnitt, welcher die ersten fünf Geraden berührt, so stellt die durch die Wahl der λ_i lineare Gleichung $\Sigma_1^5 \lambda_i L_i^2 = 0$ das Büschel seiner Durchmesser dar und wenn man zwischen ihr und der vorausgesetzten Identität die Grösse L_1^2 eliminirt, so erhält man in $\Sigma_2^6 \lambda_i L_i^2 = 0$ eine neue Gleichung desselben Büschels von Durchmessern, aber auch die Gleichung der Durchmesser des von den letzten fünf Geraden berührten Kegelschnitts. Da hiernach diese beiden Kegelschnitte dasselbe Centrum und vier gemeinschaftliche Tangenten haben, so sind sie identisch.

Aufg. 4. Die Identität $\Sigma_1^6 \lambda_i L_i^2 = 0$ für sechs Tangenten eines Kegelschnitts wird für zwei dieser Tangenten als Axen x, y in die Form $\alpha x^2 + \beta y^2 + \Sigma_1^4 \lambda_i \left(\frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} - 1\right)^2 \equiv 0$ übergeführt und die Entwicklung und Vergleichung der Coefficienten von x^2, y^2, xy, x, y, x^0 mit Null liefert sechs Gleichungen, zwischen denen die Grössen α, β, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 eliminirt werden können; man erhält die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 b_1}, & \frac{1}{a_2 b_2}, & \frac{1}{a_3 b_3}, & \frac{1}{a_4 b_4} \\ \frac{1}{a_1}, & \frac{1}{a_2}, & \frac{1}{a_3}, & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{b_1}, & \frac{1}{b_2}, & \frac{1}{b_3}, & \frac{1}{b_4} \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder durch Beseitigung der Nenner und Entwicklung nach den Elementen der ersten Columne $kab + la + mb + n = 0$, als eine Relation zwischen den Abschnitten a und b, welche die bewegliche sechste Tangente auf den beiden als Coordinatenaxen gewählten Tangenten bestimmt. Die Methode hat damit zu dem Grundgesetz der projectivischen Theilung der Tangenten zurückgeführt.

Aufg. 5. Die Seiten von zwei Dreiecken, welche in Bezug auf denselben Kegelschnitt Systeme harmonischer Pole und Polaren sind, berühren den nämlichen Kegelschnitt. Denn die Gleichungen $\Sigma_1^3 \lambda_i L_i^2 = 0$ und $\Sigma_4^6 \lambda_i L_i^2 = 0$ repräsentiren nach der Voraussetzung in gleicher Weise den gegebenen Kegelschnitt; man hat daher die Identität $\Sigma_1^6 \lambda_i L_i^2 = 0$ und damit ist der Satz bewiesen.

Aufg. 6. Der Ort der Centra der Kegelschnitte, welche demselben Dreiseit $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ eingeschrieben sind, und für die die Summe der Quadrate der Halbaxen einer Constanten gleich ist, ist ein Kreis, der den Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiseits zum Centrum hat. Denn man hat mit den Bezeichnungen des Textes die drei Gleichungen

$$L_i^2 = (x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i - p_i)^2 = a^2 (\cos \alpha_i \cos \varphi + \cos \beta_i \cos \psi)^2 + b^2 (\cos \alpha_i \cos \varphi' + \cos \beta_i \cos \psi')^2, \quad (i = 1, 2, 3)$$

und die Bedingung $a^2 + b^2 = \text{const.}$: man eliminirt zwischen ihnen wie vorher durch Addition der mit den Constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ respective multiplicirten Gleichungen, wenn diese durch $\Sigma_1^3 \lambda_i \cos^2 \alpha_i = 1$, $\Sigma_1^3 \lambda_i \cos^2 \beta_i = 1$, $\Sigma_1^3 \lambda_i \cos \alpha_i \cos \beta_i = 0$ bestimmt sind. Man erhält dadurch $\lambda_1 (x \cos^2 \alpha_1 + y \cos^2 \beta_1 - p_1)^2 + \lambda_2 (x \cos^2 \alpha_2 + y \cos^2 \beta_2 - p_2)^2 + \lambda_3 (x \cos^2 \alpha_3 + y \cos^2 \beta_3 - p_3)^2 = a^2 + b^2$, oder $\Sigma_1^3 \lambda_i L_i^2 = \text{const.}$, eine Gleichung zweiten Grades, in welcher nach den Relationen der λ die Glieder vom zweiten Grade in x und y sich auf x^2 und y^2 reduciren. Da die Lage des Mittelpunktes des durch sie dargestellten Kreises von der Constanten unabhängig ist, so erhält man ihn für $a^2 + b^2 = 0$, d. h. für den Fall der gleichseitigen Hyperbel und er ist daher der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiseits. (Vergl. Art. 236, Aufg. 1.) Darum bestimmen sich auch die Centra der beiden gleichseitigen Hyperbeln, die demselben Vierseit eingeschrieben sind, als Durchschnitte der Geraden durch die Mittelpunkte der Diagonalen mit den vier Kreisen, in Bezug auf welche die vier aus den Geraden zu bildenden Dreiecke sich selbst conjugirt sind, oder solche vier Kreise schneiden sich in denselben zwei Punkten und ihre Centra, die Höhendurchschnitte liegen in einer Geraden. (Vergl. Art. 284, Aufg. 2.)

Siebenzehntes Kapitel.

Von den speciellen Formen der homogenen Gleichung zweiten Grades*).

---

304. Ehe wir weitere Ergebnisse entwickeln, die aus dieser fundamentalen Bedeutung der projectivischen Büschel und Reihen für die Theorie der Kegelschnitte hervorgehen, wollen wir bei dem Umstande verweilen, dass die Gleichung des durch zwei projectivische Büschel erzeugten Kegelschnitts in Liniencoordinaten (Art. 296) von der Form $UW = V^2$ ist für $U = 0$, $W = 0$ als zwei Punkte des Kegelschnitts und $W = 0$ als den Pol ihrer Verbindungslinie; und bei dem entsprechenden für zwei projectivische Reihen, dass die Gleichung desselben in Punktcoordinaten von der Form $LN = M^2$ ist für $L = 0$, $N = 0$ als Tangenten des Kegelschnitts und $M = 0$ als die Polare ihres Schnittpunktes. Denn wir sind damit auf Gleichungsformen zurückgeführt, die schon im Art. 273 f. beleuchtet wurden und sehen, wie diese Gleichungen in ganz derselben Weise der Discussion der Kegelschnitte als Curven zweiter Ordnung, wie der als Curven zweiter Classe angehören. Dieselbe Eigenschaft werden wir der Gleichungsform des Art. 278 angehörig finden, nachdem wir durch die Theorie der Enveloppen den Zusammenhang beider Betrachtungsweisen der Curven nochmals von anderem Standpunkte aus dargelegt haben.

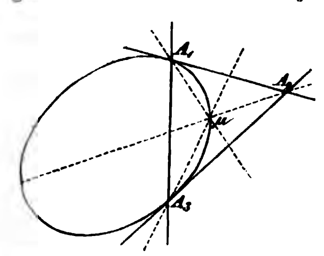
Wir bedienen uns zu diesen Untersuchungen der trimetrischen Coordinatensysteme und denken insbesondere für Punktcoordinaten das Fundamentaldreieck als das von den beiden Tangenten und ihrer Berührungssehne gebildete Dreieck, bezeichnen also jene durch $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, diese durch $x_2 = 0$; wir sehen für Liniencoordinaten diess Dreieck der zwei Punkte der Curve und des Durchschnittspunkts ihrer Tangenten als Funda-

---

*) Um die Reihe der wichtigen speciellen Formen vollständig zu überblicken, vergleiche man die Untersuchungen der Art. 156, 159 f. über die Formen der Gleichungen des einem Dreieck umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kegelschnitts.

mentaldreiecke an und bezeichnen jene durch $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$, diesen durch $\xi_2 = 0$. Dann ist die Gleichung eines Kegelschnitts in trimetrischen Punktcoordinaten $x_1 x_3 = x_2^2$, die Gleichung eines solchen in trimetrischen Liniencoordinaten $\xi_1 \xi_3 = \xi_2^2$. In derselben Weise ist $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts in Punktcoordinaten in Bezug auf ein Fundamentaldreieck, in welchem jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite in Bezug auf ihn ist; und $\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten. In Uebereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen des Art. 81 finden wir, dass die Behandlung der Gleichungen in Punktcoordinaten die Wiederholung einer solchen in Liniencoordinaten überflüssig macht.

305. Für $x_1 x_3 = x_2^2$ als Gleichung des Kegelschnitts folgt aus der Relation $\mu x_1 = x_2$ durch Einsetzen in die Gleichung der Curve gleichmässig $x_3 = \mu x_2$ und $x_3 = \mu^2 x_1$, d. h. die vom Punkte $x_1 = x_2 = 0$ ausgehende Gerade $\mu x_1 = x_2$ schneidet den Kegelschnitt in einem zweiten Punkte, dessen gerade Verbindungslinien mit den beiden andern Ecken des Fundamentaldreiecks durch die Gleichungen $\mu x_2 = x_3$ und $x_3 = \mu^2 x_1$ dargestellt sind. Zwischen den Coordinaten dieses Punktes findet also die Relation statt $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \mu : \mu^2$. Wir können demzufolge denselben als den Punkt μ bezeichnen und die Anwendung unseres Coordinatensystems bietet alle die Vortheile dar, welche wir im Art. 237 aus dem Umstande haben hervorgehen sehen, dass ein Punkt einer Curve durch eine einzige Variabele bestimmt wird. Durch welche Specialisirungen geht die dort gegebene Methode aus der jetzigen hervor?



Die gerade Verbindungslinie von zwei Punkten μ, μ' der Curve ist durch $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') x_2 + x_3 = 0$ dargestellt, da diese Gleichung durch jede der Voraussetzungen $\mu x_1 = x_2$, $\mu x_2 = x_3$; $\mu' x_1 = x_2$, $\mu' x_2 = x_3$ erfüllt wird. Dem Zusammenfallen der Punkte μ und μ' entspricht die Gleichung der Tangente im Punkte μ, nämlich $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$*).

*) Umgekehrt, wenn die Gleichung einer geraden Linie in Bezug

Die gerade Linie $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ berührt also den betrachteten Kegelschnitt, wenn $4 a_1 a_3 = a_2^2$ ist.

Aufg. 1. Man bestimme die Gleichung der Parabel, welche die Seiten $A_1 A_3$, $A_3 A_2$ in den Punkten A_1, A_2 respective berührt. Sie ist durch die Bedingung der Berührung mit der unendlich entfernten Geraden $\Sigma s_i x_i = 0$ bestimmt, also durch $4 s_1 s_3 = s_2^2$ oder ihre Gleichung ist $s_2^2 x_2^2 = 4 s_1 s_3 x_1 x_3$.

Aufg. 2. Man bestimme den Pol x' der geraden Verbindungslinie der Punkte μ, μ' der Curve. Seine Coordinaten x_1', x_2', x_3' genügen den beiden Bedingungsgleichungen

$\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$, $\mu'^2 x_1' - 2\mu' x_2' + x_3' = 0$ und man erhält also $\frac{x_1'}{2(\mu - \mu')} = \frac{x_2'}{\mu^2 - \mu'^2} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'(\mu - \mu')}$ oder $\frac{x_1'}{2} = \frac{x_2'}{\mu + \mu'} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'}$.

Aufg. 3. Das Doppelverhältniss eines Büschels, welches vier feste Punkte μ', μ'', μ''', μ'''' eines Kegelschnitts mit einem fünften Punkte μ desselben verbindet, ist constant. Denn die Strahlen des Büschels sind durch die Gleichungen

$$\mu'(\mu x_1 - x_2) + (x_3 - \mu x_2) = 0,\quad \mu''(\mu x_1 - x_2) + (x_3 - \mu x_2) = 0,$$
$$\mu'''(\mu x_1 - x_2) + (x_2 - \mu x_2) = 0,\quad \mu''''(\mu x_1 - x_2) + (x_3 - \mu x_2) = 0$$

dargestellt und das Doppelverhältniss derselben ist nach Art. 58 $= \frac{\mu' - \mu''}{\mu''' - \mu''} : \frac{\mu' - \mu''''}{\mu'''' - \mu'''}$, d. h. von der Lage des Scheitels μ unabhängig.

306. Man soll die Gleichung der Polare eines Punktes x' bezüglich der Curve bestimmen. Wir denken die Coordinaten des Punktes als der Gleichung einer durch ihn gehenden Tangente genügend und nehmen $\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$ als das Resultat der Substitution; nun ist im Berührungspunkte $\mu^2 = x_3 : x_1$, $\mu = x_2 : x_1$ und die Coordinaten des Berührungspunktes genügen daher der Relation $x_3 x_1' - 2 x_2 x_2' + x_1 x_3' = 0$. Sie ist die Gleichung der Polare. Wäre der Punkt als Schnittpunkt der Geraden $a x_1 = x_2$, $b x_1 = x_3$ gegeben, so ist die Gleichung seiner Polare $b x_1 - 2 a x_2 + x_3 = 0$.

Liegt der Pol in der Polare, so genügen die x' der Gleichung derselben und man erhält als Bedingung der Lage in der Curve die Gleichung $x_1' x_3' = x_2'^2$ wieder.

Aufg. 1. Wenn man den vorher implicite gedachten Coefficienten in die betrachtete Kegelschnittsgleichung einführt, so ist sie $k^2 x_2^2 = x_1 x_3$ und die Schnittpunkte der Geraden $x_1 = l^2 x_3$ mit dem Kegelschnitt sind $k^2 x_2^2 = l^2 x_3^2$ oder $k x_2 = \pm l x_3$; man erkennt darin die harmonische Theilung der durch den Pol gehenden Sehne in der Polare wieder. Da

---

auf eine unbestimmte Grösse μ vom zweiten Grade ist $\mu x_1^2 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$, so berührt sie stets den durch $x_1 x_3 = x_2^2$ dargestellten Kegelschnitt.

man auch $k^2 l^2 x_2^2 = x_1^2$ erhält, so entspricht dem Punkte μ jetzt die Gruppe von Formeln $\mu x_1 = k x_2$, $x_3 = \mu k x_2$ oder $x_1 : x_2 : x_3 = k : \mu : \mu^2 k$. Die Gleichung der Sehne zwischen den Punkten μ, μ' wird $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') k x_2 + x_3 = 0$, daher die der Tangente in μ ebenso $\mu^2 x_1 - 2\mu k x_2 + x_3 = 0$. Die Coordinaten des Pols der Sehne zwischen μ und μ' sind durch $\frac{x_1'}{2} = \frac{k x_2'}{\mu + \mu'} = \frac{x_3'}{2\mu\mu'}$ bestimmt. Lässt man jene Sehne mit der unendlich entfernten geraden Linie zusammenfallen, so erhält man für die Coordinaten des Centrums

$$x_1' : x_2' : x_3' = 2k^2 s_3 : -s_2 : 2k^2 s_1.$$

Aufg. 2. Wenn drei Kegelschnitte von den respectiven Seitenpaaren eines Dreiecks in den Endpunkten der jedesmaligen dritten Seite berührt werden und durch einen Punkt gehen, so schneiden die Tangenten derselben in diesem Punkte die Dreiecksseiten, die ihnen respective als Berührungssehnen entsprechen, in drei Punkten einer geraden Linie.

307. Bei der Anwendung der im vorigen Art. gegebenen Gleichungen der Polare ist es nützlich, zu bemerken, dass die Elimination von x_2 zwischen den Gleichungen von zwei Tangenten des Kegelschnitts in den Punkten μ und μ' für die Gleichung der Verbindungslinie des Durchschnitts dieser Tangenten mit dem Eckpunkt $x_1 = x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks $\mu\mu' x_1 = x_3$ liefert. Wenn also das Product zweier Werthe von μ gegeben ist ($= a$), so liegt der Durchschnitt der entsprechenden Tangenten in der festen Geraden $a x_1 = x_3$. Substituirt man in demselben Falle a für $\mu\mu'$ in die Gleichung der Sehne zwischen zwei Punkten, so erkennt man, dass diese Sehne durch den festen Punkt $a x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ hindurchgeht. Da ferner die Gleichung der Geraden, welche den Punkt μ mit dem Punkte $x_1 = x_3 = 0$ verbindet, $\mu^2 x_1 = x_3$ ist, so liegen die Punkte $+\mu$ und $-\mu$ in einer durch den Punkt $x_1 = x_3 = 0$ gehenden Geraden.

Wenn endlich $x_1 x_3 = x_2^2$ und $x_1 x_3 = y_2^2$ die Gleichungen von zwei Kegelschnitten sind, welche $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ zu gemeinschaftlichen Tangenten und $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ (y_2 repräsentirt eine lineare homogene Function der x) zu den respectiven Berührungssehnen haben, so erkennt man aus dem Umstande, dass die Gleichung $\mu^2 x_1 = x_3$ die Grösse x_2 nicht enthält, dass die Verbindungslinie des Punktes $+\mu$ in dem einen Kegelschnitt mit jedem der Punkte $\pm\mu$ im andern durch den Punkt $x_1 = x_3 = 0$, d. h. den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten gehen muss. Wir wollen sagen, dass der Punkt $+\mu$

des einen Kegelschnitts dem Punkte $+\mu$ des andern direct und dem Punkte $-\mu$ desselben indirect oder invers entspreche; und überdiess, dass die Sehne, welche irgend zwei Punkte des einen Kegelschnitts verbindet, der Verbindungssehne der entsprechenden Punkte des andern Kegelschnitts entspreche.

Aufg. 1. Vier feste Tangenten eines Kegelschnitts — setzen wir in den Punkten $\mu', \mu'', \mu''', \mu''''$ — bestimmen auf einer fünften Tangente desselben — im Punkte μ — eine Punktreihe von constantem Doppelverhältniss.

Das fragliche Doppelverhältniss stimmt mit dem Doppelverhältniss des Strahlbüschels überein, welches die bezeichnete Punktreihe mit dem Punkte $x_1 = x_3 = 0$ bestimmt; nach dem Vorhergehenden sind die Gleichungen der Strahlen desselben $\mu'\mu x_1 - x_3 = 0$, $\mu''\mu x_1 - x_3 = 0$, $\mu'''\mu x_1 - x_3 = 0$, $\mu''''\mu x_1 - x_3 = 0$, das fragliche Büschel ist also mit dem über den Berührungspunkten aus einem beliebigen Punkte μ des Kegelschnitts beschriebenen Büschel identisch und der Satz also mit der Hinzufügung bewiesen, dass das Doppelverhältniss von vier Tangenten demjenigen ihrer vier Berührungspunkte gleich ist.

Aufg. 2. Wenn vier gerade Linien durch den Punkt $x_1 = x_3 = 0$ gezogen werden, so ist das Doppelverhältniss der vier Punkte $\mu', \mu'', \mu''', \mu''''$, in welchen dieselben den Kegelschnitt schneiden, dem Doppelverhältniss der vier andern Schnittpunkte $-\mu', -\mu'', -\mu''', -\mu''''$ gleich, die sie überdiess mit ihm bestimmen. Denn der in der Aufg. 3 des Art. 305 für das Doppelverhältniss von vier Punkten des Kegelschnitts gegebene Ausdruck ändert sich nicht, wenn die Vorzeichen aller darin auftretenden Grössen verändert werden. Aus demselben Grunde ist das Doppelverhältniss von vier Punkten des einen Kegelschnitts dem der vier entsprechenden Punkte des andern gleich.

Aufg. 3. Entsprechende Sehnen von zwei Kegelschnitten durchschneiden einander in ihrer Durchschnittssehne.

Die Kegelschnitte $x_1x_3 - x_2^2 = 0$, $x_1x_3 - y_2^2 = 0$ haben die Geraden $x_2^2 - y_2^2 = 0$ zu einem Paar der gemeinsamen Sehnen. Aber die Sehnen $\mu\mu'x_1 - (\mu + \mu')x_2 + x_3 = 0$, $\mu\mu'x_1 - (\mu + \mu')y_2 + x_3 = 0$ durchschneiden einander in der Geraden $x_2 - y_2 = 0$; und wenn wir die Zeichen von μ, μ' in der zweiten Gleichung ändern, so schneiden sich die entsprechenden Sehnen in $x_2 + y_2 = 0$.

Aufg. 4. Ein Dreieck bleibt einem festen Kegelschnitt umgeschrieben und zwei seiner Ecken bewegen sich in festen Geraden; man soll den Ort der dritten Ecke finden.

Wir denken die beiden Tangenten des Kegelschnitts aus dem Durchschnittspunkt der festen Geraden und ihre Berührungssehne als Fundamentallinien und setzen die Gleichungen der festen Geraden in der Form $ax_1 - x_3 = 0$, $bx_1 - x_3 = 0$ voraus, die Gleichung des Kegelschnitts aber $x_1x_3 = x_2^2$. Nach dem Vorigen ist für zwei sich in $ax_1 - x_3 = 0$ schneidende Tangenten des Letztern das Product der μ gleich a; wenn

also die eine der Seiten im Punkte μ berührt, so berühren die andern, die ihr in den beiden festen Geraden begegnen, in den Punkten $a:\mu$ und $b:\mu$ und ihre Gleichungen sind also $a^2 x_1 - 2a\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$, $b^2 x_1 - 2b\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$. Die Elimination von μ zwischen diesen Gleichungen giebt für den Ort des Scheitels die Gleichung $(a+b)^2 x_1 x_3 = 4abx_2^2$. Derselbe ist also ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen in der Geraden $x_2 = 0$ eine doppelte Berührung hat*).

Aufg. 5. Man bestimme die Enveloppe der Grundlinie eines Dreiecks, welches einem festen Kegelschnitt eingeschrieben ist und dessen beide Scheitelseiten durch zwei feste Punkte gehen.

Wir denken die Verbindungslinie der festen Punkte als $x_2 = 0$ und setzen die Gleichung des festen Kegelschnitts als von der Form $x_1 x_3 = x_2^2$, die Gleichungen der Geraden, welche die festen Punkte mit dem Punkt $x_1 = x_3 = 0$ verbinden, von der Form $ax_1 + x_3 = 0$, $bx_1 + x_3 = 0$. Nun entsprechen den Endpunkten einer durch $ax_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ gehenden Sehne Werthe von μ, deren Product gleich a ist; wenn also μ dem Scheitel entspricht, so müssen die Basisecken durch $a:\mu$ und $b:\mu$ dargestellt sein und die Gleichung der Basis ist $abx_1 - (a+b)\mu x_2 + \mu^2 x_3 = 0$. Nach Art. 305 berührt dieselbe daher stets den Kegelschnitt $4abx_1 x_3 = (a+b)^2 x_2^2$, einen Kegelschnitt also, der mit dem gegebenen in der Verbindungslinie der festen Punkte eine doppelte Berührung hat.

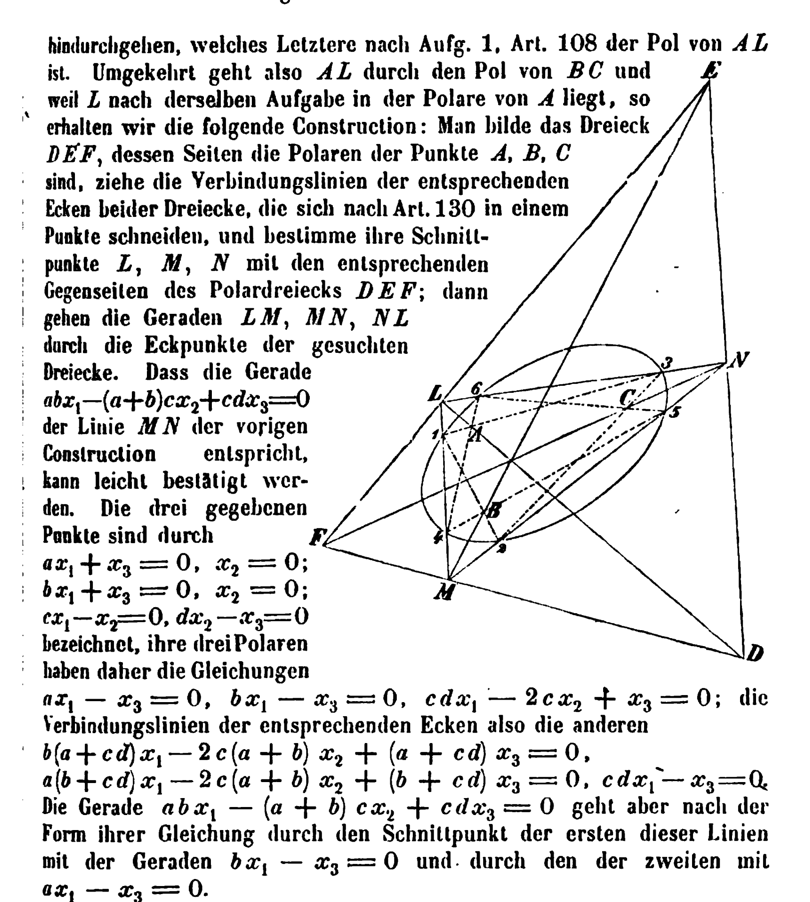
Aufg. 6. Man soll in einen Kegelschnitt ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Wenn wir zwei der gegebenen Punkte wie in der vorigen Aufgabe festsetzen, so ist nach derselben die Gleichung der Basis $abx_1 - (a+b)\mu x_2 + x_3 = 0$, und wenn diese Gerade durch den Punkt $cx_1 - x_2 = 0$, $dx_2 - x_3 = 0$ gehen soll, so muss die Bedingung $ab - (a+b)\mu c + \mu^2 cd = 0$ erfüllt sein, durch welche also μ bestimmt wird. Im Punkte μ ist aber $\mu x_1 = x_2$, $\mu^2 x_1 = x_3$; die Coordinaten dieses Punktes genügen also der Gleichung $abx_1 - (a+b)cx_2 + cdx_3 = 0$ und es entsprechen daher der Aufgabe zwei Lösungen, denn jeder der beiden Punkte, in welchen diese Gerade den gegebenen Kegelschnitt schneidet, kann als Ecke des gesuchten Dreiecks genommen werden. Die geometrische Bedeutung der gefundenen Gleichung, die aus dem Vorigen nicht erhellt, wird durch die folgenden Betrachtungen erkannt. Wenn 123 und 456 die beiden Dreiecke wären, welche dem Problem entsprechend durch die Punkte A, B, C bestimmt sind, so muss nach dem auf das Sechseck 123456 angewendeten Pascal'schen Satze die Gerade BC durch den Schnittpunkt von 16, 34

---

*) Das Raisonnement bleibt gültig, wenn der Punkt $x_1 = x_3 = 0$ innerhalb des Kegelschnitts liegt und daher die bezüglichen Tangenten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ imaginär werden. Die im Art. 309 gegebenen Methoden lassen zeigen, dass für die Gleichungsform $x_1^2 + x_3^2 = x_2^2$ die Gleichung des Ortes in der Form $x_1^2 + x_3^2 = k^2 x_2^2$ erhalten wird.

hindurchgehen, welches Letztere nach Aufg. 1, Art. 108 der Pol von AL ist. Umgekehrt geht also AL durch den Pol von BC und weil L nach derselben Aufgabe in der Polare von A liegt, so erhalten wir die folgende Construction: Man bilde das Dreieck DEF, dessen Seiten die Polaren der Punkte A, B, C sind, ziehe die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken beider Dreiecke, die sich nach Art. 130 in einem Punkte schneiden, und bestimme ihre Schnittpunkte L, M, N mit den entsprechenden Gegenseiten des Polardreiecks DEF; dann gehen die Geraden LM, MN, NL durch die Eckpunkte der gesuchten Dreiecke. Dass die Gerade $abx_1-(a+b)cx_2+cdx_3=0$ der Linie MN der vorigen Construction entspricht, kann leicht bestätigt werden. Die drei gegebenen Punkte sind durch $ax_1+x_3=0$, $x_2=0$; $bx_1+x_3=0$, $x_2=0$; $cx_1-x_2=0$, $dx_2-x_3=0$ bezeichnet, ihre drei Polaren haben daher die Gleichungen $ax_1-x_3=0$, $bx_1-x_3=0$, $cdx_1-2cx_2+x_3=0$; die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken also die anderen



$$b(a+cd)x_1-2c(a+b)x_2+(a+cd)x_3=0,$$
$$a(b+cd)x_1-2c(a+b)x_2+(b+cd)x_3=0,\quad cdx_1-x_3=0.$$

Die Gerade $abx_1-(a+b)cx_2+cdx_3=0$ geht aber nach der Form ihrer Gleichung durch den Schnittpunkt der ersten dieser Linien mit der Geraden $bx_1-x_3=0$ und durch den der zweiten mit $ax_1-x_3=0$.

Aufg. 7. Die Basis eines Dreiecks berührt einen gegebenen Kegelschnitt, während ihre Endpunkte sich in zwei festen Tangenten desselben bewegen und die beiden andern Seiten durch feste Punkte gehen: Welches ist der Ort der Spitze?

Sind $x_1=0$, $x_3=0$ die festen Tangenten und $x_1x_3=x_2^2$ die Gleichung des Kegelschnitts, so sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linie $x_1=0$ mit einer Tangente $\mu^2x_1-2\mu x_2+x_3=0$ respective zu 0, 1, 2 proportional und nach Art. 65 ist die Gleichung der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Punkte x', den wir als fest betrachten, $x_1x_3'-x_1'x_3=2\mu(x_1x_2'-x_1'x_2)$. Ebenso ist die Gleichung der Verbindungslinie des festen Punktes x'' mit dem Punkte $(2, \mu, 0)$, in welchem die Gerade $x_3=0$ dieselbe Tangente schneidet, $2(x_2x_3''-x_2''x_3)=\mu(x_1x_3''-x_1''x_3)$. Die Elimination von μ zwischen dieser und der vorigen Gleichung giebt den Ausdruck für den

Ort des Scheitels
$(x_1 x_3' - x_1' x_3)(x_1 x_3'' - x_1'' x_3) = 4(x_1 x_2' - x_1' x_2)(x_2 x_3'' - x_2'' x_3)$,
die Gleichung eines durch die beiden festen Punkte gehenden Kegelschnitts.

Aufg. 8. Die Seiten eines Dreiecks drehen sich um feste Punkte A, B, C und die Endpunkte der um C sich drehenden Seite liegen stets auf einem die Punkte A und B enthaltenden Kegelschnitt; der Ort der freien Ecke V ist ein Kegelschnitt durch A und B.

Denn für vier Lagen des beweglichen Dreiecks ist nach den Sätzen der Aufg. 2 dieses Art. $\{a a' a'' a'''\} = \{b b' b'' b'''\}$ und daher auch $\{A.a a' a'' a'''\} = \{B.b b' b'' b'''\}$ oder $\{A.V V' V'' V'''\} = \{B.V V' V'' V'''\}$. (Vergl. Art. 295, Aufg. 15.)

Aufg. 9. Die Basis eines Dreiecks geht durch den Schnittpunkt C von zwei gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte, und von ihren Endpunkten a, b liegt der eine im ersten und der andere im zweiten derselben, während seine Seiten durch feste Punkte A, B gehen, deren einer dem einen und der andere dem andern Kegelschnitt angehört. Der Ort des Scheitels ist ein durch die Punkte A, B gehender Kegelschnitt.

Der Beweis folgt aus dem zweiten in der Aufg. 2 dieses Art. ausgesprochenen Satze. Wenn das Strahlbüschel $\{O.ABCD\}$ Punkte verbindet, welche denen von $\{o.abcd\}$ respective entsprechen, so durchschneiden sich nach dem erwähnten Satze die Sehnen OA, oa in einem Punkte r auf einer der gemeinsamen Sehnen der beiden Kegelschnitte; ebenso OB, ob in einem Punkte r' derselben Sehne, etc. Daher werden die Doppelverhältnisse beider Büschel durch das Doppelverhältniss der Reihe $\{r r' r'' r'''\}$ gemessen und sind einander gleich.

308. Die Sehne, welche zwei Punkte $\mu \tan \varphi$ und $\mu \cot \varphi$ verbindet, wo φ einen beliebigen constanten Winkel bezeichnet, berührt stets einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat. Denn nach Art. 305 ist die Gleichung der Sehne $\mu^2 x_1 - \mu x_2 (\tan \varphi + \cot \varphi) + x_3 = 0$ und diese ist wegen $\tan \varphi + \cot \varphi = 2 \operatorname{cosec} 2\varphi$ die Gleichung einer Tangente des Kegelschnitts $x_1 x_3 \sin^2 2\varphi = x_2^2$ im Punkte μ desselben. Man erkennt in der nämlichen Art, dass der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten in den Punkten $\mu \tan \varphi$, $\mu \cot \varphi$ der Kegelschnitt $x_1 x_3 = x_2^2 \sin^2 2\varphi$ ist.

Aufg. 1. Wenn in der 5. Aufg. des vorigen Art. die Enden der Basis in irgend einem Kegelschnitt liegen, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat und die gegebenen Punkte enthält, so soll man den Ort der Spitze bestimmen.

Sind $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$, $x_1 x_3 \sin^2 2\varphi - x_2^2 = 0$ die Gleichungen der Kegelschnitte, so schneidet eine Gerade, die den letzteren im Punkte μ berührt, den ersten in Punkten $\mu \tan \varphi$ und $\mu \cot \varphi$; wenn die festen Punkte μ', μ'' sind, so sind die Gleichungen der Seiten

$$\mu\mu' \tan\varphi\, x_1 - (\mu' + \mu \tan\varphi)\, x_2 + x_3 = 0,$$
$$\mu\mu'' \cot\varphi\, x_1 - (\mu'' + \mu \cot\varphi)\, x_2 + x_3 = 0$$

und die Elimination von μ liefert die Gleichung des Ortes

$$(x_3 - \mu' x_2)(\mu'' x_1 - x_2) = \tan^2\varphi\, (x_3 - \mu'' x_2)(\mu' x_1 - x_2).$$

Aufg. 2. Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einander haben, so ist das Doppelverhältniss von vier Punkten, in welchen vier Tangenten des einen den andern schneiden, dem Doppelverhältniss der andern vier Punkte, in welchen dieselben ihn durchschneiden, und dem der vier Berührungspunkte gleich.

Denn der Ausdruck für das Doppelverhältniss bleibt ungeändert, wenn man jedes μ entweder mit $\tan\varphi$ oder mit $\cot\varphi$ multiplicirt. Daraus entspringt der Begriff von zwei projectivischen Reihen von Punkten auf demselben Kegelschnitt; man sieht sofort, dass die Doppelpunkte derselben die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte sind. Sie können ohne Vermittelung der doppeltberührenden Kegelschnitte durch projectivische Büschel aus einem Punkte des Kegelschnitts erzeugt werden; wir wissen (Art. 301, Aufg. 2), dass die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen, falls diese Büschel in Involution sind; im Allgemeinen umhüllen sie einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

Aufg. 3. In der Aufg. 8 des vorigen Art. kann die Basis des Dreiecks statt durch einen festen Punkt C zu gehen, als Tangente eines Kegelschnitts vorausgesetzt werden, der mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat.

Aufg. 4. Wenn drei feste Sehnen eines Kegelschnitts aa', bb', cc' gegeben sind, so umhüllt eine vierte Sehne dd', welche man so bestimmt, dass die Doppelverhältnisse der Punkte $abcd$ und $a'b'c'd'$ einander gleich sind, einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. Denn bezeichnen wir durch a, b, c, a', b', c' zugleich die diesen Punkten entsprechenden Werthe von μ und sind μ, μ' dieselben für die Endpunkte der veränderlichen Sehnen, so gilt die Relation

$\dfrac{a-b}{\mu-b} : \dfrac{a-c}{\mu-c} = \dfrac{a'-b'}{\mu'-b'} : \dfrac{a'-c'}{\mu'-c'}$, oder mit Beseitigung der Brüche $A\mu\mu' + B\mu + C\mu' + D = 0$, wenn A, B, C, D gegebene Constanten bezeichnen. Bestimmt man μ' aus dieser Gleichung und setzt den erhaltenen Werth in die Gleichung der Sehne $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') x_2 + x_3 = 0$ ein, so erhält man

$$\mu(B\mu + D)x_1 + x_2 \{\mu(A\mu + C) - (B\mu + D)\} - x_3(A\mu + C) = 0 \text{ oder}$$
$$\mu^2(Bx_1 + Ax_2) + \mu\{Dx_1 + (C - B)x_2 - Ax_3\} - (Dx_2 + Cx_3) = 0.$$

Diese gerade Linie berührt nach der Form ihrer Gleichung (Art. 305) den Kegelschnitt

$$\{Dx_1 + (C - B)x_2 - Ax_3\}^2 + 4(Bx_1 + Ax_2)(Cx_3 + Dx_2) = 0 \text{ oder}$$
$$4(BC - AD)(x_1 x_3 - x_2^2) + \{Dx_1 + (B + C)x_2 + Ax_3\}^2 = 0;$$

und man erkennt aus der letztern Form der Gleichung, dass derselbe mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat. (Art. 272.) In dem speciellen Falle $B = C$ wird die die Grössen μ, μ' verbindende Re-

lation $A\mu\mu' + B(\mu + \mu') + D = 0$ und man sieht daraus nach Art. 51, dass die Sehne $\mu\mu' x_1 - (\mu + \mu') x_2 + x_3 = 0$ durch einen festen Punkt geht. Wenn man im allgemeinen Falle die entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Systemen auf demselben Kegelschnitt mit zwei beliebigen festen Punkten P, P' des nämlichen Kegelschnitts verbindet, so ist der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen ein durch P, P' gehender Kegelschnitt. Endlich werden in zwei Kegelschnitten von den Tangenten eines dritten Kegelschnitts, der mit beiden in doppelter Berührung ist, projectivische Systeme von Punkten bestimmt; aber nicht umgekehrt umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte projectivischer Systeme in verschiedenen Kegelschnitten nothwendig einen Kegelschnitt.

Insbesondere wenn ein Winkel von constanter Grösse sich um seinen Scheitel dreht, so bestimmt er in einem durch den letzteren gehenden Kegelschnitt eine Sehne, deren Enveloppe ein ihn doppelt berührender Kegelschnitt ist; die imaginären Berührungspunkte sind von der Grösse des Winkels unabhängig. Offenbar schneiden sich auch die Tangenten des Kegelschnitts in den entsprechenden Punkten von zwei solchen projectivischen Reihen auf einem Kegelschnitt, der in ihren Doppelpunkten mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat. Nach dem Satze des Art. 276 erhält man z. B. den Satz: Wenn zwei Kegelschnitte S, S' ähnlich, concentrisch und in ähnlicher Lage sind, und von den Punkten des einen S die Tangentenpaare an den andern gelegt werden, so sind diese die Richtungen der Strahlen von zwei concentrischen projectivischen Büscheln, deren Doppelstrahlen den Asymptoten beider Kegelschnitte parallel sind.

Aufg. 5. Wenn ein Polygon, dessen Seiten alle bis auf eine durch feste Punkte gehen, einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so ist die Enveloppe jener Seite ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat. Denn denken wir vier beliebige Lagen des Polygons, dessen Ecken durch a, b, c, etc. bezeichnet sein mögen, so gelten die Relationen $\{a a' a'' a'''\} = \{b b' b'' b'''\} = \{c c' c'' c'''\} =$ etc. und das Problem ist damit auf das Problem der vorigen Aufgabe zurückgeführt, giebt also auch dasselbe Resultat.

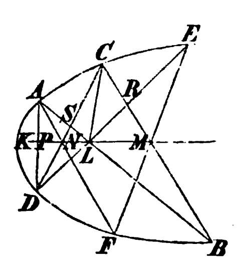
Aufg. 6. Man soll in einen Kegelschnitt ein Polygon einbeschreiben, dessen Seiten alle durch feste Punkte gehen.

Denken wir einen Punkt a des Kegelschnitts als Ecke des Polygons willkürlich gewählt und ein Polygon gebildet, dessen Seiten respective durch die bezeichneten Punkte gehen, so fällt im Allgemeinen der Punkt z, in welchem die letzte Seite desselben den Kegelschnitt schneidet, nicht auf a; wenn wir aber vier solche Polygone eingeschrieben denken, so ist wie in der vorigen Aufgabe $\{a a' a'' a'''\} = \{z z' z'' z'''\}$. Fiele aber a''' mit z''' zusammen, so wäre das vierte Polygon das gesuchte. Das Problem ist damit auf das Folgende reducirt: Wenn drei Paare von Punkten $a a' a''$, $z z' z''$ auf einem Kegelschnitt gegeben sind, so soll ein Punkt K desselben Kegelschnitts gefunden werden, für welchen

$\{Kaa'a''\} = \{Kzz'z''\}$ ist. In dieser Fassung des Problems erkennt man, dass seine Lösung zugleich die Bestimmung der Doppelstrahlen von zwei concentrischen projectivischen Büscheln enthält. Natürlich bedient man sich für diesen Zweck eines durch den Scheitel des Büschels gehenden Kreises als Hilfskegelschnitt. Man hat für diesen den Doppelsatz:

Sind A, B, C und A', B', C' drei Paare entsprechender Elemente projectivischer Punkte oder Tangenten eines Kreises, so bestimmen AB' und $A'B$, BC' und $B'C$, CA' und $C'A$ drei Punkte einer Geraden oder drei Strahlen durch einen Punkt T, welche mit dem Kreise zwei Punkte oder zwei Tangenten K, K' gemein haben, die mit den beiden Gruppen von drei Elementen gleiches Doppelverhältniss bestimmen. Die Gerade oder der Punkt T dient auch zur Construction entsprechender Elementenpaare. (Vergl. Art. 300.) Sind die Systeme involutorisch, so genügen zwei Elementenpaare A, B, A', B' zu ihrer Bestimmung und die AB', $A'B$; AB, A', B' liefern die Gerade oder den Punkt, welcher die Doppelpunkte oder Doppelstrahlen bestimmt. Die Bestimmung der Doppelpunkte von zwei projectivischen Reihen in derselben geraden Linie, insbesondere auch der Doppelelemente involutorischer Reihen und Büschel (Art. 301, Aufg. 9), ist dadurch zugleich gewonnen.

Denken wir allgemein $az''a'za''z'$ als Ecken eines eingeschriebenen Sechsecks, so dass az, $a'z'$, $a''z''$ die Paare der Gegenecken desselben sind, so kann jeder der Punkte, in welchen die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten den Kegelschnitt schneidet, als ein Punkt K genommen werden; denn wenn in der Figur die Punkte A, C, E den a, a', a'' und die Punkte D, F, B den z, z', z'' entsprechen und die Seiten in der Ordnung $ABCDEF$ genommen werden, so sind L, M, N die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und da $\{KPNL\}$ ebensowohl $\{D.KACE\}$ als $\{A.KDFB\}$ misst, so ist $\{KACE\} = \{KDFB\}$, wie verlangt wurde. Der gegebene Beweis zeigt zugleich, dass die gegebene Construction auch noch das viel allgemeinere Problem löst: Man soll in einen Kegelschnitt ein Polygon einbeschreiben, von dessen Seiten jede einen von einer Schaar fester Kegelschnitte berührt, die mit dem gegebenen in doppelter Berührung sind.



Aus der letzten Aufgabe erkennt man, dass K ein Berührungspunkt eines den gegebenen doppelt berührenden Kegelschnitts ist, welcher die geraden Linien az, $a'z'$, $a''z''$ zu Tangenten hat und es ist daher im Vorigen zugleich die Lösung der Aufgabe gegeben: Einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher drei gerade Linien zu Tangenten und mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat.

Aufg. 7. Man bestimme die Schnittpunkte einer geraden Linie mit dem durch fünf Punkte a, b, c, d, e gegebenen Kegelschnitt.

Wenn man die Punkte a, b mit den drei Punkten c, d, e verbindet,

so erhält man drei Paare entsprechender Strahlen von zwei projectivischen Büscheln. Dieselben bestimmen in der Geraden zwei projectivische Reihen, deren Doppelpunkte die gesuchten Punkte sind. Man construirt sie nach der Bemerkung bei der vorigen Aufgabe mit Hilfe eines festen Kreises.

Aufg. 8. Man soll die von einem gegebenen Punkte ausgehenden Tangenten eines durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitts construiren.

Aufg. 9. Man bestimme die Asymptotenrichtungen für einen durch fünf Punkte gehenden Kegelschnitt.

309. Auch die Gleichungsform des Art. 278, in welcher der Kegelschnitt auf ein Fundamentaldreieck bezogen ist, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, oder das ein System von drei harmonischen Polen und Polaren desselben liefert, gewährt den nämlichen Vorzug, dass es möglich ist, einen Punkt des Kegelschnitts durch einen einzigen Parameter auszudrücken.

Denn schreibt man $lL = nN \cos \varphi$, $mM = nN \sin \varphi$, so erhält man wie in Art. 132 und 239 für die zwei Punkte φ, φ' die verbindende Sehne

$lL \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + mM \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = nN \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$ und für die Tangente im Punkte φ insbesondere

$lL \cos \varphi + mM \sin \varphi = nN$. Schreiben wir aber die Gleichung in der mehr symmetrischen Form $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ oder $\Sigma a_{ii}x_i^2 = 0$ (immer für $i = 1, 2, 3$, so dass alle nachfolgenden Summen aus nur drei Gliedern bestehen), so ergiebt sich für die Tangente im Punkte x' die Gleichung

$a_{11}x_1x_1' + a_{22}x_2x_2' + a_{33}x_3x_3' = 0$ oder $\Sigma a_{ii}x_ix_i' = 0$ und für die Gleichung der Polare des beliebigen Punktes x' dieselbe Form. Die Zusammenstellung derselben mit der allgemeinen Gleichung der geraden Linie $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$ oder $\Sigma\xi_ix_i = 0$ lehrt, dass die Coordinaten des Pols dieser Geraden durch $\xi_1 : a_{11}$, $\xi_2 : a_{22}$, $\xi_3 : a_{33}$ gegeben sind, und ferner, da der Pol einer Tangente ihr Berührungspunkt ist, dass die gerade Linie $\Sigma\xi_ix_i = 0$ den betrachteten Kegelschnitt berührt, sobald $a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}\xi_3^2 = 0$ oder $\Sigma a_{ii}a_{jj}\xi_k^2 = 0$ ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird der Kegelschnitt offenbar durch die vier geraden Linien $\xi_1x_1 \pm \xi_2x_2 \pm \xi_3x_3 = 0$ berührt und die Fundamentallinien sind daher die Diagonalen des von diesen geraden Linien gebildeten Vierecks. (Vergl. die Aufg. des Art. 109.)

Man erkennt ebenso, dass bei Erfüllung der Bedingung

$\Sigma a_{ii} x_i'^2 = 0$ der Kegelschnitt durch die vier Punkte $x_1', \pm x_2', \pm x_3'$ hindurchgeht, dass also die Ecken des Fundamentaldreiecks die Durchschnittspunkte der Diagonalen und der Gegenseitenpaare des Vierecks sind.

Aufg. 1. Man soll den Ort des Pols einer geraden Linie $\Sigma \xi_i x_i = 0$ in Bezug auf einen Kegelschnitt bestimmen, der die vier festen Punkte $x_1', \pm x_2', \pm x_3'$ enthält.

Aufl. Seine Gleichung ist $\Sigma \xi_i x_i'^2 x_j x_k = 0$.

Aufg. 2. Man bestimme den Ort des Pols einer geraden Linie $\Sigma \xi_i x_i = 0$ in Bezug auf einen Kegelschnitt, der vier feste Gerade $a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm a_3 x_3 = 0$ berührt.

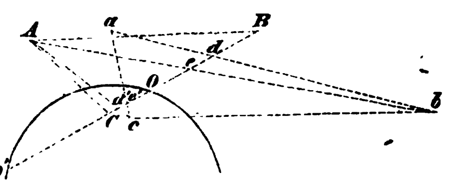
Aufl. Seine Gleichung ist $\Sigma a_i^2 \xi_j \xi_k x_i = 0$.

Diese Beispiele geben auch den Ort des Centrums als den des Pols der unendlich entfernten geraden Linie und die Bedingung der Parabel als die der Berührung mit derselben, nämlich für

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = s_1 : s_2 : s_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3.$$

Aufg. 3. Soll der betrachtete Kegelschnitt ein Kreis sein, so muss die gerade Linie, welche sein Centrum mit einem Eckpunkt des Fundamentaldreiecks verbindet, auf der Polare des Letzteren, d. h. der gegenüberliegenden Seite des Fundamentaldreiecks rechtwinklig sein, oder sein Centrum ist der Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks, für welchen $x_1 \cos A_1 = x_2 \cos A_2 = x_3 \cos A_3$ ist und daher z. B. $a_{22} s_3 x_2 - a_{33} s_2 x_3 = 0$ rechtwinklig auf $x_1 = 0$, so dass $a_{22} : a_{33} = s_2 \cos A_2 : s_3 \cos A_3$ und überhaupt $a_{11} : a_{22} : a_{33} = s_1 \cos A_1 : s_2 \cos A_2 : s_3 \cos A_3$ sein muss. Die Gleichung des Kreises, in Bezug auf welchen das Fundamentaldreieck die vorausgesetzte Beziehung hat, ist also $\Sigma x_i^2 s_i \cos A_i = 0$ oder $\Sigma x_i^2 \sin 2 A_i = 0$ und derselbe ist somit nur für ein stumpfwinkliges Dreieck reell, was auch geometrische Ueberlegungen bestätigen.

Aufg. 4. Die Ecken von zwei Dreiecken ABC, abc, welche in Bezug auf den nämlichen Kegelschnitt sich selbst conjugirt ist, liegen auf einem Kegelschnitt.

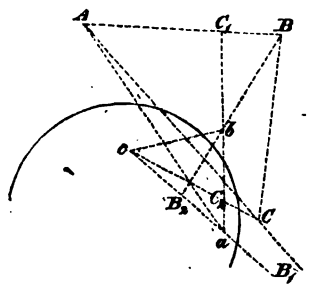


Denken wir d, e als Schnittpunkte von BC mit ab und Ab und ebenso d', e' als Schnittpunkte von BC mit Ac und ac, und sind O, O' die Schnittpunkte der Geraden BC mit dem Kegelschnitt, so ist d der Pol von Ac, B der Pol von AC und e der Pol von Ae', d. h. OO' ist durch dd', BC und ee' harmonisch getheilt oder diese drei Punktepaare gehören zu einer Involution. In Folge dessen gilt die Kette von Relationen

$$\{a \,.\, BbCc\} = \{BdCe'\} = \{Cd'Be\} = \{BeCd'\} = \{A \,.\, BbCc\}$$

und somit liegen a, A, B, b, C, c auf dem nämlichen Kegelschnitt.

Aufg. 5. Wenn die Dreiecke ABC und abc einander so entsprechen, dass die Seiten bc, ca, ab des einen die Polaren von den Ecken A, B, C des andern in Bezug auf einen Kegelschnitt sind, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte oder das Sechseck $AbCaBc$ ist einem Kegelschnitt umgeschrieben.



Denken wir die Schnittpunkte B_1, B_2 von ac mit AC, Bb respective, so ist B_1 der Pol von Bb und B der Pol von B_1B_2, also die Gruppe der Punkte B, B_1, B_2 eine Gruppe harmonischer Pole, ebenso C, C_1, C_2, wenn C_1 und C_2 die Schnittpunkte von ab mit AB, Cc respective bezeichnen. Daher liegen $BB_1B_2CC_1C_2$ auf demselben Kegelschnitt nach dem Satze der vorigen Aufgabe; dann aber gehören nach dem Satze von Pascal die Schnittpunkte von BC_1, CB_1; BB_2, CC_2; B_1B_2, C_1C_2 einer geraden Linie an und es gehen daher Aa, Bb, Cc durch einen Punkt oder $AbCaBc$ ist einem Kegelschnitt umgeschrieben nach dem Satze von Brianchon.

310. Die Gleichung des vorigen Art. wird mit Vortheil bei der Untersuchung der Eigenschaften der Brennpunkte verwendet. Denn wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen von zwei zu einander rechtwinkligen Geraden durch den Brennpunkt und $x_3 = 0$ die zugehörige Directrix darstellen, so ist die Gleichung der Curve $x_1^2 + x_2^2 = c^2x_3^2$, eine specielle Form der hier betrachteten Gleichung. Ihre Gestalt zeigt (Art. 278), dass der Brennpunkt ($x_1 = x_2 = 0$) der Pol der Directrix ist, und dass die Polare jedes Punktes der Directrix die auf seiner Verbindungslinie mit dem Brennpunkte in diesem errichtete Normale ist (Art. 200); denn $x_2 = 0$, die Polare von $x_1 = x_3 = 0$, ist zu $x_1 = 0$ normal und $x_1 = 0$ kann jede durch den Brennpunkt gehende Gerade sein. Nach der Terminologie des Art. 294 kann man sagen, dass jede zwei conjugirte Gerade, die durch den Brennpunkt gehen, zu einander rechtwinklig sind; die Paare dieser conjugirten Geraden bilden eine Involution von rechten Winkeln. (Art. 301, Aufg. 5–7.)

Die Form der Brennpunktsgleichung zeigt ferner, dass die zwei imaginären geraden Linien $x_1^2 + x_2^2 = 0$ Tangenten der Curve sind, welche vom Brennpunkt ausgehen; da diese Linien, die Doppelstrahlen jener Involution, von x_3 oder von der Lage der Directrix ganz unabhängig sind, so sieht man, dass alle Kegelschnitte, welche einen Brennpunkt gemein haben, zwei gemeinschaftliche durch diesen

Brennpunkt gehende imaginäre Tangenten besitzen. In Folge dessen haben alle Kegelschnitte, denen beide Brennpunkte gemeinsam sind — man nennt sie confocale Kegelschnitte — vier gemeinschaftliche imaginäre Tangenten oder sind als Kegelschnitte zu betrachten, die demselben Vierseit eingeschrieben sind. Und da endlich die imaginären Tangenten aus einem Brennpunkt nach ihrer Gleichung sich als identisch mit den geraden Linien erweisen, die von da nach den imaginären Punkten eines Kreises im Unendlichen gezogen werden können (Art. 277), so erhält man die wahrhaft allgemeine Auffassung der Brennpunkte wie folgt: Von jedem der imaginären Punkte eines Kreises im Unendlichen gehen zwei Tangenten an einen beliebigen Kegelschnitt; dieselben bilden ein Vierseit, welches zwei reelle Ecken besitzt, die Brennpunkte des Kegelschnitts, und dessen zwei weitere imaginäre Ecken als imaginäre Brennpunkte desselben angesehen werden können.

Aufg. 1. Die Tangenten einer Parabel aus einem Punkte der Directrix sind rechtwinklig zu einander. Denn die Tangenten der Curve von dem Punkte $x_1 = x_3 = 0$ sind offenbar durch $ex_3 \pm x_1 = 0$ dargestellt. Für die Parabel ist $e = 1$ und diese Tangenten sind die innere und äussere Halbirungslinie des Winkels $(x_1 x_3)$.

Da im allgemeinen Falle wegen $x_1 = ex_3 \cos\varphi$, $x_2 = ex_3 \sin\varphi$ auch $x_2 = x_1 \tan\varphi$ ist, so drückt φ den Winkel aus, welchen ein beliebiger Radius vector mit der Fundamentallinie x_1 macht. In Folge dessen kann man

Aufg. 2. die Enveloppe einer Sehne bestimmen, die am Brennpunkte einen constanten Winkel spannt. Denn die Sehne

$$x_1 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x_2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = ex_3 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

berührt nach dem vorigen Art. immer den Kegelschnitt

$x_1^2 + x_2^2 = e^2 x_3^2 \cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$; d. h. einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Directrix gemein hat.

Aufg. 3. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte von zwei Tangenten halbirt den Winkel zwischen den Radien vectoren der Berührungspunkte und ist rechtwinklig auf der Geraden, welche vom Brennpunkte nach dem Durchschnitt der Directrix mit der Berührungssehne gezogen wird.

Die Gleichung der Linie vom Brennpunkt nach dem Schnittpunkt der den Punkten φ, φ' entsprechenden Tangenten geht hervor aus der Subtraction von $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi - ex_3 = 0$ und

$x_1 \cos\varphi' + x_2 \sin\varphi' - ex_3 = 0$ und ist also

$x_1 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') - x_2 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 0$, d. h. sie bildet mit der Geraden x_1 den Winkel $\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ und halbirt also den Winkel der Ra-

diep vectoren der Berührungspunkte. Die Gerade vom Brennpunkt nach dem Schnittpunkt der Directrix und der Berührungssehne ist aber durch $x_1 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') + x_2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 0$ ausgedrückt und also auf der vorigen normal.

Aufg. 4. Man bestimme den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten, deren Berührungspunkte mit dem Brennpunkt den constanten Winkel 2δ bestimmen.

Durch eine Elimination, welche genau mit der in Aufg. 2 des Art. 132 übereinstimmt, findet man die Gleichung des Ortes in der Form $(x_1^2 + x_2^2)\cos^2\delta = e^2 x_3^2$; sie repräsentirt einen Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat und dessen Excentricität gleich $e : \cos\delta$ ist. Wenn die Curve eine Parabel ist, so ist in dem Falle unserer Aufgabe der Winkel zwischen den Tangenten gegeben; denn die Tangente $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi - x_3 = 0$ halbirt den von $x_3 = 0$ und $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = 0$ gebildeten Winkel. Der Winkel der Tangenten ist daher der Winkel zwischen den Linien $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = 0$ und $x_1 \cos\varphi' + x_2 \sin\varphi' = 0$ oder gleich $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$, oder der Winkel zwischen zwei Tangenten einer Parabel ist die Hälfte des Winkels, welchen ihre Berührungspunkte mit dem Brennpunkte bestimmen. Der Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einen bestimmten Winkel mit einander bilden, ist eine Hyperbel von demselben Brennpunkt und derselben Directrix und von einer Excentricität, welche der Secante des gegebenen Winkels gleich ist, oder deren Asymptotenwinkel doppelt so gross ist als der gegebene. (Art. 175.)

Aufg. 5. Die Punkte der grossen Axe, welche Tangente und Normale in demselben Punkte eines Kegelschnitts bestimmen, sind zu den Brennpunkten harmonisch conjugirt, denn Tangente und Normale sind die Halbirungslinien der von den Radien vectoren gebildeten Winkel. Die Brennpunkte sind daher die Doppelpunkte der in der grossen Axe durch die Paare zusammengehöriger Tangenten und Normalen bestimmten Involution, das Centrum ist der Centralpunkt derselben.

Aufg. 6. Das zwischen zwei festen Tangenten gelegene Stück der Tangente eines Kegelschnitts spannt am Brennpunkte desselben einen Winkel von constanter Grösse. (Art. 200, Aufg. 1.)

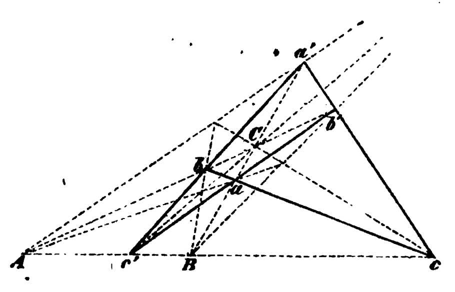
Denn die von dem Punkte ausgehenden Tangenten sind die Doppelstrahlen der beiden projectivischen Büschel von Geraden, die von ihm nach den Durchschnitten der beweglichen Tangente mit den beiden festen Tangenten gehen, und sie sind zugleich die nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen gehenden Geraden; darum ist nach Art. 299, 301 der Winkel der Paare entsprechender Strahlen von constanter Grösse. Da ferner nach Art. 302 die beiden Tangenten eines Kegelschnitts aus einem Punkte, die Geraden nach den Brennpunkten und die nach den imaginären Kreispunkten — diese bilden mit den Brennpunkten Gegeneckenpaare eines umgeschriebenen Vierseits — drei Paare einer Involution sind, deren Doppelstrahlen als harmonisch zu den imaginären Kreispunkten einen rechten Winkel mit einander bilden (Art. 301, Aufg. 7).

so erhält man den Satz des Art. 197: dass der Winkel der Tangenten von einem Punkte an den Kegelschnitt dieselben Halbirungslinien hat, wie derjenige der nach den Brennpunkten gehenden Geraden.

Aufg. 7. Man bestimme den Ort der Brennpunkte der durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitte.

Die Frage ist in der allgemeinern nach demselben Orte für die Kegelschnitte eines Systems enthalten, welche vier Bedingungen unterworfen sind und damit in der nach dem Ort der Durchschnitte der Tangenten, die an diese von zwei festen Punkten o, o' ausgehen oder die ihnen mit einem festen Kegelschnitt U gemeinsam sind. Wir denken die Kegelschnitte des Systems und n als die Anzahl derselben, welche eine feste Gerade berühren und bestimmen die Zahl der Schnittpunkte des fraglichen Ortes für die festen Punkte o, o' mit einer durch o gehenden Geraden. Eine solche Gerade wird von n Kegelschnitten des Systems berührt und von o' gehen an diese $2n$ Tangenten, welche dieselbe in ebensoviel Punkten des Ortes schneiden; die Gerade oo' ist überdiess Tangente von n Kegelschnitten des Systems, an welche von o aus n andere Tangenten gehen, die in o einen $n$fachen Punkt des Ortes erzeugen. Somit ist der fragliche Ort von der Ordnung $3n$ und also insbesondere für die durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitte mit $n = 2$ eine Curve sechster Ordnung mit Doppelpunkten in o, o'. Fallen o, o' mit den imaginären Kreispunkten ω, ω' im Unendlichen zusammen, so ist der betrachtete Ort der Ort der Brennpunkte, auf welchen die Frage sich richtet und ist somit eine Curve sechster Ordnung, welche jene Kreispunkte zu Doppelpunkten hat.

Aufg. 8. Die Frage nach dem Ort der Brennpunkte der einem festen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist wegen $n = 1$ in der vorigen Aufgabe mit gelöst. Analoge Betrachtungen liefern aber für diese die Kreispunkte enthaltende Curve dritter Ordnung noch nähere Data. Unter den dem Vierseit $aba'b'$ eingeschriebenen Kegelschnitten sind drei Punktepaare a, a'; b, b'; c, c' und eine Parabel; jene gehören der Curve an, diese hat einen endlichen Brennpunkt f und einen unendlich fernen f' in der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Geraden. Da das Dreieck $f\omega\omega'$ mit jedem der Dreiecke bca', cab', abc', $a'b'c'$ demselben Kegelschnitte (der Parabel) umgeschrieben ist, so sind dieselben Paare von Dreiecken auch respective demselben Kegelschnitt eingeschrieben, d. h. f ist der gemeinschaftliche Punkt der vier den Dreiecken umgeschriebenen Kreise. So kennt man bereits neun Punkte der Curve. Sie geht aber auch durch die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks ABC.



Denn für den Fusspunkt l der Höhe in aa' sind $l\omega$, $l\omega'$ Tangenten eines Kegelschnitts des Systems und gehören somit zu einer Involution, welche aa' und lA zu Doppelstrahlen hat, das Letztere, weil A der Pol von aa' für alle Kegelschnitte des Systems ist; somit ist lA die Tangente des durch l gehenden Kegelschnitts des Systems. Als Doppelstrahlen der Involution sind aber endlich laa' und lA harmonisch conjugirt zu $l\omega$, $l\omega'$, d. h: zu einander rechtwinklig.

311. Zwei beliebige Kegelschnitte haben ein **gemeinschaftliches System harmonischer Pole und Polaren** oder ein sich selbst conjugirtes Dreieck.

Denn wenn die Kegelschnitte sich in den Punkten A, B, C, D durchschneiden (Aufg. 1, Art. 109), so ist das Dreieck EFO, welches die Durchschnittspunkte der drei Paare gemeinschaftlicher Sehnen bilden, in Bezug auf jeden von ihnen sich selbst conjugirt; wenn die Seiten dieses Dreiecks durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ dargestellt sind, so können die Gleichungen beider Kegelschnitte in der Form $\Sigma a_{ii} x_i^2 = 0$, $\Sigma a_{ii}' x_i^2 = 0$ dargestellt werden. Das analytische Problem der Ueberführung von zwei allgemeinen Gleichungen in diese Form vermittelst linearer Substitutionen werden wir später erledigen. Hier bemerken wir bestätigend, dass diese Gleichungen durch Elimination von x_1 die Gleichung $(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})\, x_2^2 - (a_{11}'a_{33} - a_{11}a_{33}')\, x_3^2 = 0$, d. h. $(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})\, x_2 \pm (a_{11}'a_{33} - a_{11}a_{33}')\, x_3 = 0$ als Gleichung des einen Paars von gemeinschaftlichen Sehnen liefern; sie gehen durch den Eckpunkt des Fundamentaldreiecks $x_2 = x_3 = 0$. Da das Analoge den andern Eliminationen entspricht, so schliesst man, dass die drei Paare gemeinschaftlicher Sehnen durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehen und mit diesem die Figur eines vollständigen Vierecks bilden. Dass die Punkte des zwei Kegelschnitten gemeinschaftlichen Systems harmonischer Pole nur die Schnittpunkte der Paare gemeinschaftlicher Sehnen sein können, erkennt man auch aus der Grundeigenschaft harmonischer Pole; nur eine gemeinschaftliche Sehne enthält für beide Kegelschnitte dasselbe System harmonischer Pole, weil diese zu den Schnittpunkten derselben mit den Kegelschnitten harmonisch conjugirt sind. Der Durchschnittspunkt von zwei gemeinschaftlichen Sehnen hat daher in beiden Kegelschnitten dieselbe Polare. Auch wenn die vier Schnittpunkte der Kegelschnitte imaginär sind, bleiben die Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ reell; denn irgend eine Gleichung mit reellen Coefficien-

ten, die durch die Coordinaten $x' \pm x''i$, $y' \pm y''i$ befriedigt ist, wird auch von den Werthen $x' - x''i$, $y' - y''i$ erfüllt und die Verbindungslinie dieser Punkte ist reell; die vier imaginären Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten existiren in zwei Paaren $x' \pm x''i$, $y' \pm y''i$; $x''' \pm x''''i$, $y''' \pm y''''i$, und zwei von den gemeinschaftlichen Sehnen sind reell, die vier andern aber imaginär. Die Gleichungen dieser imaginären Sehnen sind von der Form $L \pm Mi = 0$, $L' \pm M'i = 0$ und sie bestimmen daher die reellen Schnittpunkte $L = 0$, $M = 0$; $L' = 0$, $M' = 0$. Somit sind die drei Punkte E, F, O sämmtlich reell.

Wenn die Kegelschnitte sich in zwei reellen und in zwei imaginären Punkten durchschneiden, so sind zwei von den gemeinschaftlichen Sehnen reell, nämlich die, welche die beiden reellen und die, welche die beiden imaginären Durchschnittspunkte mit einander verbinden; die übrigen vier gemeinschaftlichen Sehnen sind aber imaginär. Und da jede der Letzteren durch einen reellen Schnittpunkt geht, so können sie keinen weitern reellen Punkt enthalten; deshalb sind in diesem Falle von den drei Punkten E, F, O zwei imaginär und einer ist reell und von den Seiten des sich selbst conjugirten Dreiecks ist eine reell und die beiden andern sind imaginär.

Aufg. 1. Man soll den Ort der Spitze für ein Dreieck bestimmen, dessen Basisecken sich längs eines Kegelschnitts $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 = 0$ bewegen, während zugleich seine Seiten einen andern Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ berühren.

Wie in der Aufg. 1 des Art. 132 sind die Coordinaten des Durchschnitts der Tangenten in den Punkten φ_1, φ_3 durch $\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3)$, $\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3)$, $\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)$ gegeben und die Bedingungen des Problems liefern zuerst die Gleichung

$$a_{11}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) + a_{22}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) = a_{33}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

oder $(a_{11} + a_{22} - a_{33}) + (a_{11} - a_{22} - a_{33})\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + (a_{22} - a_{33} - a_{11})\sin\varphi_1\sin\varphi_3 = 0$. Ebenso ist $(a_{11} + a_{22} - a_{33}) + (a_{11} - a_{22} - a_{33})\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + (a_{22} - a_{33} - a_{11})\sin\varphi_2\sin\varphi_3 = 0$, also

$$(a_{11} + a_{22} - a_{33})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = (a_{22} + a_{33} - a_{11})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\varphi_3,$$
$$(a_{11} + a_{22} - a_{33})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = (a_{11} + a_{33} - a_{22})\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\sin\varphi_3;$$

und da die Coordinaten des Punktes, dessen Ort wir suchen, $\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ sind, so ist die Gleichung des Ortes

$$\frac{x_1^2}{(a_{22} + a_{33} - a_{11})^2} + \frac{x_2^2}{(a_{33} + a_{11} - a_{22})^2} = \frac{x_3^2}{(a_{11} + a_{22} - a_{33})^2}.$$

Aufg. 2. Ein Dreieck ist dem Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

eingeschrieben und zwei seiner Seiten berühren den Kegelschnitt $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = a_{33}x_3^2$; welches ist die Enveloppe der dritten Seite?

Aufl. Ihre Gleichung ist

$$(a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33})^2 x_1^2 + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} - a_{33}a_{11})^2 x_2^2 = (a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{11}a_{22})^2 x_3^2.$$

312. **Wenn ein System von Kegelschnitten ein gemeinschaftliches sich selbst conjugirtes Dreieck besitzt, so wird jede Transversale, die durch einen der Eckpunkte dieses Dreiecks geht, durch die Kegelschnitte des Systems in Paaren einer Involution geschnitten.**

Denn da jener Eckpunkt in allen diesen Kegelschnitten dieselbe Polare hat, so sind die Schnittpunkte der Transversale mit jedem von diesen harmonisch conjugirt in Bezug auf dieselben zwei Punkte, nämlich den gewählten Eckpunkt des Dreiecks und den in dieser Polare oder der Gegenseite desselben gelegenen Punkt; diese sind also die Doppelpunkte einer Involution, welche von jenen gebildet wird. Wenn wir in $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$ $x_1 = kx_2$ substituiren, so wird $(a_{11}k + a_{22})x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ und diese Gleichung stellt zwei zu $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ harmonisch conjugirte Gerade dar.

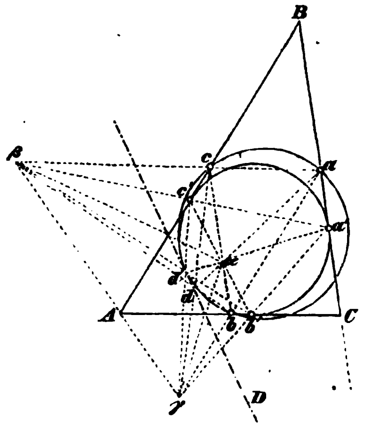
Insbesondere wird z. B. ein System von Kegelschnitten, welches dieselben vier Geraden berührt, von einer Transversale involutorisch geschnitten, welche durch einen der Diagonalenschnittpunkte des Vierseits geht (Art. 109); die Schnittpunkte in den Diagonalen sind die Doppelpunkte und die in den Gegenseitenpaaren des Vierseits gelegenen Punkte sind conjugirte Punkte des Systems.

Aufg. 1. Wenn zwei Kegelschnitte U und V ihre gemeinschaftlichen Tangenten A, B, C, D in den Punkten a, b, c, d; a', b', c', d' berühren, so hat ein Kegelschnitt S', der durch die Punkte a, b, c geht und D in d' berührt, zur zweiten Durchschnittssehne mit V die gerade Linie, welche die Schnittpunkte von A mit bc, B mit ca, C mit ab verbindet.

Wenn der Kegelschnitt V die Linie ab in α, β schneidet, so gehören nach dem Satze des Artikels, da ab durch einen Diagonalenschnittpunkt von $ABCD$ hindurchgeht, ab, $\alpha\beta$ zu einem involutorischen System, in welchem die Schnittpunkte von ab mit C und D conjugirte Punkte sind. Nach dem vorigen Art. schneiden aber die gemeinschaftlichen Sehnen von S und V die Linie ab in Punkten, welche zu derselben Involution gehören, in der die Schnittpunkte von ab mit S und V, d. h. a, b; α, β entsprechende Punkte sind. Ist daher D die eine der gemein-

schaftlichen Sehnen, so muss die andere durch den Schnittpunkt von C mit ab gehen.

Aufg. 2. Wenn in ein Dreieck eine Ellipse eingeschrieben wird, die in den Mittelpunkten a, b, c der Seiten berührt und a', b', c' die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises sind, und wenn die vierte gemeinschaftliche Tangente D des Kreises und der Ellipse jenen in d' berührt, so berührt der durch die Mittelpunkte der Seiten gehende Kreis den eingeschriebenen Kreis in d'. Nach der ersten Aufgabe berührt ein durch a, b, c gehender Kegelschnitt den Kreis in d', wenn er auch durch die Punkte geht, in welchen der Kreis von der Verbindungslinie der Schnittpunkte von A mit bc, B mit ca, C mit ab geschnitten wird. Diese Linie ist aber in unserm Falle unendlich entfernt, der berührende Kegelschnitt also auch ein Kreis. So ergiebt sich der Feuerbach'sche Satz (Art. 162, Aufg. 4) als ein specieller Fall von Aufg. 1.



Der Punkt d' und die gerade Linie D können ohne Verzeichnung der Ellipse construirt werden. Denn da die Diagonalen eines eingeschriebenen und des entsprechenden umgeschriebenen Vierecks sich in einem Punkte schneiden, so gehen die geraden Linien ab, cd, $a'b'$, $c'd'$ und die beiden Verbindungslinien von AD, BC; AC, BD durch den nämlichen Punkt. Sind also α, β, γ die Ecken des Dreiecks, welches von den Durchschnittspunkten von bc, $b'c'$; ca, $c'a'$; ab, $a'b'$ gebildet wird, so schneiden sich die geraden Linien $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ in d'. Oder in andern Worten, das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist mit abc, $a'b'c'$ für die Centra der Homologie d, d' homolog oder perspectivisch. In derselben Weise ist das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ mit ABC perspectivisch für die Linie D als Axe.

313. Endlich lassen sich an die Gleichungsform für den durch vier Punkte A, B, C, D gehenden Kegelschnitt $x_1 x_3 = k x_2 x_4$, in welcher $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten ab, ba', $a'b'$, $b'a$ des durch jene gebildeten Vierecks darstellen und somit durch eine Relation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ verbunden sind — weil jede derselben mittelst der drei andern auf lineare Weise ausdrückbar ist, — Betrachtungen anknüpfen, die gewissermassen ein System von Vierliniencoordinaten begründen und zu interessanten Resultaten führen.

Man erhält für die Tangente im Punkte x' des Kegelschnitts $x_1x_3 - kx_2x_4 = 0$ die Gleichung $x_3'x_1 + x_1'x_3 - k(x_4'x_2 + x_2'x_4) = 0$ mit der Bedingung $x_1'x_3' - kx_2'x_4' = 0$, also durch Elimination von k die Gleichung der Tangente eines Punktes in Bezug auf vier feste Punkte $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$. Soll sie mit der willkürlichen Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ zusammenfallen, so muss

$$(\xi_1 + k)\, x_1 = -(\xi_2 + k)\, x_2 = (\xi_3 + k)\, x_3 = -(\xi_4 + k)\, x_4 = c,$$

d. h. einer Constanten gleich sein. Nun ist auch

$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 0$ und $\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4' = 0$, also $(\xi_2 - \xi_4)\, x_2' = -(\xi_1 - \xi_4)\, x_1' - (\xi_3 - \xi_4)\, x_3'$ und nach den vorigen Relationen

$$\xi_1 + k - \frac{c}{x_1'} = 0,\quad \xi_2 + k - \frac{c}{x_2'} = 0,\quad \xi_3 + k - \frac{c}{x_3'} = 0 \text{ oder}$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{x_1'}, & \frac{\xi_2 - \xi_4}{(\xi_1 - \xi_4)x_1' + (\xi_3 - \xi_4)x_3'}, & \frac{1}{x_3'} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

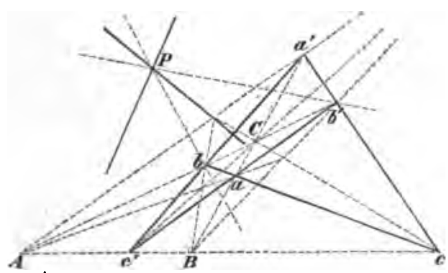
$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\xi_1 - \xi_4}, & \frac{1}{\xi_2 - \xi_4}, & \frac{1}{\xi_3 - \xi_4} \\ \frac{1}{(\xi_1 - \xi_4)x_1'}, & \frac{1}{(\xi_1 - \xi_4)x_1' + (\xi_3 - \xi_4)x_3'}, & \frac{1}{(\xi_3 - \xi_4)x_3'} \end{vmatrix} = 0,$$

und somit $\begin{vmatrix} \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_1 - \xi_4}, & \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_3 - \xi_4} \\ \frac{(\xi_3 - \xi_4)x_3'}{(\xi_1 - \xi_4)x_1'}, & \frac{(\xi_1 - \xi_4)x_1'}{(\xi_3 - \xi_4)x_3'} \end{vmatrix} = 0$ die Gleichung der zwei Geraden, welche die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte des Systems $aba'b'$ mit dem Punkte c, dem Schnittpunkt von ab und $a'b'$ verbinden.

Denkt man die Ordnung von x_3 und x_1 vertauscht, so hat man im Vorigen die analoge Entwickelung für das System der Kegelschnitte $bb'cc'$ für c' als Durchschnitt von $a'b$ und ab'. Man hat also den Satz: Wenn der Durchschnitt von zwei gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte mit den Berührungspunkten einer gemeinschaftlichen Tangente durch gerade Linien verbunden wird, so entsteht ein

harmonisches Büschel. Insbesondere ist die Tangente von $x_1 x_3 - k x_2 x_4 = 0$ im Punkte $x_1 = x_2 = 0$ durch $x_1 + k x_2 = 0$ ausgedrückt und bildet also mit den anstossenden Seiten und der Diagonale des Vierecks $x_1 + x_2 = 0$ ein harmonisches Büschel für $k = -1$. Den vier Geraden entsprechen also in den Ordnungen $x_1 x_2 x_3 x_4$, $x_2 x_3 x_1 x_4$, $x_3 x_1 x_2 x_4$ die drei Kegelschnitte $x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0$, $x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0$, $x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0$ als solche, deren Tangenten in den Ecken des Vierseits mit den Seiten und der Diagonale ein harmonisches Büschel bilden.

Aufg. 1. Man findet die Gleichungen der Geraden der Figur wie folgt.



$bb' : x_1 + x_2 = 0$ oder $x_3 + x_4 = 0$; $aa' : x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_4 = 0$;
$cc' : x_1 + x_3 = 0$ oder $x_2 + x_4 = 0$; $cC : x_1 - x_3 = 0$; $c'C : x_2 - x_4 = 0$.
$aA : x_1 - x_4 = 0$; $a'A : x_2 - x_3 = 0$; $bB : x_1 - x_2 = 0$; $b'B : x_3 - x_4 = 0$.
Daher schneiden sich $c'C$ und bB in aA; cC und $a'A$ in bB; cC und $b'B$ in aA; $c'C$ und $a'A$ in $b'B$.

Aufg. 2. Die Tangenten des Punktes P oder x' in Bezug auf $aba'b'$ und in Bezug auf $bb'cc'$ sind durch $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_1'} = 0$, $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} - \frac{x_3}{x_3'} + \frac{x_4}{x_1'} = 0$ respective dargestellt und bilden mit den Geraden $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} = 0$, $\frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$ ein harmonisches Büschel, d. h. mit den Geraden Pb, Pb'.

Aufg. 3. Für zwei Kegelschnitte, welche sich in vier reellen Punkten schneiden, sind $x_1 x_3 = k x_2 x_4$, $x_1 x_3 = l x_2 x_4$ die Gleichungen und wenn x' der Berührungspunkt des zweiten Kegelschnitts mit einer gemeinschaftlichen Tangente beider Kegelschnitte ist, so berührt die durch $\frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'} + \frac{x_3}{x_3'} - \frac{x_4}{x_4'} = 0$ dargestellte Gerade den ersten Kegelschnitt und die Relation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ bestimmt den Berührungspunkt für den Fall gleicher Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1'} - \frac{x_2}{x_2'}, & \frac{1}{x_3'}, & \frac{1}{x_4'} \\ 0 & , x_1, & k x_2 \\ x_1 + x_2, & 1, & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. für $\left(\frac{k}{x_1'} - \frac{k}{x_3'} - \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_4'}\right)^2 + 4k\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_4'}\right)\left(\frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right) = 0$
oder wegen
$x_1'x_3' = lx_2'x_4'$ für $4kl(x_2'+x_3')^2 = \{k(x_1'-x_3')+l(x_2'-x_4')\}^2$ oder
$kl(x_1' - x_3' + x_4' - x_2')^2 = \{k(x_1' - x_3') + l(x_4' - x_2')\}^2$ oder

$$k(x_1' - x_3')^2 - l(x_4' - x_2')^2 = 0.$$

Darnach liegen die vier Punkte x' in zwei Geraden, die durch den Schnittpunkt von $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_4$ gehen und mit diesen ein harmonisches Büschel bilden, oder in zwei Geraden durch C, welche mit cC und $c'C$ ein harmonisches Büschel bilden. Dieselbe Gleichung erhält aber auch die Form $k(x_1' - x_3')^2 - l(2x_2' + x_1' + x_3')^2 = 0$ oder $k(x_1' - x_3')^2 + 4l\,x_2'x_4' - l(x_1' + x_3')^2$ oder
$k(x_1' - x_3')^2 + 4x_1'x_3' - l(x_1' + x_3')^2 = 0$ und zeigt, dass die vier Punkte x' in zwei Geraden aus dem Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ oder c liegen und sie liegen nach der Symmetrie der Relationen auch ebenso in zwei Geraden aus c'.

Man hat also den Satz: Wenn die dem einen Kegelschnitt angehörigen Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten eines Paars von Kegelschnitten, die sich in reellen Punkten schneiden, durch sechs Gerade verbunden werden, so fallen die drei Schnittpunkte derselben mit den Schnittpunkten der drei Paare gemeinsamer Sehnen zusammen.

Aufg. 4. Der durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ dargestellte Kegelschnitt schneidet jede Seite des Vierecks in zwei Punkten, deren jeder mit den drei in derselben liegenden Ecken ein System von vier Punkten bildet, deren Doppelverhältnisse einerlei Werth haben. Derselbe schneidet die Seite $x_1 = 0$ in den Punkten $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ oder wegen $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ in $x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 = 0$ und die drei dieser Seite angehörigen Ecken b, c, a sind durch $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ bestimmt.

Die Diagonale $x_1 + x_2 = 0$ oder $x_3 + x_4 = 0$ (bb') begegnet den Seiten des Vierecks $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in den auf ihr liegenden Ecken b und b', und den Diagonalen $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ in zwei weiteren Punkten einer Involution, deren Doppelpunkte durch $x_2 + ix_3 = 0$, $x_2 - ix_3 = 0$ bestimmt sind und die somit gleichfalls auf dem betrachteten Kegelschnitt liegen. Derselbe enthält somit ausser den acht Punkten der vier Paare, welche auf den vier Seiten Systeme von gleichen Doppelverhältnissen mit den je drei Ecken derselben bilden, auch noch die sechs Punkte der drei Paare, welche den in den Diagonalen des Vierecks bestimmten Involutionen als Doppelpunkte angehören.

Da der betrachtete Kegelschnitt imaginär ist für jedes reelle Viereck, so wird man ihn geeigneter als in Beziehung auf zwei gegebene Kegelschnitte betrachten, für welche die vier Punkte das System der gemeinschaftlichen Punkte bilden; denn in dieser Anschauung sind alle Fälle der reellen und imaginären Existenz eingeschlossen.

Die Beziehungen dieser Aufgabe lassen sich ohne Schwierigkeit auch in trimetrischen Punktcoordinaten ausdrücken, in der einfachsten und

symmetrischsten Form für die drei Diagonalen des Vierecks als Fundamentallinien.

Aufg. 5. Der Kegelschnitt der vorigen Aufgabe hat mit den drei Kegelschnitten je eine doppelte Berührung, welche zu den drei Vierecken aus vier Geraden so bezogen sind, dass die Tangenten in den Ecken die vierten harmonischen Geraden zu den beiden Seiten und der betreffenden Diagonale bilden — und zwar in den Diagonalen des Vierecks.

Der Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ kann auch durch $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$ dargestellt werden, weil $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ durch Quadriren die Relation $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4)=0$ liefert. Diese Form ist aber mit $x_2x_3+x_1x_4+(x_1+x_4)(x_2+x_3)=0$ oder mit $x_2x_3 + x_1x_4 - (x_2 + x_3)^2 = 0$ äquivalent und zeigt, dass der betrachtete Kegelschnitt mit $x_2x_3 + x_1x_4 = 0$ in der Geraden $x_2 + x_3 = 0$ eine doppelte Berührung hat. Ebenso ergeben sich die Formen $x_3x_4+x_2x_1-(x_1+x_2)^2=0$ und $x_3x_1+x_2x_4-(x_1+x_3)^2=0$ als äquivalent mit den vorigen.

Aufg. 6. Die zwölf Kegelschnitte, welche die Gleichungen $x_1^2 = x_2x_4$, $x_1^2 = x_3x_4$, $x_1^2 = x_2x_3$; $x_2^2 = x_1x_3$, $x_2^2 = x_1x_4$, $x_2^2 = x_3x_4$; $x_3^2 = x_1x_4$, $x_3^2 = x_2x_4$, $x_3^2 = x_1x_2$; $x_4^2 = x_1x_2$, $x_4^2 = x_1x_3$, $x_4^2 = x_2x_3$ repräsentiren, enthalten je drei Punkte des Vierecks, berühren zu zweien in jedem dieser Punkte die Nachbarseiten des Vierecks, und gehen zu dreien durch die acht Punkte, welche die Seiten des Vierecks mit dem Kegelschnitt der vorigen Aufgaben gemein haben. Die Seite $x_4 = 0$ schneidet den Letzteren in Punkten, für welche zugleich $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ sind, die also den Gleichungen $x_1^2 = x_2x_3$, $x_2^2 = x_3x_1$, $x_3^2 = x_1x_2$ entsprechen.

Achtzehntes Kapitel.

Von der Theorie der Enveloppen.

---

314. Wenn die Gleichung einer geraden Linie eine unbestimmte Grösse in irgend einem Grade enthält, so repräsentirt dieselbe, falls wir dieser unbestimmten Grösse eine Reihe verschiedener Werthe geben, eine Reihe von verschiedenen geraden Linien, die alle eine gewisse Curve berühren, welche man als die Enveloppe des Liniensystems bezeichnet. In der 2. Aufg. des Art. 311 ist die Gleichung dieser Enveloppe bereits

d. h. für $\left(\frac{k}{x_1'} - \frac{k}{x_3'} - \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_4'}\right)^2 + 4k\left(\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_4'}\right)\left(\frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'}\right) = 0$
oder wegen
$x_1'x_3' = lx_2'x_4'$ für $4kl(x_2'+x_3')^2 = \{k(x_1'-x_3') + l(x_2'-x_4')\}^2$ oder
$kl(x_1' - x_3' + x_4' - x_2')^2 = \{k(x_1' - x_3') + l(x_4' - x_2')\}^2$ oder

$$k(x_1' - x_3')^2 - l(x_4' - x_2')^2 = 0.$$

Darnach liegen die vier Punkte x' in zwei Geraden, die durch den Schnittpunkt von $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_4$ gehen und mit diesen ein harmonisches Büschel bilden, oder in zwei Geraden durch C, welche mit cC und $c'C$ ein harmonisches Büschel bilden. Dieselbe Gleichung erhält aber auch die Form $k(x_1' - x_3')^2 - l(2x_2' + x_1' + x_3')^2 = 0$ oder $k(x_1' - x_3')^2 + 4lx_2'x_4' - l(x_1' + x_3')^2$ oder
$k(x_1' - x_3')^2 + 4x_1'x_3' - l(x_1' + x_3')^2 = 0$ und zeigt, dass die vier Punkte x' in zwei Geraden aus dem Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ oder c liegen und sie liegen nach der Symmetrie der Relationen auch ebenso in zwei Geraden aus c'.

Man hat also den Satz: Wenn die dem einen Kegelschnitt angehörigen Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten eines Paars von Kegelschnitten, die sich in reellen Punkten schneiden, durch sechs Gerade verbunden werden, so fallen die drei Schnittpunkte derselben mit den Schnittpunkten der drei Paare gemeinsamer Sehnen zusammen.

Aufg. 4. Der durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ dargestellte Kegelschnitt schneidet jede Seite des Vierecks in zwei Punkten, deren jeder mit den drei in derselben liegenden Ecken ein System von vier Punkten bildet, deren Doppelverhältnisse einerlei Werth haben. Derselbe schneidet die Seite $x_1 = 0$ in den Punkten $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ oder wegen $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ in $x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 = 0$ und die drei dieser Seite angehörigen Ecken b, c, a sind durch $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ bestimmt.

Die Diagonale $x_1 + x_2 = 0$ oder $x_3 + x_4 = 0$ (bb') begegnet den Seiten des Vierecks $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ in den auf ihr liegenden Ecken b und b', und den Diagonalen $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ in zwei weiteren Punkten einer Involution, deren Doppelpunkte durch $x_2 + ix_3 = 0$, $x_2 - ix_3 = 0$ bestimmt sind und die somit gleichfalls auf dem betrachteten Kegelschnitt liegen. Derselbe enthält somit ausser den acht Punkten der vier Paare, welche auf den vier Seiten Systeme von gleichen Doppelverhältnissen mit den je drei Ecken derselben bilden, auch noch die sechs Punkte der drei Paare, welche den in den Diagonalen des Vierecks bestimmten Involutionen als Doppelpunkte angehören.

Da der betrachtete Kegelschnitt imaginär ist für jedes reelle Viereck, so wird man ihn geeigneter als in Beziehung auf zwei gegebene Kegelschnitte betrachten, für welche die vier Punkte das System der gemeinschaftlichen Punkte bilden; denn in dieser Anschauung sind alle Fälle der reellen und imaginären Existenz eingeschlossen.

Die Beziehungen dieser Aufgabe lassen sich ohne Schwierigkeit auch in trimetrischen Punktcoordinaten ausdrücken, in der einfachsten und

symmetrischsten Form für die drei Diagonalen des Vierecks als Fundamentallinien.

Aufg. 5. Der Kegelschnitt der vorigen Aufgabe hat mit den drei Kegelschnitten je eine doppelte Berührung, welche zu den drei Vierecken aus vier Geraden so bezogen sind, dass die Tangenten in den Ecken die vierten harmonischen Geraden zu den beiden Seiten und der betreffenden Diagonale bilden — und zwar in den Diagonalen des Vierecks.

Der Kegelschnitt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ kann auch durch $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$ dargestellt werden, weil $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ durch Quadriren die Relation $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4)=0$ liefert. Diese Form ist aber mit $x_2x_3+x_1x_4+(x_1+x_4)(x_2+x_3)=0$ oder mit $x_2x_3 + x_1x_4 - (x_2 + x_3)^2 = 0$ äquivalent und zeigt, dass der betrachtete Kegelschnitt mit $x_2x_3 + x_1x_4 = 0$ in der Geraden $x_2 + x_3 = 0$ eine doppelte Berührung hat. Ebenso ergeben sich die Formen $x_3x_4+x_2x_1-(x_1+x_2)^2=0$ und $x_3x_1+x_2x_4-(x_1+x_3)^2=0$ als äquivalent mit den vorigen.

Aufg. 6. Die zwölf Kegelschnitte, welche die Gleichungen $x_1^2 = x_2x_4$, $x_1^2 = x_3x_4$, $x_1^2 = x_2x_3$; $x_2^2 = x_1x_3$, $x_2^2 = x_1x_4$, $x_2^2 = x_3x_4$; $x_3^2 = x_1x_4$, $x_3^2 = x_2x_4$, $x_3^2 = x_1x_2$; $x_4^2 = x_1x_2$, $x_4^2 = x_1x_3$, $x_4^2 = x_2x_3$ repräsentiren, enthalten je drei Punkte des Vierecks, berühren zu zweien in jedem dieser Punkte die Nachbarseiten des Vierecks, und gehen zu dreien durch die acht Punkte, welche die Seiten des Vierecks mit dem Kegelschnitt der vorigen Aufgaben gemein haben. Die Seite $x_4=0$ schneidet den Letzteren in Punkten, für welche zugleich $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ sind, die also den Gleichungen $x_1^2 = x_2x_3$, $x_2^2 = x_3x_1$, $x_3^2 = x_1x_2$ entsprechen.

Achtzehntes Kapitel.

Von der Theorie der Enveloppen.

314. Wenn die Gleichung einer geraden Linie eine unbestimmte Grösse in irgend einem Grade enthält, so repräsentirt dieselbe, falls wir dieser unbestimmten Grösse eine Reihe verschiedener Werthe geben, eine Reihe von verschiedenen geraden Linien, die alle eine gewisse Curve berühren, welche man als die **Enveloppe des Liniensystems** bezeichnet. In der 2. Aufg. des Art. 311 ist die Gleichung dieser Enveloppe bereits

für einen sehr einfachen Fall ermittelt worden. Die nähere Untersuchung des Problems ist aber von Wichtigkeit, weil sie das Mittel liefert, durch welches man von der Darstellung der Curven in Punktcoordinaten zur Darstellung in Liniencoordinaten übergehen kann, so dass man in beiden Darstellungsweisen die nämliche Curve erhält. Wir erläutern die allgemeine Methode, die zur Bestimmung der Gleichung einer solchen Enveloppe führt, dadurch, dass wir unabhängig von Art. 305 beweisen, dass die gerade Linie $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$, in deren Gleichung μ eine unbestimmte Grösse ist, die Curve $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ berührt. Der Durchschnittspunkt der den Werthen μ und $(\mu + k)$ entsprechenden Geraden ist durch die Gleichungen $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$, $2(\mu x_1 - x_2) + k x_1 = 0$ bestimmt, von denen die zweite aus der ersten hervorgeht, indem man $(\mu + k)$ für μ setzt, dann die in Folge der ersten verschwindenden Glieder beseitigt und den Rest durch k dividirt. Je kleiner k ist, desto mehr nähert sich die zweite Linie dem Zusammenfallen mit der ersten und für $k = 0$ finden wir, dass der Schnittpunkt der ersten Geraden mit einer unendlich nahe benachbarten, d. h. nächstfolgenden Linie des Systems durch die Gleichungen $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$, $\mu x_1 - x_2 = 0$ bestimmt ist, oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen $\mu x_1 - x_2 = 0$, $\mu x_2 - x_3 = 0$. Da nun jeder Punkt der Curve als der Durchschnitt von zwei auf einander folgenden Tangenten derselben angesehen werden darf (Art. 107), so ist der Punkt, den eine Linie des Systems mit der Enveloppe gemein hat, eben der, in dem sie auch die nächstfolgende Tangente der Enveloppe schneidet; die beiden letzten Gleichungen bestimmen also den Punkt der Enveloppe, welche die Gerade $\mu x_1^2 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ zur Tangente hat; und die Elimination von μ zwischen diesen Gleichungen giebt die Gleichung des Ortes aller Punkte der Enveloppe in der Form $x_1 x_3 = x_2^2$.

Analoge Gründe beweisen, dass auch für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ als Gleichungen von Curven die durch $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ dargestellte Curve stets die Curve $x_1 x_3 = x_2^2$ tangirt. Die Enveloppe von $x_1 \cos\varphi + x_3 \sin\varphi - x_2 = 0$, für φ als eine unbestimmte Grösse, kann in derselben Weise untersucht werden; man führt sie auf die Form einer in μ quadratischen Gleichung zurück, indem man $\tan \frac{1}{2}\varphi = \mu$ annimmt, d. h. durch die Sub-

stitution $\cos\varphi = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$, $\sin\varphi = \frac{2\mu}{1+\mu^2}$ und die Beseitigung der Brüche.

315. Zu denselben Ergebnissen führt auch folgendes Verfahren: Die gerade Linie $\mu^2 x_1 - 2\mu x_2 + x_3 = 0$ ist offenbar eine Tangente einer Curve zweiter Classe (Art. 106), da durch jeden Punkt nur zwei Linien des Systems hindurchgehen, nämlich die, welche den aus $\mu^2 x_1' - 2\mu x_2' + x_3' = 0$ bestimmten Werthen von μ entsprechen, für x_1', etc. als die Coordinaten des Punktes. Diese beiden Werthe von μ fallen aber zusammen oder der betrachtete Punkt ist der Durchschnitt von zwei auf einander folgenden Tangenten, wenn seine Coordinaten der Gleichung $x_1 x_3 = x_2^2$ genügen. Und allgemein, wenn die unbestimmte Grösse μ im n^{ten} Grade und algebraisch in der Gleichung einer Geraden enthalten wäre, so würde diese Gerade eine Curve n^{ter} Classe stets berühren, deren Gleichung gefunden wird, indem man die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Gleichung in μ ein Paar gleiche Wurzeln hat.

Aufg. 1. Die Eckpunkte eines Dreiecks bewegen sich in drei festen Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, und zwei seiner Seiten gehen durch die beiden festen Punkte x', x''; man soll die Enveloppe der dritten Seite bestimmen.

Wenn $x_1 + \mu x_2 = 0$ die gerade Linie ist, welche den Punkt $x_1 = x_2 = 0$ mit dem längs der Geraden $x_1 = 0$ sich bewegenden Eckpunkt des Dreiecks verbindet, so sind die Gleichungen der durch die festen Punkte gehenden Seiten respective

$$x_3'(x_1+\mu x_2)-(x_1'+\mu x_2')x_3=0,\quad x_3''(x_1+\mu x_2)-(x_1''+\mu x_2'')x_3=0.$$

Und die Gleichung der Basis ist

$$(x_1'+\mu x_2')x_3''x_1+(x_1''+\mu x_2'')\mu x_3'x_2-(x_1'+\mu x_2')(x_1''+\mu x_2'')x_3=0;$$

denn man bestätigt leicht, dass die dieser Gleichung entsprechende Gerade sowohl durch den Durchschnitt der ersten Geraden mit $x_1 = 0$ als auch durch den der zweiten mit $x_2 = 0$ hindurchgeht. Indem man sie nach Potenzen von μ ordnet, findet man als Gleichung der Enveloppe

$$(x_1 x_2' x_3'' + x_2 x_3' x_1'' - x_3 x_1' x_2'' - x_3 x_1'' x_2')^2$$
$$= 4 x_1' x_2'' (x_1 x_3'' - x_1'' x_3)(x_2 x_3' - x_2' x_3).$$

Man kann dieselbe Aufgabe auch auf Grund der nach den Potenzen von a geordneten Gleichung der Aufg. 3 im Art. 50 auflösen.

Aufg. 2. Man soll die Enveloppe einer geraden Linie bestimmen, für welche das Product ihrer senkrechten Abstände von zwei festen Punkten constant ist.

Wenn die Verbindungslinie der festen Punkte und die in der Mitte ihrer Entfernung zu dieser errichtete Normale als Coordinatenaxen gewählt werden, so dass die Coordinaten der festen Punkte $y=0$, $x=\pm c$

sind, so gilt für $y - mx - n = 0$ als Gleichung der beweglichen Geraden als Ausdruck des Problems die Relation
$(n + mc)(n - mc) = b^2(1 + m^2)$ oder $n^2 = b^2 + b^2m^2 + c^2m^2$; also wegen $n^2 = y^2 - 2mxy + m^2x^2$ auch
$m^2(x^2 - b^2 - c^2) - 2mxy + y^2 - b^2 = 0$ und die Gleichung der Enveloppe ist daher $\frac{x^2}{b^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Aufg. 3. Bestimme die Enveloppe einer geraden Linie, für welche die Summe der Quadrate der normalen Abstände von zwei festen Punkten constant ist.

Aufl. $\frac{2x^2}{b^2 - 2c^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1$.

Aufg. 4. Bestimme die Enveloppe aus der Differenz der Quadrate dieser normalen Abstände.

Aufl. Sie ist eine Parabel.

Aufg. 5. Um einen festen Punkt O dreht sich eine gerade Linie OP und schneidet eine feste Gerade in P; man soll die Enveloppe der geraden Linie PQ finden, welche mit der drehenden Geraden den constanten Winkel OPQ bildet.

Wir nehmen an, OP bilde den Winkel θ mit der auf die feste Gerade gefällten Normalen und ihre Länge also gleich $p \sec \theta$; die von O auf PQ gefällte Normale bildet mit OP den festen Winkel β und hat daher die Länge $p \sec \theta \cos \beta$ und da sie mit der Normalen der festen Geraden den Winkel $(\theta + \beta)$ bildet, so ist für diese als Axe der x die Gleichung von PQ $x \cos(\theta + \beta) + y \sin(\theta + \beta) = p \sec\theta \cos\beta$ oder $x \cos(2\theta + \beta) + y \sin(2\theta + \beta) = 2p \cos\beta - x \cos\beta - y \sin\beta$, also eine Gleichung von der Form $x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = x_3$. Die Enveloppe derselben ist daher durch $x^2 + y^2 = (x\cos\beta + y\sin\beta - 2p\cos\beta)^2$ dargestellt und somit eine Parabel, die den Punkt θ zu ihrem Brennpunkt hat.

Aufg. 6. Man soll die Enveloppe der geraden Linie $\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu'} = 1$ darstellen, wenn die unbestimmten Grössen μ, μ' in der Gleichung derselben durch die Relation $\mu + \mu' = C$ verbunden sind.

Indem man für μ' den Werth $(C - \mu)$ einsetzt und die Brüche beseitigt, findet man für die Gleichung der Enveloppe
$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2BC - 2CA = 0$, oder $\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} = 0$.
Wenn z. B. der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so ist die Gleichung der Basis $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ für $a + b = c$ und die Enveloppe ist also $x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0$, d. h. eine die Seiten $x = 0$, $y = 0$ berührende Parabel. Oder wenn zur Bestimmung einer Ellipse die Lage von zwei conjugirten Durchmessern und die Summe ihrer Quadrate gegeben sind, wenn also $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ und $a'^2 + b'^2 = c^2$ sind, so ist die Enveloppe dieser Ellipse durch $x \pm y \pm c = 0$ dargestellt, d. h. dieselbe berührt stets vier feste gerade Linien.

316. **Wenn die Coefficienten in der Gleichung einer geraden Linie $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ durch irgend eine Relation vom zweiten Grade**

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{31}\xi_3\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0$$

mit einander verbunden sind, so ist die Enveloppe derselben ein Kegelschnitt.

Wenn man zwischen der gegebenen Relation und der Gleichung der geraden Linie die Grösse ξ_3 eliminirt, so erhält man

$$(A_{11}x_3^2 - 2A_{31}x_3x_1 + A_{33}x_1^2)\,\xi_1^2 +$$
$$2\,(A_{12}x_3^2 - A_{31}x_3x_2 - A_{23}x_3x_1 + A_{33}x_1x_2)\,\xi_1\xi_2 +$$
$$(A_{22}x_3^2 - 2A_{23}x_2x_3 + A_{33}x_2^2)\,\xi_2^2 = 0$$

und die Enveloppe hat daher die Gleichung

$$(A_{11}x_3^2 - 2A_{31}x_3x_1 + A_{33}x_1^2)\,(A_{22}x_3^2 - 2A_{23}x_2x_3 + A_{33}x_2^2) =$$
$$(A_{12}x_3^2 - A_{31}x_3x_2 - 2A_{23}x_3x_1 + A_{33}x_1x_2)^2;$$

indem man diesen Ausdruck entwickelt und durch x_3^2 dividirt, erhält man

$$(A_{22}A_{33} - A_{23}^2)\,x_1^2 + (A_{33}A_{11} - A_{31}^2)\,x_2^2 + (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\,x_3^2$$
$$+ 2\,(A_{31}A_{12} - A_{11}A_{23})\,x_2x_3 + 2\,(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{31})\,x_3x_1$$
$$+ 2\,(A_{23}A_{31} - A_{33}A_{12})\,x_1x_2 = 0.$$

Dabei bemerken wir, dass die Coefficienten der Veränderlichen in dieser Gleichung die Unterdeterminanten $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{13}, \mathbf{A}_{23}$, etc. der Discriminante Δ der gegebenen Gleichung zweiten Grades sind. Das Ergebniss dieses Art. kann so ausgesprochen werden: **Eine Gleichung vom zweiten Grade in Tangentialcoordinaten ξ repräsentirt einen Kegelschnitt, dessen Gleichung in Punktcoordinaten x aus jener durch das nämliche Verfahren gefunden wird, wie die Gleichung in Tangentialcoordinaten aus der Gleichung in Punktcoordinaten.**

Denn auf demselben Wege wie in Art. 114 beweist man, dass die Bedingung, unter welcher die gerade Linie, die durch $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ dargestellt ist, den Kegelschnitt

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

berührt oder dass die Gleichung dieses Kegelschnitts in Tangentialcoordinaten ist

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\,\xi_1^2 + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)\,\xi_2^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,\xi_3^2$$
$$+ 2\,(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23})\,\xi_2\xi_3 + 2\,(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31})\,\xi_3\xi_1$$
$$+ 2\,(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12})\,\xi_1\xi_2 = 0.$$

Damit ist in der allgemeinsten Form der analytische Beweis

dafür gegeben, dass jede Curve zweiter Ordnung von der zweiten Classe ist und umgekehrt; es ist statthaft, beide unter der neutralen, auf den Grad der Gleichung bezüglichen Benennung Curven zweiten Grades zusammenzufassen.

Wenn umgekehrt die Coefficienten der Gleichung einer geraden Linie die letztgeschriebene Bedingung erfüllen, so ist die Enveloppe derselben ein Kegelschnitt

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0.$$

Die Gleichung dieses Art. kann diess ihrerseits bestätigen; denn wenn wir für A_{11}, A_{22}, etc. die Binome $a_{22}a_{33}-a_{23}^2$, $a_{33}a_{11}-a_{31}^2$, etc. substituiren, so wird die Gleichung

$$(A_{22}A_{33}-A_{23}^2)x_1^2+(A_{33}A_{11}-A_{31}^2)x_2^2+\ldots+2(A_{23}A_{31}-A_{33}A_{12})x_1x_2=0$$

in das Product von

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{31}^2-a_{33}a_{12}^2) \text{ und}$$
$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

übergeführt. Denn in demselben ist $(a_{11}a_{22}a_{33}+\text{etc.})$ die Determinante Δ der Gleichung $a_{11}x_1^2+\text{etc.}=0$ und $(A_{22}A_{33}-A_{23}^2)$, etc. sind die Unterdeterminanten $\mathbf{A}_{11}$, etc. der Determinante des ihr adjungirten Systems; diese sind aber nach dem im Art. 80 bewiesenen allgemeinen Gesetze den Producten von Δ in die entsprechenden Elemente der Originaldeterminante gleich.

Aufg. 1. Wir können als specielle Fälle des Vorigen die Resultate der Art. 156, 159 ableiten; nämlich, dass die Enveloppe einer Geraden, welche die Bedingung $A_{23}\xi_2\xi_3+A_{31}\xi_3\xi_1+A_{12}\xi_1\xi_2=0$ erfüllt, durch die Gleichung $(A_{23}x_1)^{\frac{1}{2}}+(A_{31}x_2)^{\frac{1}{2}}+(A_{12}x_3)^{\frac{1}{2}}=0$ und die Enveloppe derselben unter der Bedingung $(A_{23}\xi_1)^{\frac{1}{2}}+(A_{31}\xi_2)^{\frac{1}{2}}+(A_{12}\xi_3)^{\frac{1}{2}}=0$ durch $A_{23}x_2x_3+A_{31}x_3x_1+A_{12}x_1x_2=0$ dargestellt wird.

Aufg. 2. Man zeige, dass die durch Gleichungen von der Form $x_1x_3=x_2^2$ und von der Form $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$ dargestellten Kegelschnitte in Liniencoordinaten durch Gleichungen von derselben Form dargestellt werden.

Aufl. Man findet $4\xi_1\xi_3=\xi_2^2$ für die eine und $a_{22}a_{33}\xi_1^2+a_{33}a_{11}\xi_2^2+a_{11}a_{22}\xi_3^2=0$ für die andere, weil respective

$$\Delta=\begin{vmatrix}0, & 0, & \frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}, & 0\\ \frac{1}{2}, & 0, & 0\end{vmatrix} \text{ und } \Delta=\begin{vmatrix}a_{11}, & 0, & 0\\ 0, & a_{22}, & 0\\ 0, & 0, & a_{33}\end{vmatrix} \text{ ist.}$$

In Folge dessen liefern die in den Art. 305 f., 309 f. gegebenen Entwickelungen durch Interpretation als Gleichungen in Tangential- oder Liniencoordinaten Eigenschaften der nämlichen Kegelschnitte.

317. Auf dieselbe Art wie im Art. 89 wird bewiesen, dass unter der Bedingung

$A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{23}A_{31}A_{12} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{31}^2 - A_{33}A_{12}^2 = 0$ die Gleichung $A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 +$ etc. $= 0$ in zwei lineare Factoren zerlegbar, also einer Gleichung von der Form $(x_1'\xi_1 + x_2'\xi_2 + x_3'\xi_3)(x_1''\xi_1 + x_2''\xi_2 + x_3''\xi_3) = 0$ äquivalent ist. Und da diese Gleichung durch das Verschwinden ihrer Factoren erfüllt ist, so drückt sie aus (Art. 51), dass die Gerade $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ stets entweder durch den einen oder den andern von zwei festen Punkten geht.

Die Grösse $A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{23}A_{31}A_{12} -$ etc. für $A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2$, etc. wie im letzten Art. ist die Determinante des adjungirten Systems von der Determinante $a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} -$ etc. oder Δ und nach Art. 80, da diese eine Determinante dritten Grades ist, gleich Δ^2.

Aufg. 1. Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte geht und mit einem festen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, so geht die Berührungssehne desselben mit diesem Letzteren stets durch einen festen Punkt. Denn wenn durch $S = 0$ der feste Kegelschnitt und durch $S = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2$ der andere Kegelschnitt dargestellt wird, so giebt die Substitution der Coordinaten der beiden gegebenen Punkte $S' = (\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2$, $S'' = (\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'')^2$, also auch $(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')(S'')^{\frac{1}{2}} = \pm(\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'')(S')^{\frac{1}{2}}$. Diese Gleichung drückt aber aus, dass die Linie $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ durch den einen oder den andern von zwei festen Punkten geht, weil S', S'' bekannte Constanten sind.

Wir verbinden hiermit einige weitere nützliche Aufgaben.

Aufg. 2. Man bestimme die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher mit zwei durch $S' = 0$, $S'' = 0$ gegebenen Kegelschnitten je eine doppelte Berührung hat.

Bezeichnen wir durch $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ ein Paar der Durchschnittssehnen der beiden gegebenen Kegelschnitte, so dass $S' - S'' = z_1 z_2$ ist, so repräsentirt $\mu^2 z_1^2 - 2\mu(S' + S'') + z_2^2 = 0$ einen Kegelschnitt, der mit $S' = 0$, $S'' = 0$ eine doppelte Berührung hat; denn diese Gleichung kann in den beiden äquivalenten Formen geschrieben werden $(\mu z_1 + z_2)^2 = 4\mu S'$, $(\mu z_1 - z_2)^2 = 4\mu S''$. Da die Gleichung in μ vom zweiten Grade ist, so gehen durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte des Systems und weil überdiess drei Paare von Durchschnittssehnen z der beiden Kegelschnitte existiren, so giebt es drei solche Systeme umgeschriebener Kegelschnitte. Ihre Anzahl reducirt sich auf zwei, wenn der Kegelschnitt $S'' = 0$ in ein Paar von Geraden degenerirt, weil dann nur zwei von diesen verschiedene Durchschnittssehnen existiren. Wenn endlich sowohl $S' = 0$ als auch $S'' = 0$ in gerade Linien degeriren, so giebt es wie bekannt nur ein System doppelt berührender Kegelschnitte.

Man erhält aus der Gleichung des die Kegelschnitte $S' = 0$ und

$S'' = 0$ doppelt berührenden Kegelschnitts leicht den Satz: Wenn ein Kegelschnitt $S = 0$ mit zwei andern $S' = 0$, $S'' = 0$ je eine doppelte Berührung hat, so sind die Sehnen, die ihm mit einem durch die vier gemeinsamen Punkte von $S' = 0$, $S'' = 0$ gehenden Kegelschnitt gemeinsam sind, ebenso wie die Sehnen der Berührung zu den Sehnen des Durchschnitts von $S' = 0$ und $S'' = 0$ harmonisch conjugirt. Denn die Substitution von $S' + S'' = 0$ in die Gleichung $\mu^2 z_1^2 - 2\mu(S' + S'') + z_2^2 = 0$ giebt $(\mu z_1 - z_2)(\mu z_1 + z_2) = 0$. Diess Beispiel kann eine Reihe von analogen vertreten.

Aufg. 3. Man entwickle die Gleichung eines Kegelschnitts, der vier gerade Linien $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ berührt.

Aufl. Für $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ als die Gleichungen der Diagonalen des von jenen vier Geraden gebildeten Vierseits und wegen $y_1 y_3 - y_2 y_4 = z_1 z_2$ ist $\mu^2 z_1^2 - 2\mu(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 = 0$ die gesuchte Gleichung. Setzt man nach einander die y gleich Null, so erhält man die Berührungspunkte der Seiten und sieht, dass ihre Verbindungslinien mit den Diagonalen ein harmonisches Büschel bilden (vergl. Aufg. 2). Ein durch diese Berührungspunkte gehender Kegelschnitt hat eine Gleichung von der Form $\mu^2 z_1^2 - 2\mu(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 + \lambda(\mu^2 z_1^2 - z_2^2) = 0$, und die den Werthen μ' und λ' entsprechende Gleichung wird mit dieser identisch für $\lambda = -\lambda' = \frac{\mu' - \mu}{\mu' + \mu}$. Der durch die acht Berührungspunkte von zwei solchen eingeschriebenen Kegelschnitten gehende Kegelschnitt — denn ein solcher existirt hiernach — hat also die Gleichung $\mu\mu' z_1^2 - (\mu + \mu')(y_1 y_3 + y_2 y_4) + z_2^2 = 0$. Man kann ähnliche Ergebnisse bei Aufg. 2 erhalten.

Wenn man das Diagonalendreieck des Vierseits zum Fundamentaldreieck wählt, so dass $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ diese Diagonalen darstellen und $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$ die Seiten des Vierseits bezeichnen, so erhält man die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts in der mehr symmetrischen Form $\mu^2 x_1^2 - \mu(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + x_2^2 = 0$. Dieser Kegelschnitt berührt stets die Enveloppe $(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)^2 = 4x_1^2 x_2^2$ oder $(x_1 + x_2 + x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - x_3) = 0$. Die Gleichung kann endlich auch in der Form $x_3^2 = \frac{x_1^2}{\cos^2\varphi} + \frac{x_2^2}{\sin^2\varphi}$ geschrieben werden (vergl. Art. 309), was auf den engen Zusammenhang dieses Problems mit der wahren Natur der Brennpunkte hinweist.

Aufg. 4. Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher mit zwei Kreisen $C' = 0$, $C'' = 0$ je eine doppelte Berührung hat, nimmt eine einfachere Form an, nämlich $\mu^2 - 2\mu(C' + C'') + (C' - C'')^2 = 0$. Die Berührungssehnen des Kegelschnitts mit den beiden Kreisen sind durch $C' - C'' + \mu = 0$, $C' - C'' - \mu = 0$ dargestellt und daher parallel zu einander und gleich entfernt von der Radicalaxe der Kreise. Da man die Gleichung dieses doppelt berührenden Kegelschnitts auch in der Form $C'^{\frac{1}{2}} + C''^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{1}{2}}$ schreiben kann, so ist der Ort eines Punk-

tes, für welchen die Summe oder Differenz der Tangenten zu zwei gegebenen Kreisen constant ist, ein Kegelschnitt, der mit diesen Kreisen je eine doppelte Berührung hat. Denken wir beide Kreise als unendlich klein, so erhalten wir die Eigenschaft der Brennpunkte des Kegelschnitts rücksichtlich der Summe und Differenz der Radien vectoren. Nehmen wir μ dem Quadrate des Abschnittes gleich, welcher zwischen den beiden Kreisen auf einer ihrer gemeinschaftlichen Tangenten liegt, so bezeichnet die Gleichung ein Paar der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise.

Aufg. 5. Man löse nach dieser Methode die Aufgaben über die Bestimmung der gemeinschaftlichen Tangenten zu Kreisen in Art. 143, 144.

Aufl. Aufg. 1. $C^{\frac{1}{2}} + C'^{\frac{1}{2}} = 4$ oder $= 2$.

Aufg. 2. $C^{\frac{1}{2}} + C'^{\frac{1}{2}} = 1$ oder $= (-79)^{\frac{1}{2}}$.

Aufg. 6. Drei Kreise sind gegeben durch $C'=0$, $C''=0$, $C'''=0$; sind dann $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $C''=0$, $C'''=0$; ebenso $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ die zu $C'''=0$, $C'=0$ und $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ die zu $C'=0$, $C''=0$ und gehen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ durch einen Punkt, so gehen auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ durch einen Punkt. Denn sind die Gleichungen der Paare gemeinsamer Tangenten $C''^{\frac{1}{2}} + C'''^{\frac{1}{2}} = t'$, $C'''^{\frac{1}{2}} + C'^{\frac{1}{2}} = t''$, $C'^{\frac{1}{2}} + C''^{\frac{1}{2}} = t'''$, so ist die Bedingung, unter welcher $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sich in einem Punkte schneiden, $t' \pm t'' = t'''$ und man sieht, dass mit der Erfüllung dieser Bedingung auch $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sich in einem Punkte schneiden müssen.

Aufg. 7. Daran knüpft sich die Lösung des Problems von Malfatti: Drei Kreise zu bestimmen, die einander berühren und deren jeder zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks zu Tangenten hat. Steiner gab die Lösung: Man zeichne die eingeschriebenen Kreise der Dreiecke, welche von je einer Seite des gegebenen Dreiecks und den Halbirungslinien der anliegenden Winkel gebildet werden; da diese Kreise drei gemeinschaftliche Tangenten haben, die durch einen Punkt gehen, so gehen auch ihre andern gemeinschaftlichen Tangenten durch einen Punkt. Diese sind die gemeinschaftlichen Tangenten der gesuchten Kreise.

Aufg. 8. Der Satz der vorigen Aufgabe lässt sich auf Kegelschnitte übertragen, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind.

Drei Kegelschnitte $S - x_1^2 = 0$, $S - x_2^2 = 0$, $S - x_3^2 = 0$, die mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung haben, werden von drei gemeinschaftlichen Sehnen, die ein Dreieck bilden, wie $x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_1 = 0$ in sechs Punkten geschnitten, die auf einem Kegelschnitt liegen. Denn es ist

$$S + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = (S - x_1^2) + (x_1 + x_2)(x_1 + x_3).$$

Liegen also von jenen Punkten drei in einer geraden Linie, so liegen die andern gleichfalls in einer geraden Linie. Diesem Satze entspricht nach der Interpretation der Gleichungen in Liniencoordinaten der auf Kegelschnitte bezügliche Satz.

318. In den vorigen Entwickelungen hat die Theorie der Enveloppen zur Anwendung der Liniencoordinaten und damit von Neuem zu dem **Princip der Dualität** geführt, zu welchem wir bei Betrachtung der Coordinatensysteme im Art. 81 bereits gelangt waren. Eine Gruppe von Aufgaben mag hier noch zur Uebung im Gebrauch desselben und der Betrachtungsweise in Liniencoordinaten zusammengestellt werden.

Aufg. 1. Man soll die Gleichungen der dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreise und des ihm umgeschriebenen Kreises entwickeln. (Vergl. Art. 157, 160.)

Die Gleichung eines eingeschriebenen Kegelschnitts ist $\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{31}\xi_3\xi_1 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 = 0$ und seine Berührungspunkte mit den Seiten des Dreiecks sind durch $\alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3 = 0$, $\alpha_{23}\xi_3 + \alpha_{12}\xi_1 = 0$, $\alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 = 0$ dargestellt; ihre geraden Verbindungslinien mit den Gegenecken des Dreiecks gehen durch einen Punkt von der Gleichung $\alpha_{12}\alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{23}\alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{31}\alpha_{23}\xi_3 = 0$. Für den eingeschriebenen Kreis ergiebt sich für $2s$ als den Umfang des Fundamentaldreiecks die Gleichung der Berührungspunkte in der Form $(s - s_3)\xi_2 + (s - s_2)\xi_3 = 0$, etc. und damit die Gleichung des eingeschriebenen Kreises $(s - s_1)\xi_2\xi_3 + (s - s_2)\xi_3\xi_1 + (s - s_3)\xi_1\xi_2 = 0$; den äusserlich berührenden Kreisen entsprechen Gleichungen von der Form

$$- s\xi_2\xi_3 + (s - s_3)\xi_3\xi_1 + (s - s_2)\xi_1\xi_2 = 0, \text{ etc.}$$

Die Gleichung eines dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kegelschnittes ist

$$\alpha_1^2\xi_1^2 + \alpha_2^2\xi_2^2 + \alpha_3^2\xi_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3\xi_2\xi_3 - 2\alpha_3\alpha_1\xi_3\xi_1 - 2\alpha_1\alpha_2\xi_1\xi_2 = 0;$$

die Tangente im Punkte $\xi_1 = 0$ ist durch $\xi_1 = 0$ und $\alpha_2\xi_2 - \alpha_3\xi_3 = 0$ dargestellt und da sie für den umgeschriebenen Kreis die Relation $s_2^2\xi_2 - s_3^2\xi_3 = 0$ erfüllen muss, so muss

$$s_1^4\xi_1^2 + s_2^4\xi_2^2 + s_3^4\xi_3^2 - 2s_2^2s_3^2\xi_2\xi_3 - 2s_3^2s_1^2\xi_3\xi_1 - 2s_1^2s_2^2\xi_1\xi_2 = 0$$

oder $\pm s_1\xi_1^{\frac{1}{2}} \pm s_2\xi_2^{\frac{1}{2}} \pm s_3\xi_3^{\frac{1}{2}} = 0$ seine Gleichung sein.

Aufg. 2. Man soll den Pol einer geraden Linie ξ_1', ξ_2', ξ_3' oder ξ' und die Schnittpunkte mit einer geraden Linie für diesen eingeschriebenen Kreis bestimmen.

Die Gleichung des Pols ist

$$\xi_1\left\{(s - s_3)\xi_2' + (s - s_2)\xi_3'\right\} + \xi_2\left\{(s - s_1)\xi_3' + (s - s_3)\xi_1'\right\}$$
$$+ \xi_3\left\{(s - s_2)\xi_1' + (s - s_1)\xi_2'\right\} = 0,$$

die Gleichung des Centrums also $s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + s_3\xi_3 = 0$. Für die Durchschnittspunkte des Kreises speciell mit der unendlich entfernten geraden Linie erhält man die Gleichung

$$s\left\{(s - s_1)\xi_2\xi_3 + (s - s_2)\xi_3\xi_1 + (s - s_3)\xi_1\xi_2\right\} - \left(\frac{s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + s_3\xi_3}{2}\right)^2 = 0$$

oder

$$s_1^2\xi_1^2 + s_2^2\xi_2^2 + s_3^2\xi_3^2 - 2s_2s_3\xi_2\xi_3\cos A_1 - 2s_3s_1\xi_3\xi_1\cos A_2 - 2s_1s_2\xi_1\xi_2\cos A_3 =$$

Das Kriterium des Art. 317 zeigt in der That die Zerlegbarkeit dieser Gleichung in lineare Factoren an; denn die Determinante derselben wird $1 - 2\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 - \cos^2 A_1 - \cos^2 A_2 - \cos^2 A_3$ und ist also für die Winkel eines Dreiecks wirklich immer gleich Null.

Bezeichnet man den für die imaginären Kreispunkte gewonnenen Ausdruck durch $\Omega^* = 0$, so ist $\Omega^* = M^2$ die Relation der Aufg. 2 des Art. 79, welche die senkrechten Abstände einer geraden Linie von den Fundamentalpunkten stets erfüllen und für $\frac{\Omega^*}{M^2} = \Omega$ ist $\Omega = 1$ eine Relation, durch welche (vergl. Art. 69) nicht homogene Gleichungen in homogene Form gebracht werden können; man führt einen Factor ζ in die Gleichung ein und eliminirt ihn durch die Relation $\zeta^2 = \Omega$. Die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser r und dem Mittelpunkt $\Sigma\alpha_i\xi_i = 0$ ist durch $\Sigma\alpha_i\xi_i = r\Sigma\alpha_i$ dargestellt und wird durch Multiplication mit $\zeta_1 = \Omega^{\frac{1}{2}}$ auf der rechten Seite homogen und durch Quadriren entwickelt zu $(\Sigma\alpha_i\xi_i)^2 = r^2 (\Sigma\alpha_i)^2 \Omega$.

Aufg. 3. Sind $\omega' = 0$, $\omega'' = 0$ die Gleichungen der imaginären unendlich entfernten Kreispunkte, ist also $\omega'\omega'' = \Omega$, so sagt eine Gleichung von der Form $\eta_1\eta_2 = k\Omega =$ const., in welcher $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ die Gleichungen von Punkten, d. h. lineare homogene Polynome in den ξ darstellen, aus, dass für einen Kegelschnitt das Product der normalen Abstände einer Tangente von den Brennpunkten constant ist. (Vergl. Art. 195; 315, Aufg. 2.) Denn sie repräsentirt einen Kegelschnitt, der einem Vierseit eingeschrieben ist, das die imaginären Kreispunkte zu einem Paar von Gegenecken hat und dessen Brennpunkte also $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ sind. Fallen diese zusammen, so ist $\eta_1^2 =$ const., d. h. alle Tangenten sind von dem dann vorhandenen Doppelbrennpunkt (Centrum) gleich weit entfernt. Offenbar kann diess Zusammenfallen nur eintreten, wenn zwei Gegenecken des Vierseits dem Kreise selbst angehören.

Aufg. 4. Wann stellt die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten einen Kreis dar?

Nach der vorigen Aufgabe hat ein Kreis vom Centrum $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$ eine Gleichung der Form
$s_1^2(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) + s_2^2(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1) + s_3^2(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)$
$= (\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3)$ und die Bedingungen des Kreises ermöglichen die Identität einer allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit dieser Form; für $\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \text{etc.} = 0$ sind die Relationen Folge der Coefficientenvergleichung

$$\frac{s_1^2 - \alpha_1^2}{\alpha_{11}} = \frac{s_2^2 - \alpha_2^2}{\alpha_{22}} = \frac{s_3^2 - \alpha_3^2}{\alpha_{33}} = \frac{s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_{23}}$$
$$= \frac{s_2^2 - s_3^2 - s_1^2 - 2\alpha_3\alpha_1}{2\alpha_{31}} = \frac{s_3^2 - s_1^2 - s_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2}{2\alpha_{12}}.$$

Ist c der gemeinsame Werth dieser Ausdrücke, so bildet man aus $s_1^2 - \alpha_{11}c = \alpha_1^2$, $s_2 s_3 \cos A_1 + \alpha_{23}c = -\alpha_2\alpha_3$, etc. die Gleichungen
$(s_2^2 - \alpha_{22}c)(s_3^2 - \alpha_{33}c) = (s_2 s_3 \cos A_1 + \alpha_{23}c)^2$ oder
$c^2(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2) - c(\alpha_{22}s_3^2 + \alpha_{33}s_2^2 + 2\alpha_{23}s_2s_3\cos A_1) + s_2^2 s_3^2 \sin^2 A_1 = 0$
und

$$(s_1^2 - \alpha_{11}c)(s_2 s_3 \cos A_1 + \alpha_{23}c) + (s_3 s_1 \cos A_2 + \alpha_{31}c)(s_1 s_2 \cos A_3 + \alpha_{12}c) = 0$$
oder
$$c^2(\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{23}) + c\{s_1(s_1\alpha_{23} + s_2 \cos A_3 \alpha_{31} + s_3 \cos A_2 \alpha_{12}) - s_2 s_3 \cos A_1 \alpha_{11}\}$$
$$- s_1^2 s_2 s_3 \sin A_2 \sin A_3 = 0;$$
Gleichungen, welche durch $s_2^2 s_3^2 \sin A_1^2 = s_1^2 s_2 s_3 \sin A_2 \sin A_3 = M^2$ vereinfacht werden können. Combinirt man sie mit den zwei Paaren von analogen Gleichungen, welche man erhält, so findet man
$$c = \frac{\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 - 2(\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{23})}{(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12})\, s_1^2}$$
und drückt als Bedingungen der allgemeinen Gleichung für den Kreis
$$\frac{\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2 + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 - 2(\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{23})}{s_1^2} =$$
$$\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 - 2(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{31})}{s_2^2} =$$
$$\frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2 - 2(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{12})}{s_3^2}.$$

Aufg. 5. Man soll die Bedingungen feststellen, unter welchen die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel darstellt.

Die Bedingung für die Parabel fordert, dass die Coefficientensumme der Gleichung gleich Null sei; denn der unendlich entfernten geraden Linie, welche dann eine Tangente der Curve ist, entspricht die Coordinatenrelation $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$. Daher ist z. B. $\xi_1\xi_3 = \xi_2^2$ die Gleichung einer Parabel und man erkennt, dass das Product der Abstände von zwei Punkten der Curve von einer beliebigen Tangente derselben dem Quadrat des Abstandes dieser Letztern vom Pol der sie verbindenden Sehne gleich ist.

Die Unterscheidungscharaktere für Ellipse und Hyperbel werden durch die Untersuchung der Realität der Schnittpunkte erhalten, welche die Curve mit der unendlich entfernten geraden Linie bestimmt. Wenn ein Punkt $\Sigma\alpha_i\xi_i = 0$ in dieser geraden Linie liegt, so besteht unter den Coefficienten seiner Gleichung die Relation $\Sigma\alpha_i = 0$. Entwickelt man nun die Bedingung, unter welcher jener Punkt der durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten ausgedrückten Curve angehört (Art. 114, 316), d. i.
$$(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2)\alpha_1^2 + (\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2)\alpha_2^2 + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)\alpha_3^2$$
$$+ 2(\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{23})\alpha_2\alpha_3 + 2(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{31})\alpha_3\alpha_1$$
$$+ 2(\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{12})\alpha_1\alpha_2 = 0,$$
so liefert diese für $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$, und die Bedingungen, nach welchen ihre Wurzeln reell oder imaginär sind, geben die analytischen Bedingungen für die Hyperbel oder Ellipse in Liniencoordinaten.

319. Den Gebrauch derselben allgemeinen Methoden erläutern wir ferner noch durch die folgende Gruppe von Aufgaben.

Aufg. 1. Man beweise folgende Sätze: Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so liegen die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten mit den Polen der Sehnen

gemeinschaftlicher Berührung in einer geraden Linie und bilden mit ihnen ein harmonisches System.

Die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von drei Kegelschnitten, welche mit einem vierten Kegelschnitt je eine doppelte Berührung haben, liegen viermal zu dreien in einer geraden Linie. Wenn drei Kegelschnitte zwei zu allen gemeinschaftliche Tangenten haben, so liegen die Schnittpunkte der übrigen jedem Paare gemeinsamer Tangenten in einer geraden Linie. (Vergl. Art. 283.)

Aufg. 2. Der Form der Kegelschnittsgleichung $\xi_1 \xi_3 = k^2 \xi_2^2$ entspricht $\mu^2 \xi_1 - 2\mu k \xi_2 + \xi_3 = 0$ als Gleichung des Berührungspunktes der Tangente μ, welche die Punkte $\mu \xi_1 = k\xi_2$, $\mu k \xi_2 = \xi_3$ mit einander verbindet. In andern Worten, wenn in irgend einem System der Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z'' die Coordinaten von zwei Punkten eines Kegelschnitts und x''', y''', z''' die Coordinaten des Pols ihrer Sehne sind, so können die Coordinaten eines beliebigen Punktes desselben in der Form $\mu^2 x' + 2\mu k x''' + x''$, $\mu^2 y' + 2\mu k y''' + y''$, $\mu^2 z' + 2\mu k z''' + z''$ geschrieben werden, indess die Tangente desselben die beiden Tangenten nach den Verhältnissen $\mu : k$, $\mu k : 1$ theilt. Für $k = 1$ ist die Curve eine Parabel.

Aufg. 3. Man soll den Ort eines Punktes (die Enveloppe einer geraden Linie) bestimmen, welcher (welche) den zwischen zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts gelegenen Abschnitt einer veränderlichen Tangente desselben (den von zwei festen Punkten eines Kegelschnitts an einem veränderlichen Punkte desselben bestimmten Winkel) nach gegebenem Verhältniss (Sinus-Verhältniss) $m : n$ theilt.

Aufl. Für $\xi_1 \xi_3 = k \xi_2^2$ als Gleichung des gegebenen Kegelschnitts ist die Gleichung des Theilpunktes

$$\mu^2 \{m\xi_2 + n\xi_1\} k + \mu \{n\xi_1 + m\xi_3 + (m+n) k^2 \xi_2\} + (n\xi_2 + m\xi_3) k = 0$$

und sein Ort also durch

$$4k^2 (n\xi_1 + m\xi_2)(n\xi_2 + m\xi_3) = \{n\xi_1 + m\xi_3 + (m+n) k^2 \xi_2\}^2$$

dargestellt.

Aufg. 4. Wenn man von einem Punkte aus, welcher auf einer festen geraden Linie fortrückt, an eine Curve zweiten Grades die Tangenten zieht und zu diesen und der festen geraden Linie in jedem Falle einen vierten Strahl so bestimmt, dass er mit jenen ein constantes Doppelverhältniss hat, so umhüllen alle Lagen desselben einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

Denken wir die Gleichung des Kegelschnitts in der Form $a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + \text{etc.} = 0$ und lassen wir vom Durchschnittspunkte der geraden Linien ξ, η (d. i. von den Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3) die gerade Linie $\lambda\xi_1 + \mu\eta_2$, $\lambda\xi_2 + \mu\eta_2$, $\lambda\xi_3 + \mu\eta_3$ ausgehen (Art. 67), so ist sie Tangente des betrachteten Kegelschnitts, wenn die Substitution ihrer Coordinaten für ξ_1, ξ_2, ξ_3 seiner Gleichung Genüge leistet. Die Substitution liefert eine Gleichung von der Form $\lambda^2 \Sigma' + 2\lambda\mu\Pi + \mu^2\Sigma'' = 0$, in welcher Σ' die linke Seite der Kegelschnittsgleichung mit den gegebenen Werthen ξ, Σ'' die-

selbe mit den gegebenen Werthen η und Π ein in ξ sowohl als in η linearer Ausdruck ist, nämlich

$$\alpha_{11}\xi_1\eta_1 + \alpha_{22}\xi_2\eta_2 + \alpha_{33}\xi_3\eta_3 + \alpha_{23}(\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2) + \alpha_{31}(\xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_3) + \alpha_{12}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1).$$

Jene Gleichung giebt für $\lambda:\mu$ zwei Werthe, welche in $\lambda\xi_1 + \mu\eta_1$, etc. eingesetzt die Coordinaten der Tangenten liefern. Sind diese Werthe durch a und b und ist das gegebene Doppelverhältniss durch d bezeichnet, so ist entweder $a:b=d$ oder $b:a=d$, d. i. $a-bd=0$ oder $b-ad=0$, so dass $(a-bd)(b-ad)=0$ oder $ab(1+d^2)=(a^2+b^2)d$ und daher auch $ab(1+d)^2=(a+b)^2 d$ ist.

Setzt man nach der Theorie der Gleichungen für das Product der Wurzeln und für ihre Summe die Werthe, so ergiebt sich als Gleichung der Enveloppe $\Sigma'\Sigma''(1+d)^2 - 4d\Pi^2 = 0$. Denkt man η als bekannt, so ist Σ'' eine Constante und kann mit den übrigen Constanten zusammen in einem Zeichen ν vereinigt werden, so dass dann $\Sigma + \nu\Pi^2 = 0$ die Gleichung der Enveloppe ist. Sie stellt ein System von Kegelschnitten dar, welche mit dem festen Kegelschnitt $\Sigma = 0$ eine doppelte Berührung haben, für welche der Punkt $\Pi = 0$ der Pol der Berührungssehne ist. (Vergl. Art. 272.)

Aufg. 5. Man soll ein Polygon construiren, welches einem festen Kegelschnitt umgeschrieben ist und dessen Ecken je eine in einer gegebenen geraden Linie liegen. (Vergl. Aufg. 6 in Art. 308.)

Neunzehntes Kapitel.

Von der allgemeinen homogenen Gleichung zweiten Grades.

---

320. Es giebt keinen Kegelschnitt, dessen Gleichung nicht in der Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

geschrieben werden kann. Denn diese Gleichung ist vom zweiten Grade und weil sie fünf unabhängige Constanten enthält, so können wir diese Constanten so bestimmen, dass die Curve, welche sie darstellt, durch fünf gegebene Punkte geht und daher mit einem beliebigen gegebenen Kegelschnitt zusammenfällt. Die so geschriebene Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten enthält die Gleichung in Cartesischen Coordinaten als einen speciellen Fall; wir erhalten ihn, wenn wir x_1 und x_2 durch x und y er-

setzen und die Seite $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks im Unendlichen annehmen, so dass $x_3 = 1$ geschrieben werden kann. (Vergl. Art. 69.) Andererseits kann die Gleichung $\alpha_{11}\xi_1^2 + \text{etc.} = 0$ in trimetrischen Liniencoordinaten jeden beliebigen Kegelschnitt darstellen, weil sie für fünf willkührlich gewählte Tangenten eines solchen erfüllt werden kann*).

In gleicher Weise kann jede Curve von einer gegebenen Ordnung mittelst einer homogenen Function von demselben Grade in x_1, x_2, x_3 dargestellt werden; denn man erkennt leicht, dass die Zahl der Glieder in der vollständigen Gleichung n^{ten} Grades zwischen zwei Veränderlichen, nämlich $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ (Art. 91), übereinstimmt mit der Zahl der Glieder in der homogenen Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen. Diese beiden Gleichungen sind daher gleich fähig irgend eine besondere Curve darzustellen, da sie dieselbe Zahl von Constanten enthalten.

Aufg. Man soll die geometrische Bedeutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung untersuchen.

Die Substitution $x_3 = 0$ giebt in $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$ die Gleichung der Geraden, welche von der Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks nach den Durchschnittspunkten B_3, B_3' der Gegenseite A_1A_2 mit dem Kegelschnitt gezogen; man erhält für das Product der Wurzeln, die Summe derselben und die Summe ihrer reciproken Werthe die drei Ausdrücke

$$\frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{s_2^2 . A_2B_3 . A_2B_3'}{s_1^2 . A_1B_3 . A_1B_3'}, \quad -\frac{2a_{12}}{a_{11}} = \left(\frac{A_2B_3}{A_1B_3} + \frac{A_2B_3'}{A_1B_3'}\right)\frac{s_2}{s_1},$$

$-\frac{2a_{12}}{a_{22}} = \left(\frac{A_1B_3}{A_2B_3} + \frac{A_1B_3'}{A_2B_3'}\right)\frac{s_1}{s_2}$ und somit durch Multiplication der beiden letzteren $\frac{4a_{12}^2}{a_{11}a_{22}} = \frac{A_1B_3 . A_2B_3'}{A_1B_3' . A_2B_3} + \frac{A_1B_3' . A_2B_3}{A_1B_3 . A_2B_3'} + 2$ oder

$\frac{4a_{12}^2}{a_{11}a_{22}} - 4 = \frac{(A_1B_3 . A_2B_3' - A_1B_3' . A_2B_3)^2}{A_1B_3 . A_1B_3' . A_2B_3 . A_2B_3'}$ und für $s_3' = B_3B_3'$ sowie wegen $s_3 . B_3B_3' = A_1B_3 . A_2B_3' - A_1B_3' . A_2B_3$

$a_{12}^2 = a_{11}a_{22}\left\{1 + \frac{s_3^2 . s_3'^2}{4A_1B_3 . A_1B_3' . A_2B_3 . A_2B_3'}\right\}$. Nennt man dann d_{12} den zu A_1A_2 parallelen Halbdurchmesser, so ist $A_1B_3 . A_1B_3' : d_{12}^2 = P_1$, $A_2B_3 . A_2B_3' : d_{12}^2 = P_2$, wo P_1, P_2 Constanten sind (Art. 112) und man hat $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{s_2^2 P_2}{s_1^2 P_1}$, $\frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}} = 1 + \frac{s_3^2 s_3'^2}{4P_1P_2d_{12}^4}$ und somit kann die

---

*) Die besondere Erwähnung der entsprechenden Interpretation in Tangentialcoordinaten wird im Folgenden der Kürze wegen zumeist unterlassen, könnte aber in allen Fällen leicht nachgetragen werden; das Vorhergehende wird hingereicht haben, um diese Uebertragung zur selbstverständlichen Gewohnheit zu machen.

Gleichung des Kegelschnitts in der Form

$$\Sigma s_i^2 P_i x_i^2 + 2\Sigma s_i s_j x_i x_j \left(P_i P_j + \frac{s_k^2 s_k'^2}{4 d_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (i=1,2,3)$$

geschrieben werden, in welcher die Bedeutung der Coefficienten vollkommen ersichtlich ist. Für $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ hat man die Gleichung des umgeschriebenen Kegelschnitts, für $s_1' = s_2' = s_3' = 0$ die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts respective in den Formen

$$\Sigma \frac{s_k x_i x_j}{d_{ij}^2} = 0, \quad \Sigma s_i^2 P_i x_i^2 + 2\Sigma s_i s_j x_i x_j (P_1 P_2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

und die Relation $P_i P_j + \frac{s_k^2 s_k'^2}{4 d_{ij}^2} = 0$ entspricht der Beziehung auf eine Gruppe harmonischer Pole, weil die harmonische Theilung von $A_1 A_2$ durch B_3, B_3' die Relationen

$s_3 . B_3 B_3' = -2 A_1 B_3' . A_2 B_3$, $s_3 . B_3 B_3' = 2 A_1 B_3 . A_2 B_3'$ und damit $s_3^2 . \overline{B_3 B_3'}^2 = -4 A_1 B_3 . A_1 B_3' . A_2 B_3 . A_2 B_3'$ liefert. Die Coefficienten jener Gleichung haben also $s_i^2 P_j$ zum geometrischen Ausdruck.

321. Da nach Art. 67 die Coordinatenwerthe irgend eines in der geraden Verbindungslinie von x' und x'' liegenden Punktes von der Form $l x_1' + m x_1''$, $l x_2' + m x_2''$, $l x_3' + m x_3''$ sind, so können die Punkte, in welchen jene Gerade irgend eine Curve schneidet, durch die Substitution dieser Werthe an Stelle der Veränderlichen in ihre Gleichung bestimmt werden, indem man die aus der resultirenden Gleichung entspringenden Werthe des Verhältnisses $l : m$ ermittelt.

So werden (vergl. Art. 110) die Durchschnittspunkte jener geraden Linie mit einem durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt durch die quadratische Gleichung

$$l^2(a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{23}x_2'x_3' + 2a_{31}x_3'x_1' + 2a_{12}x_1'x_2')$$
$$+ 2lm\{a_{11}x_1'x_1'' + a_{22}x_2'x_2'' + a_{33}x_3'x_3'' + a_{23}(x_2'x_3'' + x_2''x_3')$$
$$+ a_{31}(x_3'x_1'' + x_3''x_1') + a_{12}(x_1'x_2'' + x_1''x_2')\} + m^2(a_{11}x_1''^2 + a_{22}x_2''^2$$
$$+ a_{33}x_3''^2 + 2a_{23}x_2''x_3'' + 2a_{31}x_3''x_1'' + 2a_{12}x_1''x_2'') = 0$$

bestimmt, die wir in Gebrauch leicht verständlicher Abkürzungen in der Form $l^2 S' + 2lmP + m^2 S'' = 0$ schreiben wollen. Wenn der Punkt x' in der Curve liegt, so verschwindet S' und die quadratische Gleichung reducirt sich auf eine lineare. Ihre Auflösung für $l : m = -S'' : 2P$ giebt für die Coordinaten des Punktes, in welchem der Kegelschnitt durch die gerade Linie von einem seiner Punkte x' nach einem willkürlich ausser ihm gewählten Punkte x'' geschnitten wird, die Werthe $S''x_1' - 2Px_1''$, $S''x_2' - 2Px_2''$, $S''x_3' - 2Px_3''$; dieselben reduciren sich auf x_1', x_2', x_3', sobald

$P=0$ ist; d. h. wenn die Coordinaten x_1'', x_2'', x_3'' die Gleichung $a_{11}x_1x_1'+a_{22}x_2x_2'+a_{33}x_3x_3'+a_{23}(x_2x_3'+x_2'x_3)+a_{31}(x_3x_1'+x_3'x_1)+a_{12}(x_1x_2'+x_1'x_2)=0$ erfüllen, so schneidet die gerade Verbindungslinie der Punkte x' und x'' die Curve in zwei in x' zusammenfallenden Punkten, oder mit andern Worten: der Punkt x'' liegt in der Tangente des Kegelschnitts im Punkte x'. Die eben geschriebene Gleichung ist somit die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts.

322. Auf Grund der vollständigen Symmetrie der betrachteten Gleichung nach den Grössen x_i und x_i' erkennen wir wie im Art. 106, dass diese Gleichung die Polare des Punktes x' darstellt, sobald derselbe nicht in der Curve liegt. Wir können den nämlichen Schluss aus der Bemerkung begründen, dass $P=0$ die Bedingung ausdrückt, unter welcher die gerade Verbindungslinie der Punkte x' und x'' durch die Curve harmonisch getheilt wird.

Die Gleichung der Polare des Punktes x' kann in der Form $x_1'(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+x_2'(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)+x_3'(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)=0$ geschrieben werden und wenn man bemerkt, dass die in derselben auftretenden trinomischen Factoren von x_1', x_2', x_3' respective die Hälften der nach x_1, x_2, x_3 genommenen Differentialquotienten der Gleichung des Kegelschnitts $\frac{\partial S}{\partial x_1}$, $\frac{\partial S}{\partial x_2}$, $\frac{\partial S}{\partial x_3}$ sind, welche wir abkürzend durch S_1, S_2, S_3 bezeichnen wollen, so geht sie in $x_1'S_1+x_2'S_2+x_3'S_3=0$ über. Insbesondere ist für $x_2'=0$, $x_3'=0$ die Polare des Fundamentalpunktes A_1 durch $S_1=0$ dargestellt*), die Gleichung der Polare des Durchschnittspunktes von zwei Fundamentallinien wird gebildet, indem man den nach der Veränderlichen der Dritten genommenen Differentialquotienten der Gleichung des Kegelschnitts gleich Null setzt. Da die Gleichung der Polare bei der Vertauschung der x mit den x' ungeändert bleibt, so kann dieselbe auch in der Form $x_1S_1'+x_2S_2'+x_3S_3'=0$ geschrieben werden. Sie hat in beiden

*) Die Darstellung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in der Form $(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2+(a_{11}a_{12}-a_{12}^2)x_2^2+2(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})x_2x_3+(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)x_3^2=0$, in welcher die letzten drei Glieder durch ihr Verschwinden zwei durch den Fundamentalpunkt A_1 gehende Gerade darstellen, giebt auch $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$ als die Polare von A_1 und begründet damit das Folgende.

Fällen die allgemeine Form der Gleichung der geraden Linie. Diese Vertauschbarkeit der x und x' begründet aber den Satz: Wenn der Punkt x in der Polare von x' liegt, so liegt auch x' in der Polare von x; woraus ferner folgt, dass die Polare sich um einen Punkt dreht, d. h. ein Strahlbüschel bildet, während der Pol eine gerade Linie d. i. eine Punktreihe durchläuft und umgekehrt. (Art. 108.)

323. Wenn ein Kegelschnitt in ein Paar von geraden Linien degenerirt, so geht die Polare eines jeden Punktes ihrer Ebene durch den Durchschnittspunkt dieser Geraden. Es ist geometrisch offenbar, dass der Ort der harmonischen Mittel der durch den Punkt gehenden Radien vectoren die vierte harmonische Gerade zu den beiden gegebenen Geraden und der Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit jenem Punkte ist. Aus der Formel des letzten Artikels geht auch hervor, dass die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf das Linienpaar $x_1=0$, $x_2=0$ durch $x_2'x_1+x_2x_1'=0$ dargestellt wird, die harmonisch conjugirte Gerade zu jenen beiden in Bezug auf die Verbindungslinie $x_2'x_1-x_2x_1'=0$ von $x_1=x_2=0$ mit dem gegebenen Punkte. Wenn daher die allgemeine Gleichung ein Paar von geraden Linien darstellt, so sind die Polaren der Fundamentalpunkte $x_2=x_3=0$, $x_3=x_1=0$, $x_1=x_2=0$ $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$, $a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$, $a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3=0$ drei gerade Linien durch einen Punkt; und indem wir wie im Art. 38 die Bedingung dafür durch die Elimination von x_1, x_2, x_3 zwischen diesen Gleichungen ausdrücken, erhalten wir die früher durch andere Methoden gefundene Coefficientenrelation, welche erfüllt sein muss, damit die allgemeine Gleichung zweiten Grades ein Paar von geraden Linien darstelle, in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ (mit } a_{ij}=a_{ji}\text{) und entwickelt}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{31}^2-a_{33}a_{12}^2=0.$$

Man nennt die linke Seite dieser Gleichung die **Discriminante der Gleichung des Kegelschnitts***) und wir werden sie im Folgenden stets durch den Buchstaben Δ bezeichnen.

*) Wenn allgemein eine homogene Function von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen nach einander in Bezug auf alle diese Variabeln differentiirt und zwischen den resultirenden Gleichungen die Elimi-

Nach Art. 76 ergiebt sich für den Fall ihres Verschwindens, d. h. wenn der Kegelschnitt der allgemeinen Gleichung in ein Paar von geraden Linien degenerirt, zwischen den Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Geraden die sie bestimmende Relation $x_1':x_2':x_3'=A_{i1}:A_{i2}:A_{i3}$.

Aufg. Wenn man einen Kegelschnitt durch die allgemeine Gleichung $a_{11}x_1^2+\ldots+2a_{12}x_1x_2=0$ und eine gerade Linie durch die Gleichung $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ darstellt, so schneiden die Polaren der Fundamentalpunkte $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$, $a_{21}x_1+\ldots=0$, $a_{31}x_1+\ldots=0$ die gegebene gerade Linie in Punkten

$$x_1:x_2:x_3=a_{12}a_3-a_{13}a_2:a_{13}a_1-a_{11}a_3:a_{11}a_2-a_{12}a_1, \text{ etc.}$$

und die geraden Linien, die man von diesen nach den Ecken selbst ziehen kann, sind durch $x_2(a_{11}a_2-a_{12}a_1)=x_3(a_{13}a_1-a_{11}a_3)$,

$$x_3(a_{22}a_3-a_{23}a_2)=x_1(a_{12}a_2-a_{22}a_1),$$
$$x_1(a_{33}a_1-a_{13}a_3)=x_2(a_{23}a_3-a_{33}a_2)$$

dargestellt und schneiden sich in einem Punkte, wenn die Coefficienten a_i in der Gleichung der geraden Linie, sagen wir lieber ihre Coordinaten ξ_i die Bedingungsgleichung erfüllen $(a_{11}\xi_2-a_{12}\xi_1)(a_{22}\xi_3-a_{23}\xi_2)(a_{33}\xi_1-a_{13}\xi_3)=(a_{13}\xi_1-a_{11}\xi_3)(a_{12}\xi_2-a_{22}\xi_1)(a_{23}\xi_1-a_{33}\xi_2)$ oder

$$2(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{13})\xi_1\xi_2\xi_3+a_{11}\{A_{13}\xi_2\xi_3^2+A_{12}\xi_2^2\xi_3\}$$
$$+a_{22}\{A_{12}\xi_3\xi_1^2+A_{23}\xi_3^2\xi_1\}+a_{33}\{A_{23}\xi_1\xi_2^2+A_{13}\xi_1^2\xi_2\}=0;$$

die gerade Linie umhüllt dann eine Curve dritter Classe. Diese Enveloppe kann zerfallen in einen Punkt und eine Enveloppe zweiter Classe, d. i. ihre Gleichung identisch sein mit

$(\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3)(\beta_{12}\xi_1\xi_2+\beta_{23}\xi_2\xi_3+\beta_{13}\xi_3\xi_1)$; diess bedingt die Relationen $\beta_{23}\beta_1+\beta_{13}\beta_2+\beta_{12}\beta_3=2(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{13})$;

$$\beta_{13}\beta_1=a_{22}A_{12},\ \beta_{12}\beta_1=a_{33}A_{13};\ \beta_{12}\beta_2=a_{33}A_{23},\ \beta_{23}\beta_2=a_{11}A_{12};$$
$$\beta_{23}\beta_3=a_{11}A_{13},\ \beta_{13}\beta_3=a_{22}A_{23}.$$

Man erhält $\beta_{23}=\frac{ka_{11}}{A_{23}}$, $\beta_1=\frac{1}{k}\cdot A_{13}\cdot A_{12}$, $\beta_{31}=\frac{ka_{22}}{A_{13}}$, $\beta_2=\frac{1}{k}\cdot A_{12}A_{23}$, $\beta_{12}=\frac{ka_{33}}{A_{12}}$, $\beta_3=\frac{1}{k}\cdot A_{23}A_{13}$ aus den sechs letzten Gleichungen und reducirt damit die erste derselben. Man erhält

---

nation der Veränderlichen vollzogen wird, so nennt man diess Resultat der Elimination die Discriminante dieser Function. So ist insbesondere die Bedingung, unter welcher eine algebraische Gleichung $U=0$ zwei gleiche Wurzeln besitzt, das Verschwinden ihrer Discriminante; denn wenn man durch Einführung einer neuen Variabeln y die Gleichung homogen macht, so wird die fragliche Bedingung erhalten, indem man zwischen den Gleichungen $\frac{\partial U}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial U}{\partial y}=0$ die Grössen x und y eliminirt.

$a_{11}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33} - 2a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} + \varDelta\left\{\frac{a_{11}^2}{A_{23}} + \frac{a_{22}^2}{A_{31}} + \frac{a_{33}^2}{A_{12}}\right\} = 0$ und durch Substitution der Werthe der A_{11}, etc. in den ersten Gliedern $\varDelta\left\{1 + \frac{a_{11}^2}{A_{23}} + \frac{a_{22}^2}{A_{31}} + \frac{a_{33}^2}{A_{12}}\right\} = 0.$ Jenes Zerfallen tritt also ein für $\varDelta = 0$ und $1 + \frac{a_{11}^2}{A_{23}} + \frac{a_{22}^2}{A_{31}} + \frac{a_{33}^2}{A_{12}} = 0.$ Die Gleichung der Enveloppe ist $\left(\frac{\xi_1}{A_{23}} + \frac{\xi_2}{A_{31}} + \frac{\xi_3}{A_{12}}\right)\left(\frac{a_{11}}{A_{23}}\xi_2\xi_3 + \frac{a_{22}}{A_{31}}\xi_3\xi_1 + \frac{a_{33}}{A_{12}}\xi_1\xi_2\right) = 0$ und zerfällt also in einen Punkt und einen dem Dreieck eingeschrieb een Kegelschnitt. Für $\varDelta = 0$ fällt der Punkt mit dem Doppelpunkt des gegebenen Kegelschnitts zusammen.

324. Die Ergebnisse des Art. 76 wenden wir ferner an auf die Frage nach der **Bestimmung der Coordinaten des Pols einer Geraden** $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ in Bezug auf den durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt. Sind x_1', x_2', x_3' die gesuchten Coordinaten, so gelten die drei Gleichungen (für welche $a_{ij} = a_{ji}$ ist) $a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = a_1$, $a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = a_2$, $a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' = a_3$. Indem wir sie für x_1', x_2', x_3' auflösen, erhalten wir nach der im Art. 323 festgesetzten Bezeichnung der Discriminante

$$\varDelta x_1' = \frac{d\varDelta}{da_{11}}a_1 + \frac{d\varDelta}{da_{21}}a_2 + \frac{d\varDelta}{da_{31}}a_3 = A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3$$
$$= (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)a_1 + (a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})a_2 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})a_3,$$
$$\varDelta x_2' = \frac{d\varDelta}{da_{12}}a_1 + \frac{d\varDelta}{da_{22}}a_2 + \frac{d\varDelta}{da_{32}}a_3 = A_{12}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3$$
$$= (a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})a_1 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)a_2 + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})a_3,$$
$$\varDelta x_3' = \frac{d\varDelta}{da_{13}}a_1 + \frac{d\varDelta}{da_{23}}a_2 + \frac{d\varDelta}{da_{33}}a_3 = A_{13}a_1 + A_{23}a_2 + A_{33}a_3$$
$$= (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})a_1 + (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{13})a_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_3.$$

Die Coordinaten des Pols sind also respective zu den Grössen $A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3$, $A_{12}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3$, $A_{13}a_1 + A_{23}a_2 + A_{33}a_3$ proportional; sie sind stets reell, so lange die gerade Linie es ist und umgekehrt: Jedem Pol entspricht also eine Polare und jeder Polare ein Pol. (Vergl. Artikel 114.) Da insbesondere der Pol einer Tangente des Kegelschnitts ihr Berührungspunkt, also ein Punkt dieser Tangente selbst ist, so erhalten wir durch Einsetzen dieser Coordinatenwerthe an Stelle der Veränderlichen in die Gleichung der Geraden die Bedingung, unter welcher die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ den durch die allgemeine Gleichung darge-

stellten Kegelschnitt berührt, in der Form
$A_{11}a_1^2 + A_{22}a_2^2 + A_{33}a_3^2 + 2A_{23}a_2a_3 + 2A_{13}a_3a_1 + 2A_{12}a_1a_2 = 0$, oder für $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ als Gleichung der Geraden in $A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts in Tangentialcoordinaten wie früher. Diese Entstehung der Tangentialgleichung kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass man sagt, sie sei das Resultative der Elimination von x_1', x_2', x_3' und ϱ zwischen den vier Gleichungen, denen die Coordinaten des Pols genügen müssen,

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + \varrho\xi_1 = 0,\quad a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + \varrho\xi_2 = 0,$$
$$a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' + \varrho\xi_3 = 0,\quad \xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' = 0.$$

Dann erhält man sie nach Artikel 72 in der Form einer

Determinante $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3. & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Sie soll überall im Folgenden durch das abkürzende Symbol $\Sigma = 0$ bezeichnet werden, so dass $\Sigma = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten ausdrückt, dessen Gleichung in Punktcoordinaten $S = 0$ ist. Man sieht sofort, dass die Coordinaten des Pols der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma = 0$ bis auf einen gemeinschaftlichen Factor durch die in Bezug auf ξ_1, ξ_2, ξ_3 respective gebildeten Differentiale von Σ ausgedrückt werden, also entsprechend der Bezeichnungsweise des Artikel 322 durch Σ_1, Σ_2, Σ_3. Ebenso wie dann dort die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes dargestellt ward durch $x_1 S_1' + x_2 S_2' + x_3 S_3' = 0$, so erhält man jetzt die Bedingung, unter welcher die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ $(\xi_1 x_1 + \ldots = 0)$ durch den Pol von $a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = 0$ $(\xi_1'x_1 + \ldots = 0)$ hindurchgeht, in der Form $a_1\Sigma_1' + a_2\Sigma_2' + a_3\Sigma_3' = 0$ oder $\xi_1\Sigma_1' + \xi_2\Sigma_2' + \xi_3\Sigma_3' = 0$; d. h. diese letztere ist die Gleichung dieses Pols in Linien-Coordinaten.

Und die Bedingung, unter welcher zwei gerade Linien $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$, $\xi_1'x_1 + \ldots = 0$ in Bezug auf den durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt einander conjugirt sind, d. h. unter welcher die eine dieser Geraden den Pol der andern enthält, kann offenbar in jeder der beiden äquivalenten Formen $\xi_1'\Sigma_1 + \xi_2'\Sigma_2 + \xi_3'\Sigma_3 = 0$, $\xi_1\Sigma_1' + \xi_2\Sigma_2' + \xi_3\Sigma_3' = 0$ geschrieben werden. Das Nämliche ergiebt sich als Folge des Princips der Dualität.

Aufg. 1. Man soll die Coordinaten des Pols der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ (Art. 160) bestimmen. In diesem Falle ist nach dem a. O. die Tangentialgleichung $a_1 \xi_2 \xi_3 + a_2 \xi_3 \xi_1 + a_3 \xi_1 \xi_2 = 0$; die Coordinaten des Pols sind also

$$x_1' = a_2 \xi_3 + a_3 \xi_2, \quad x_2' = a_3 \xi_1 + a_1 \xi_3, \quad x_3' = a_1 \xi_2 + a_2 \xi_1.$$

Aufg. 2. Den Ort des Pols der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf einen Kegelschnitt zu bestimmen, für welchen drei Tangenten und eine andere Bedingung gegeben sind.

Wenn wir die vorhergehenden Gleichungen für a_1, a_2, a_3 auflösen, so finden wir a_1, a_2, a_3 den Grössen $\xi_1(\xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' - \xi_1 x_1')$, $\xi_2(\xi_3 x_3' + \xi_1 x_1' - \xi_2 x_2')$, $\xi_3(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' - \xi_3 x_3')$ proportional.

Die Gleichung $(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ bezeichnet aber einen Kegelschnitt, der die drei Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berührt und eine vierte Bedingung, welcher der Kegelschnitt genügen muss, begründet eine weitere Relation zwischen a_1, a_2, a_3, aus welcher durch Einsetzen der eben angegebenen Werthe die Gleichung des Ortes hervorgeht, den der Pol von $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ beschreibt. Schreiben wir für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Seitenlängen s_1, s_2, s_3 des Fundamentaldreiecks respective, so erhalten wir in derselben Gleichung den Ort des Centrums. So schliessen wir aus dem Nachweis des Art. 160, dass der Kegelschnitt die Gerade $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$ berührt, wenn $\frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} = 0$, jetzt, dass der Ort des Pols der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf den die vier Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$ berührenden Kegelschnitt die durch

$$\frac{\xi_1(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1)}{A_1} + \frac{\xi_2(\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)}{A_2} + \frac{\xi_3(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3)}{A_3} = 0$$

dargestellte gerade Linie ist.

Oder weil der Kegelschnitt durch den Punkt x' geht, wenn die Bedingung $(a_1 x_1')^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2')^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3')^{\frac{1}{2}} = 0$ erfüllt ist, so ist der Ort des Pols der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf die Kegelschnitte, welche die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren und den Punkt x' enthalten, durch

$$\left\{\xi_1 x_1'(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\xi_2 x_2'(\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left\{\xi_3 x_3'(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3)\right\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

ausgedrückt, d. h. dieser Ort ist ein Kegelschnitt, welcher die Geraden $\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1 = 0$, $\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 = 0$, $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3 = 0$ berührt. Wenn man den Ort des Centrums sucht, d. i. bei Ersetzung der ξ_i durch die s_i, so sind diese Geraden die geraden Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten des von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gebildeten Dreiecks.

Aufg. 3. Man soll die Coordinaten des Pols der geraden Linie $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt von der Gleichung $a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2 = 0$ bestimmen.

Nach Art. 157 ist in diesem Falle die Gleichung in Tangentialcoordinaten

$a_{23}^2\xi_1^2 + a_{31}^2\xi_2^2 + a_{12}^2\xi_3^2 - 2a_{31}a_{12}\xi_2\xi_3 - 2a_{13}a_{23}\xi_3\xi_1 - 2a_{23}a_{13}\xi_1\xi_2 = 0$, die Coordinaten des Pols sind daher $x_1' = a_{23}(a_{23}\xi_1 - a_{31}\xi_2 - a_{12}\xi_3)$, $x_2' = a_{31}(a_{31}\xi_2 - a_{12}\xi_3 - a_{23}\xi_1)$, $x_3' = a_{12}(a_{12}\xi_3 - a_{23}\xi_1 - a_{31}\xi_2)$. Man hat also $a_{31}x_3' + a_{12}x_2' = -2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_1$, $a_{12}x_1' + a_{23}x_3' = -2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_2$, $a_{23}x_2' + a_{13}x_1' = -2a_{23}a_{13}a_{12}\xi_3$ und findet wie im letzten Beispiel a_{23}, a_{13}, a_{12} respective proportional zu den Grössen $x_1'(\xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' - \xi_1 x_1')$, $x_2'(\xi_3 x_3' + \xi_1 x_1' - \xi_2 x_2')$, $x_3'(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' - \xi_3 x_3')$. Da nun die Bedingung, unter welcher ein dem Fundamentaldreieck $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ umgeschriebener Kegelschnitt durch einen vierten Punkt x_1', x_2', x_3' hindurchgeht, durch $\frac{a_{23}}{x_1'} + \frac{a_{13}}{x_2'} + \frac{a_{12}}{x_3'} = 0$ dargestellt ist, so ist der Ort des Poles von $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf einen durch solche vier Punkte gehenden Kegelschnitt von der Gleichung

$$\frac{x_1}{x_1'}(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1) + \frac{x_2}{x_2'}(\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2) + \frac{x_3}{x_3'}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3) = 0.$$

Für den Ort des Centrums ergiebt sich daraus ein durch die Seitenmittelpunkte des Fundamentaldreiecks gehender Kegelschnitt.

Die Bedingung, unter welcher der Kegelschnitt die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ berührt, ist $(a_1 a_{23})^{\frac{1}{2}} + (a_2 a_{13})^{\frac{1}{2}} + (a_3 a_{12})^{\frac{1}{2}} = 0$ und der Ort des Pols der Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ in Bezug auf einen durch die drei Fundamentalpunkte gehenden und eine gerade Linie berührenden Kegelschnitt ist

$$\{a_1 x_1(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 - \xi_1 x_1)\}^{\frac{1}{2}} + \{a_2 x_2(\xi_3 x_3 + \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)\}^{\frac{1}{2}} + \{a_3 x_3(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3)\}^{\frac{1}{2}} = 0;$$

d. h. dieser Ort ist im Allgemeinen eine Curve vom vierten Grade.

325. Man kann aber auch rein analytisch den Nachweis des Ausnahmefalles führen, in welchem eine Curve zweiter Ordnung nicht von der zweiten Klasse ist, und den Charakter desselben erkennen. Er entspringt aus der Frage: Wenn ist die Polare eines Punktes unbestimmt oder wenn hat ein Pol unendlich viele Polaren? Die Unbestimmtheit des Pols ist offenbar an die Bedingung $\Delta=0$ geknüpft und diese zieht die Bedingungsgleichungen $0 = A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3$, $0 = A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3$, $0 = A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3$ nach sich, die nicht mehr zur Berechnung der x' dienen können, wie im vorigen Artikel, sondern von der Polare erfüllt werden müssen, damit ihr unendlich viele Puncte als Pole entsprechen. Nach Art. 76 sind aber, wenn $\Delta = 0$ als das Resultat der Elimination von drei unbekannten Grössen z_1, z_2, z_3 zwischen drei linearen Gleichungen $a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 = 0$, etc. angesehen wird, die Verhältnisse der Werthe dieser Grössen $z_1 : z_2 : z_3$ durch jede der Gruppen $A_{11}:A_{12}:A_{13}$, $A_{21}:A_{22}:A_{23}$, $A_{31}:A_{32}:A_{33}$ ausgedrückt, d. h. man

hat auch $z_1^2 : z_1z_2 : z_1z_3 = A_{11} : A_{12} : A_{13}$, $z_1z_2 : z_2^2 : z_2z_3 = A_{21} : A_{22} : A_{23}$ $z_1z_3 : z_2z_3 : z_3^2 = A_{31} : A_{32} : A_{33}$ und es sind somit für $\Delta = 0$ die Unterdeterminanten von Δ den Quadraten und Producten von drei Grössen proportional. Substituirt man diese Werthe in die obigen Bedingungsgleichungen, so ist $0 = z_1(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)$ $= z_2(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3) = z_3(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)$ oder $a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 0$, d. h. nur solche gerade Linien sind als Polaren möglich, die durch den Punkt z gehen. Wenn aber die Werthe von z in die Gleichung des Kegelschnitts substituirt werden, so entsteht das Polynom

$$a_{11}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33} + 2a_{23}A_{23} + 2a_{31}A_{31} + 2a_{12}A_{12}$$

und sein Werth ist Null, weil es dem Dreifachen der Determinante Δ äquivalent ist. Daher ist z ein Punkt des betrachteten Kegelschnitts. Verbinden wir ihn aber mit einem beliebigen Punkte x desselben durch eine gerade Linie, so erweist sich dieselbe als ein Theil des Kegelschnitts, weil die Substitution $lz_1 + mx_1$, $lz_2 + mx_2$, $lz_3 + mx_3$ für x_1, x_2, x_3 in die Gleichung des Kegelschnitts die Gleichung $l^2S' + 2lmP + m^2S'' = 0$ hervorbringt, in der $S' = 0$ und $S'' = 0$ sind, weil z und x dem Kegelschnitt angehören. Somit besteht der betrachtete Kegelschnitt aus zwei geraden Linien, die sich im Punkte z schneiden; die Coordinaten dieses Punktes sind aus den Unterdeterminanten von Δ bestimmt. Jede Polare geht in diesem Falle durch z und hat unendlich viele Pole, die eine durch z gehende gerade Linie bilden.

Die Bestimmung der geraden Linien selbst, die den Kegelschnitt bilden, ergiebt sich wie folgt: Ist

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \equiv (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3),$$

so ist $a_{11} = a_1b_1$, $a_{22} = a_2b_2$, $a_{33} = a_3b_3$, $2a_{23} = a_2b_3 + a_3b_2$, $2a_{31} = a_3b_1 + a_1b_3$, $2a_{12} = a_1b_2 + a_2b_1$; nachdem aber vorher die Grössen z so bestimmt sind, dass $z_1z_2 = mA_{12}$, etc. oder die Gleichungen

$$a_2b_3 - a_3b_2 = 2mz_1,\quad a_3b_1 - a_1b_3 = 2mz_2,\quad a_1b_2 - a_2b_1 = 2mz_3$$

bestehen, so ergiebt sich $m^2 = 1$ und also das System der Bestimmungsgleichungen für die a, b

$$\begin{array}{lll} a_1b_1 = a_{11}, & a_2b_1 = a_{12} - z_3, & a_3b_1 = a_{13} + z_2, \\ a_1b_2 = a_{12} + z_3, & a_2b_2 = a_{22}, & a_3b_2 = a_{23} - z_1 \\ a_1b_3 = a_{13} - z_2, & a_2b_3 = a_{23} + z_1, & a_3b_3 = a_{33}. \end{array}$$

Ganz derselbe Gang der Untersuchung beleuchtet den Ausnahme-

fall der Curven zweiter Klasse mit zwei Punkten; ein Punkt kann nur Pol sein, wenn er in der geraden Verbindungslinie der beiden Punkte liegt, die den Kegelschnitt bilden und seine Polare ist unbestimmt, ihre verschiedenen Lagen umhüllen einen Punkt in derselben geraden Linie.

326. Wenn x'' irgend ein Punkt in einer der von einem festen Punkte x' an eine Curve zweiten Grades gezogenen Tangenten ist, so schneidet die gerade Verbindungslinie der Punkte x' und x'' diese Curve in zwei zusammenfallenden Punkten und die Gleichung des Artikel 321 zur Bestimmung von $l:m$ für die Punkte, in denen jene Gerade die Curve schneidet, hat nothwendig gleiche Wurzeln. Um also die Gleichung der Tangenten zu finden, welche durch den Punkt x' gezogen werden können, substituiren wir $lx_1 + mx_1'$, $lx_2 + mx_2'$, $lx_3 + mx_3'$ in die Gleichung der Curve und bilden die Bedingung, unter welcher die resultirende Gleichung in $l:m$ gleiche Wurzeln hat. So erhält man (vergl. Art. 110) die Gleichung des Tangentenpaars an einen Kegelschnitt in der Form $SS' = P^2$, wo $S \equiv a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2$,

$$S' \equiv a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2',$$
$$P \equiv a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1'x_2 + x_1x_2') \text{ ist.}$$

Diese Gleichung kann in einer andern Form geschrieben werden, in Folge der Bemerkung, dass jeder Punkt in einer durch x' gehenden Tangente offenbar die Eigenschaft besitzt, dass die ihn mit x' verbindende Gerade die Curve berührt; denn wir haben nur die Bedingung auszudrücken, unter welcher die Verbindungslinie von zwei Punkten (Art. 65)

$$x_1(x_2'x_3'' - x_2''x_3') + x_2(x_3'x_1'' - x_3''x_1') + x_3(x_1'x_2'' - x_1''x_2') = 0$$

die Curve berührt und darnach x_1'', x_2'', x_3'' als die Veränderlichen zu betrachten, um die Gleichung der Tangenten zu erhalten. In andern Worten, wir haben $x_2x_3' - x_2'x_3$, $x_3x_1' - x_3'x_1$, $x_1x_2' - x_1'x_2$ für ξ_1, ξ_2, ξ_3 in die Bedingungsgleichung des Art. 316

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{13}\xi_3\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0$$

zu substituiren. Unter Beachtung der an demselben Orte gegebenen Werthe von A_{11}, A_{22}, etc. bestätigt man leicht die folgende Relation

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots)(a_{11}x_1'^2 + \ldots) - (a_{11}x_1x_1' + \ldots)^2 = A_{11}(x_2x_3' - x_2'x_3)^2 + \ldots$$

Aufg. Man soll zeigen, dass die Discriminante der Gleichung $SS' = P^2$ verschwindet. Wenn man $a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = A_1$, $a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = A_2$, $a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' = A_3$ setzt, so ist die Determinante der Gleichung

$$S(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2') - \{A_1x_1' + A_2x_2' + A_3x_3'\}^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} Sa_{11} - A_1^2, & Sa_{12} - A_1A_2, & Sa_{13} - A_1A_3 \\ Sa_{21} - A_1A_2, & Sa_{22} - A_2^2, & Sa_{23} - A_2A_3 \\ Sa_{31} - A_1A_3, & Sa_{32} - A_2A_3, & Sa_{33} - A_3^2 \end{vmatrix}$$ und ist in acht andere Determinanten zerlegbar, von denen vier Null sind, weil sie gleiche Verticalreihen haben. Die übrigen vier sind von den Werthen $= S^3\Delta -$

$$S^2A_1\begin{vmatrix} A_1, a_{12}, a_{13} \\ A_2, a_{22}, a_{23} \\ A_3, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} - S^2A_2\begin{vmatrix} A_1, a_{11}, a_{13} \\ A_2, a_{21}, a_{23} \\ A_3, a_{31}, a_{33} \end{vmatrix} - S^2A_3\begin{vmatrix} A_1, a_{11}, a_{12} \\ A_2, a_{21}, a_{22} \\ A_3, a_{31}, a_{32} \end{vmatrix};$$

setzt man in ihnen die Werthe von A_1, A_2, A_3 ein und multiplicirt in den zwei letzten Verticalreihen mit x_1, x_2, x_3, so erkennt man als die Werthe der Determinanten die negativen Producte $S^2\Delta(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3)$: da endlich hier die Parenthese mit S identisch ist, so ist der Gesammtwerth der Determinante $= S^3(\Delta - \Delta)$, d. h. gleich Null, wie es sein muss.

327. Als ein specieller Fall des Vorigen ergiebt sich, dass die von den Endpunkten $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; $x_3 = 0$, $x_1 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ respective ausgehenden Tangentenpaare des durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitts durch die Gleichungen

$A_{22}x_3^2 + A_{33}x_2^2 - 2A_{23}x_2x_3 = 0$, $A_{33}x_1^2 + A_{11}x_3^2 - 2A_{13}x_1x_3 = 0$, $A_{11}x_2^2 + A_{22}x_1^2 - 2A_{12}x_1x_2 = 0$ dargestellt werden; wie diess auch daraus erkannt werden konnte, dass man die allgemeine Gleichung in die Form

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + (A_{33}x_2^2 + A_{12}x_3^2 - 2A_{23}x_2x_3) = 0$$

bringen kann. Wenn nun das durch den Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehende Tangentenpaar durch die Gleichungen $x_2 - kx_3 = 0$, $x_2 - k'x_3 = 0$ ausgedrückt wird, so zeigen diese Gleichungen, dass die Relation $kk' = \frac{A_{22}}{A_{33}}$ besteht (vergl. Art. 320, Aufg.), und dass die entsprechenden Grössen für die übrigen beiden Tangentenpaare durch $\frac{A_{33}}{A_{11}}$, $\frac{A_{11}}{A_{22}}$ gegeben sind; das Product dieser drei Grössen ist aber gleich Eins. Indem wir an die Bedeutung von k (Art. 54) erinnern, lernen wir daher, dass für A_1, D_3, A_2, D_1, A_3, D_2 als die Ecken eines dem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechsseits (A_1, A_2, A_3 sind die Ecken des Fundamentaldreiecks, D_3, D_1, D_2 die von den aus A_1, A_2; A_2, A_3; A_3, A_1 respective ausgehenden Tangenten gebildeten Ecken) die charakteristische Relation besteht

$$\frac{\sin D_2A_1A_2}{\sin D_2A_1A_3}\frac{\sin D_3A_1A_2}{\sin D_3A_1A_3}\frac{\sin D_3A_2A_3}{\sin D_3A_2A_1}\frac{\sin D_1A_2A_3}{\sin D_1A_2A_1}\frac{\sin D_1A_3A_1}{\sin D_1A_3A_2}\frac{\sin D_2A_3A_1}{\sin D_2A_3A_2}=1.$$

Und drei Paare von geraden Linien berühren den nämlichen Kegelschnitt, wenn ihre Gleichungen in die Form

$$z_2^2+z_3^2+2a_{23}'z_2z_3=0,\quad z_3^2+z_1^2+2a_{13}'z_3z_1=0,$$
$$z_1^2+z_2^2+2a_{12}'z_1z_2=0$$

gebracht werden können, wo z_1, z_2, z_3 lineare Functionen der Coordinaten vertreten; denn die vorher gefundenen Gleichungen der drei Tangentenpaare gehen in diese Form über, wenn man die Substitution $(A_{11}\,z_1)^{\frac{1}{2}}$ für x_1, etc. vollzieht.

Wenn dieselben Entwickelungen nach dem Coordinatensystem der ξ statt der x interpretirt werden, so liefern sie ein Kennzeichen für die Lage von sechs Punkten in einem Kegelschnitt, das Theorem von Carnot, welches die Relation

$$\frac{A_2B_1\,.\,A_2B_1'}{A_3B_1\,.\,A_3B_1'}\cdot\frac{A_3B_2\,.\,A_3B_2'}{A_1B_2\,.\,A_1B_2'}\cdot\frac{A_1B_3\,.\,A_1B_3'}{A_2B_3\,.\,A_2B_3'}=1$$

ausdrückt, wenn wieder A_1, A_2, A_3 die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks und (vergl. Art. 320, Aufg.) B_1, B_1'; B_2, B_2'; B_3, B_3' respective die Paare von Schnittpunkten bezeichnen, welche die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 desselben mit dem Kegelschnitt gemein haben.

Aufg. 1. Diesen Sätzen entsprechen mehrere bemerkenswerthe specielle Fälle. Wenn von den Ecken des Fundamentaldreiecks im ersten eine (etwa A_3) dem Kegelschnitt angehört, so fallen die beiden von ihr ausgehenden Tangenten A_3D_1 und A_3D_2 in eine zusammen und man erhält

$$\frac{\sin D_2A_1A_2}{\sin D_2A_1A_3}\frac{\sin D_3A_1A_2}{\sin D_3A_1A_3}\frac{\sin D_3A_2A_3}{\sin D_3A_2A_1}\frac{\sin D_1A_2A_3}{\sin D_1A_2A_1}\frac{\sin^2 D_1A_3A_1}{\sin^2 D_1A_3A_2}=1;$$

eine Gleichung, welche zu vier Tangenten A_1D_3, A_1D_2, A_2D_3, A_2D_1 und dem Punkte A_3 durch die Werthe des Verhältnisses $\frac{\sin D_1A_3A_1}{\sin D_1A_3A_2}$ die Richtung der Tangente in diesem Punkte bestimmt. Wenn ebenso von den Seiten des Fundamentaldreiecks im zweiten Satze eine (etwa A_1A_2) den Kegelschnitt berührt, so dass ihre Schnittpunkte B_3, B_3' zusammenfallen, so erhält man $\frac{A_2B_1}{A_3B_1}\frac{A_2B_1'}{A_3B_1'}\frac{A_3B_2}{A_1B_2}\frac{A_3B_2'}{A_1B_2'}\frac{\overline{A_1B_3}^2}{\overline{A_2B_3}^2}=1$ und damit durch die Bestimmung des Verhältnisses $A_1B_3:A_2B_3$ die Bestimmung des Berührungspunktes einer gegebenen Geraden mit einem durch vier Punkte gehenden Kegelschnitt. Jeder dieser Fragen entsprechen zwei Lösungen und die harmonische Lage derselben zu gegebenen Elementen ist offenbar. Lässt man die Ecken des Fundamentaldreiecks auf dem Kegelschnitt liegen, oder seine Seiten ihn berühren, so kommt man auf bekannte Sätze zurück. Wenn einer der Punkte A_1, A_2, A_3 unendlich entfernt gedacht wird, z. B. A_2, so liefert das Theorem von Carnot gleichfalls bekannte Sätze, nämlich

$\frac{A_1 B_3}{A_1 B_2} \frac{A_1 B_3'}{A_1 B_2'} = \frac{A_3 B_1}{A_3 B_2} \frac{A_3 B_1'}{A_3 B_2'}$, woraus die Sätze des Art. 111 hervorgehen; der anderen Relation entspringen dualistisch entsprechende Sätze.

Aufg. 2. Das Theorem von Carnot liefert auch eine Lösung der Aufgabe, den Krümmungskreis in einem Punkte eines Kegelschnitts zu bestimmen, wenn die Tangente in diesem Punkte und drei andere Punkte desselben bekannt sind. Wenn B_2, B_2' und B_3' drei unendlich nahe und B_1, B_1', B_3 drei andere Punkte des Kegelschnitts sind, so ist für den Durchschnitt K des durch B_2, B_2', B_3' gehenden Kreises mit der Geraden $A_1 A_2$ einerseits $A_1 B_3' . A_1 K = A_1 B_2' . A_1 B_2$, also $A_1 K = \frac{A_1 B_2 . A_1 B_2'}{A_1 B_3'}$ und nach dem Satze von Carnot also

$$A_1 K = A_1 B_3 . \frac{A_2 B_1 . A_2 B_1'}{A_3 B_1 . A_3 B_1'} . \frac{A_3 B_2 . A_3 B_2'}{A_2 B_3 . A_2 B_3'},$$

d. i. nach dem Zusammenfallen von B_2, B_2', B_3', wobei A_1 und B_3' auf der Curve zusammenfallen und $B_2 B_2'$ die zugehörige Tangente giebt,

$$A_1 K = A_1 B_3 . \frac{A_2 B_1 . A_2 B_1'}{A_3 B_1 . A_3 B_1'} \frac{A_3 A_1^2}{A_2 A_1 . A_2 B_3}.$$

Der so gefundene Punkt K bestimmt den Krümmungskreis. Ist der Punkt A_3 unendlich entfernt, so reducirt sich diess auf $A_1 K = A_1 B_3 . \frac{A_2 B_1 . A_2 B_1'}{A_2 A_1 . A_2 B_3}$ und wenn überdiess A_2, der Durchschnitt der Sehnen $A_1 B_3$, $B_1 B_1'$, die Mitte von beiden ist, so wird $A_1 K = 2 . \frac{\overline{A_2 B_1}^2}{A_2 A_1}$. Für R als den Halbmesser des Kreises und $A_1 D$ als seinen zur Tangente in A_1 rechtwinkligen Durchmesser hat man $A_1 K = 2R . \cos K A_1 D$, d. h. $R = \frac{\overline{A_2 B_1}^2}{p}$, wenn p die senkrechte Entfernung des Punktes A_2 von der Tangente in A_1 ist.

Aufg. 3. Die Vereinigung beider Sätze dieses Art. giebt ferner den Satz: Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einen Kegelschnitt schneiden, so sind die sechs Geraden, welche die Schnittpunkte mit den respectiven Gegenecken verbinden, Tangenten eines Kegelschnitts. Darin liegt als ein sehr specieller Fall der Satz: Die geraden Linien, welche von zwei festen Punkten nach den Ecken eines Dreiecks gezogen werden können, schneiden die respectiven Gegenseiten desselben in sechs Punkten eines Kegelschnitts.

Aufg. 4. Drei Paare von Punkten auf den Diagonalen und der Verbindungslinie der Gegenseitenschnittpunkte eines Vierecks $ABCD$, welche zu den bezüglichen Endpunkten conjugirt harmonisch liegen, sind sechs Punkte eines Kegelschnitts. (Aufg. 1, Art. 303.)

Wir denken das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ als das von den Diagonalen AC, BD und der Verbindungslinie der Gegenseitenschnittpunkte EF gebildete Dreieck und die Punktepaare B_1, B_1'; B_2, B_2' und B_3, B_3' als die auf den Geraden EF, BD, AC respective gewählten conjugirt harmonischen Paare; dann sind A_1, A_2; B_3, B_3' Paare einer Involution von den Doppelpunkten AC; ebenso A_2, A_3; B_1, B_1' und A_3, A_1; B_2, B_2' respective Paare von Involutionen mit den Doppelpunkten E, F und B, D; daher

gelten die drei Relationen

$$\frac{A_1B_3 \,.\, A_1B_3'}{A_2B_3 \,.\, A_2B_3'} = \frac{\overline{A_1C}^2}{\overline{A_2C}^2}, \quad \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'} = \frac{\overline{A_2E}^2}{\overline{A_3E}^2}, \quad \frac{A_3B_2 \,.\, A_3B_2'}{A_1B_2 \,.\, A_1B_2'} = \frac{\overline{A_3D}^2}{\overline{A_1D}^2}$$

und ihre Multiplication liefert

$$\frac{A_1B_3 \,.\, A_1B_3'}{A_2B_3 \,.\, A_2B_3'} \frac{A_2B_1 \,.\, A_2B_1'}{A_3B_1 \,.\, A_3B_1'} \frac{A_3B_2 \,.\, A_3B_2'}{A_1B_2 \,.\, A_1B_2'} = \left\{\frac{A_1C}{A_2C} \,.\, \frac{A_2E}{A_3E} \,.\, \frac{A_3D}{A_1D}\right\}^2;$$

und da hier die rechte Seite den Werth 1 hat, weil CDE Punkte in einer Geraden auf den Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind, so liegen die Punkte $B_1, B_1', B_2, B_2', B_3, B_3'$ nach dem Satze von Carnot auf einem Kegelschnitt.

328. Wenn wir die Gleichungen der geraden Linien zu bilden wünschen, welche irgend einen gegebenen Punkt x' mit den Durchschnittspunkten von zwei Curven verbinden, so haben wir für x_1, x_2, x_3 in beide Gleichungen respective $lx_1 + mx_1'$, $lx_2 + mx_2'$, $lx_3 + mx_3'$ zu substituiren und zwischen den resultirenden Gleichungen das Verhältniss $l:m$ zu eliminiren. Denn jeder Punkt in einer der fraglichen geraden Linien besitzt die Eigenschaft, dass die ihn mit dem Punkte x' verbindende Gerade beide Curven in dem nämlichen Punkte schneidet, so dass die Gleichungen, welche die Schnittpunkte dieser geraden Linie mit den Curven bestimmen, eine gemeinschaftliche Wurzel haben müssen; in Folge dessen muss die Resultante der Elimination zwischen beiden gleich Null sein.

So wird die Gleichung des Paars von Geraden, welche den Punkt x' mit den Durchschnittspunkten der geraden Linie $L=0$ und des Kegelschnitts $S=0$ verbinden, aus $lL + mL' = 0$ und $l^2S + 2lmP + m^2S' = 0$ in der Form $L'^2S - 2LL'P + L^2S' = 0$ erhalten. Liegt der Punkt x' in der Curve, so reducirt sich diese Gleichung auf die Form $L'S - 2LP = 0$.

Beispiel. Eine Sehne, welche an einem gegebenen Punkte der Curve einen rechten Winkel spannt, geht durch einen festen Punkt. (Aufg. 2, Art. 189.)

Wir gebrauchen rechtwinklige Coordinaten und bilden wie oben die Gleichung der Verbindungslinien des gegebenen Punktes mit den Durchschnittspunkten des Kegelschnitts mit den Geraden $\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 = 0$. Diese Geraden sind rechtwinklig zu einander, wenn die Summe der Quadrate der Coefficienten von x^2 und y^2 verschwindet; daraus entspringt die Bedingung $(\xi_1 x' + \xi_2 y' + \xi_3)(a_{11} + a_{22}) = 2(a_{11}\xi_1 x' + a_{22}\xi_2 y')$. Und da ξ_1, ξ_2, ξ_3 im ersten Grade in dieselbe eingehen, so geht die Sehne immer durch einen festen Punkt; nämlich durch den Punkt von den Coordinaten $\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} x'$, $\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}} y'$. Wenn der erstere Punkt die Curve durchläuft, so beschreibt der zweite Punkt einen Kegelschnitt.

Wenn der an dem gegebenen Punkt gespannte Winkel kein rechter ist, oder wenn der gegebene Punkt nicht in der Curve liegt, so enthält die in diesem Artikel gefundene Bedingung die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 im zweiten Grade und die Sehne wird einen Kegelschnitt umhüllen.

329. Da die Gleichung der Polare eines Punktes die Coefficienten der Gleichung im ersten Grade enthält, so geht eine unbestimmte Grösse, welche im ersten Grade in der Gleichung eines Kegelschnitts enthalten ist, auch im ersten Grade in die Gleichung der Polare ein. Wenn also $P = 0$ und $P' = 0$ die Gleichungen der Polaren eines Punktes in Bezug auf zwei Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ sind, so ist die Polare desselben Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt des Systems $S + kS' = 0$ durch $P + kP' = 0$ dargestellt. Denn es ist

$$(a_{11} + k a_{11}')x_1 x_1' + \text{etc.} = a_{11} x_1 x_1' + \ldots + k\{a_{11}' x_1 x_1' + \ldots\}.$$

Man hat damit auf analytischem Wege den Satz: Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so geht die Polare eines gegebenen Punktes in Bezug auf ihn durch einen festen Punkt. (Aufg. 2, Art. 114.)

Wenn $Q = 0$ und $Q' = 0$ die Polaren eines andern Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ darstellen, so ist die Polare dieses zweiten Punktes in Bezug auf $S + kS' = 0$ von der Gleichung $Q + kQ' = 0$. Wir erkennen damit auf Grund des Art. 59, dass die Polaren von zwei Punkten in Bezug auf die Kegelschnitte eines durch vier Punkte gehenden Systems zwei Büschel von gleichem Doppelverhältniss, d. i. zwei projectivische Büschel bilden. Ebenso liegen die Pole einer Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines von vier Geraden berührten Systems in einer geraden Linie und die Pole von zwei Geraden in Bezug auf ein solches System bilden zwei projectivische Reihen von Punkten.

Wir erinnern dabei an die Erzeugung der Kegelschnitte vermittelst projectivischer Büschel und Reihen, wie sie im Art. 293 entwickelt worden ist. Da der Durchschnittspunkt der Strahlen $P + kP' = 0$, $Q + kQ' = 0$ der in Bezug auf $S + kS' = 0$ genommene Pol der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ist, so erkennen wir, dass der Ort des Pols einer gegebenen Geraden in Bezug auf alle die durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ein Kegelschnitt ist. (Vergl. Aufg. 1, Art. 309.)

Wenn eine unbestimmte Grösse im zweiten Grade in der Gleichung eines Kegelschnitts auftritt, so muss sie auch in demselben Grade in die Gleichung der Polare irgend eines Punktes in Bezug auf denselben eingehen; diese wird dann einen Kegelschnitt umhüllen, wenn jene veränderlich gedacht wird.

Wenn z. B. ein Kegelschnitt mit zwei festen Kegelschnitten eine doppelte Berührung hat, so umhüllt die Polare eines festen Punktes einen von drei festen Kegelschnitten; denn die Gleichung jedes solchen Systems von Kegelschnitten enthält nach Art. 317, Aufg. 2 die Grösse μ im zweiten Grade.

Beisp. 1. Ein Punkt bewegt sich längs einer geraden Linie; man soll den Ort des Durchschnitts seiner Polaren in Bezug auf zwei feste Kegelschnitte finden.

Wenn die Polaren der in der gegebenen Geraden willkürlich gewählten Punkte x', x'' in Bezug auf beide Kegelschnitte durch $P'=0$, $P''=0$, $Q'=0$, $Q''=0$ dargestellt sind, so wird durch $\lambda x_1'+\mu x_1''$, $\lambda x_2'+\mu x_2''$, $\lambda x_3'+\mu x_3''$ ein beliebiger Punkt dieser Geraden und durch $\lambda P'+\mu P''=0$, $\lambda Q'+\mu Q''=0$ das Paar seiner Polaren ausgedrückt; sie durchschneiden sich in der Kegelschnittslinie $P'Q''=P''Q'$.

Beisp. 2. Das Doppelverhältniss von vier Punkten in einer geraden Linie ist gleich dem Doppelverhältniss ihrer vier Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt. Das Doppelverhältniss der Punkte $lx_1'+mx_1''$, $l'x_1'+m'x_1''$, $l''x_1'+m''x_1''$, $l'''x_1'+m'''x_1''$ ist identisch mit dem der vier Geraden $lP'+mP''=0$, $l'P'+m'P''=0$, $l''P'+m''P''=0$, $l'''P'+m'''P''=0$.

Beisp. 3. Man soll die Gleichung des Paars von Tangenten eines Kegelschnitts $S=0$ in den Punkten finden, welche er mit der geraden Linie $x_3=0$ gemein hat.

Die Gleichung der Polare irgend eines Punktes von $x_3=0$ ist nach Art. 322 $x_1'S_1+x_2'S_2=0$. Die Durchschnittspunkte von $x_3=0$ mit der Curve erhält man durch die Substitution in die allgemeine Gleichung in der Gleichung $a_{11}x_1'^2+2a_{12}x_1'x_2'+a_{22}x_2'^2=0$ ausgedrückt. Die Elimination von x_1', x_2' zwischen diesen beiden Gleichungen liefert als Gleichung des Tangentenpaars $a_{11}S_2^2-2a_{12}S_1S_2+a_{22}S_1^2=0$. Die Gleichung der Asymptoten eines durch die allgemeine Gleichung in Cartesischen Coordinaten gegebenen Kegelschnitts ist hiernach

$a_{11}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)+a_{22}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0$; denn die Asymptoten die Tangenten der Curve in den Punkten, in denen sie von der unendlich entfernten Geraden $z=0$ geschnitten wird.

Beisp. 4. Wenn ein Kegelschnitt drei feste Punkte enthält und die eine seiner Asymptoten durch einen festen Punkt geht, so umhüllt

die andere einen Kegelschnitt, der dem Dreieck der festen Punkte eingeschrieben ist.

Sind $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ die Asymptoten und ist $s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0$ die unendlich entfernte Gerade, so ist die Gleichung des Kegelschnitts $t_1 t_2 = (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)^2$. Da derselbe durch die Punkte $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$ geht, so darf seine Gleichung die Glieder x_1^2, x_2^2, x_3^2 nicht enthalten; ist also t_1 von der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, so ist t_2 von der Form $\frac{s_1^2}{a_1} x_1 + \frac{s_2^2}{a_2} x_2 + \frac{s_3^2}{a_3} x_3$ und wenn also $t_2 = 0$ durch den Punkt x' hindurchgeht, so berührt nach Art. 316, Aufg. 1 die andere Linie $t_1 = 0$ den Kegelschnitt $s_1 (x_1 x_1')^{\frac{1}{2}} + s_2 (x_2 x_2')^{\frac{1}{2}} + s_3 (x_3 x_3')^{\frac{1}{2}} = 0$. Dasselbe Argument beweist, dass wenn ein Kegelschnitt durch drei feste Punkte geht und wenn eine seiner Durchschnittssehnen mit einem durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ hat, der anderen die Gleichung $\frac{s_1}{a_1} x_1 + \frac{s_2}{a_2} x_2 + \frac{s_3}{a_3} x_3 = 0$ entspricht.

Beisp. 5. Wenn in Bezug auf einen Kegelschnitt ein sich selbst conjugirtes Dreieck gegeben ist und eine seiner Durchschnittssehnen mit dem durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt durch einen festen Punkt geht, so umhüllt die andere einen Kegelschnitt.

Da nun die Glieder $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$ in der Gleichung des gegebenen Kegelschnitts fehlen, so entspricht der Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ als der der einen Berührungssehne die der andern

$$a_1 x_1 (a_2 a_{13} + a_3 a_{12} - a_1 a_{23}) + a_2 x_2 (a_3 a_{12} + a_1 a_{23} - a_2 a_{13}) + a_3 x_3 (a_1 a_{23} + a_2 a_{13} - a_3 a_{12}) = 0.$$

Beisp. 6. Eine gemeinschaftliche Tangente der Kegelschnitte $U = 0$, $V = 0$ berühre sie in den Punkten A', A'' von den Coordinaten x', x''; man denke P', P'' als veränderliche Punkte beider Kegelschnitte (einer in einem) und bestimme den Ort des Punktes C, in welchem sich $A'P'$ und $A''P''$ durchschneiden, unter der Voraussetzung, dass $P'P''$ durch einen festen Punkt O in der gemeinschaftlichen Tangente geht.

Wenn $P = 0$, $Q = 0$ die Polaren der Punkte x', x'' in Bezug auf die Kegelschnitte $U = 0$, $V = 0$ respective bezeichnen, so ergeben sich nach Art. 321 aus den Coordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes C die des Punktes P', in welchem $A'C$ den Kegelschnitt zum zweitenmale schneidet, in der Form $U x_1' - 2 P x_1$, $U x_2' - 2 P x_2$, $U x_3' - 2 P x_3$ und die Coordinaten des Punktes P'' findet man ebenso in der Form $V x_1'' - 2 Q x_1$, etc. Wenn die gerade Verbindungslinie dieser Punkte durch den festen Punkt O geht, welchen wir als den Durchschnitt der Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ annehmen können, so muss $\frac{U x_1' - 2 P x_1}{U x_2' - 2 P x_2} = \frac{V x_1'' - 2 Q x_1}{V x_2'' - 2 Q x_2}$ sein; der fragliche Ort ist daher eine Curve vierter Ordnung, so lange die Punkte A', A'', O beliebig gewählt werden können. Müssen dieselben jedoch in einer geraden Linie liegen, so können wir diese als die Linie $x_1 = 0$ wählen und für $x_1' = x_1'' = 0$ wird die vorige Gleichung

durch x_1 theilbar und reducirt sich auf die Curve dritter Ordnung $PVx_2'' = QUx_2'$.

Wenn aber endlich die gegebenen Punkte die Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente sind, so repräsentiren $P = 0$ und $Q = 0$ dieselbe Gerade und es lässt sich die Gleichung durch einen weitern Factor dividiren, sie reducirt sich also auf die Form $U = kV$ und bezeichnet einen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte der gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht.

Beisp. 7. Man soll in einen durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt ein Dreieck einbeschreiben, dessen Seiten durch drei feste Punkte — die drei Fundamentalpunkte — gehen.

Wir schreiben wie vorher für die Grössen $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$ die Symbole S_1, S_2, S_3 und benutzen das Ergebniss des Art. 321, dass die Verbindungslinie des Punktes x der Curve mit dem Punkte x' ihrer Ebene einen Punkt von den Coordinaten $S'x_1 - 2P'x_1'$, $S'x_2 - 2P'x_2'$, $S'x_3 - 2P'x_3'$ ferner mit der Curve gemein hat. Wenn dann der Punkt x' der Durchschnittspunkt der Linien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ist, so können wir $x_1' = 1$, $x_2' = x_3' = 0$ setzen und erhalten $S' = a_{11}$, $P' = S_1$, so dass die Coordinaten des zweiten Schnittpunktes der Linie von x nach dem Fundamentalpunkt $x_2 = x_3 = 0$ die Werthe $a_{11}x_1 - 2S_1$, $a_{11}x_2$, $a_{11}x_3$ haben. Ebenso schneidet die Linie von x' nach dem Fundamentalpunkt $x_3 = x_1 = 0$ die Curve ferner in $a_{22}x_1$, $a_{22}x_2 - 2S_2$, $a_{22}x_3$. Die Verbindungslinie dieser zwei Punkte geht aber durch den Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, wenn $\frac{a_{11}x_1 - 2S_1}{a_{11}x_2} = \frac{a_{22}x_1}{a_{22}x_2 - 2S_2}$ oder $2S_1S_2 = a_{11}x_1S_2 + a_{22}x_2S_1$ ist. Diess ist die von den Coordinaten des Scheitels zu erfüllende Bedingung. Wenn man in ihr

$a_{11}x_1 = S_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$, $a_{22}x_2 = S_2 - a_{12}x_1 - a_{23}x_3$ setzt, so wird sie in $a_{12}(x_1S_1 + x_2S_2) + x_3(a_{23}S_1 + a_{13}S_2) = 0$ und da der Punkt x in der Curve, also $x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 = 0$ ist, in $x_3(a_{23}S_1 + a_{13}S_2 - a_{12}S_3) = 0$ übergeführt. Der Factor x_3 hat für die geometrische Lösung des Problems keinen Werth: denn obwohl jeder der Punkte, in denen $x_3 = 0$ die Curve schneidet, die von uns analytisch ausgedrückte Bedingung erfüllt, dass seine Verbindungslinien mit den beiden anliegenden Fundamentalpunkten die Curve ferner in Punkten schneiden, die mit dem gegenüberliegenden $x_1 = x_2 = 0$ in einer geraden Linie liegen, so entsprechen sie doch der Aufgabe insofern nicht, als diese Verbindungslinien zusammenfallen und daher nicht Seiten eines Dreiecks sein können. Die Spitze des gesuchten Dreiecks ist daher einer von den Punkten, in welchen die Curve durch die Gerade $a_{23}S_1 + a_{13}S_2 - a_{12}S_3 = 0$ geschnitten wird. Da man nun direct bestätigt, dass $a_{23}S_1 = a_{13}S_2 = a_{12}S_3$ die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ darstellen, so ist nach Aufg. 2, Art. 60 die Gerade $a_{23}S_1 + a_{13}S_2 - a_{12}S_3 = 0$ die nach der Construction des Art. 307, Aufg. 6 erhaltene.

Beisp. 8. Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einander haben, so wird jede Tangente des einen in ihrem Berührungspunkte, in der Berührungssehne beider Kegelschnitte und in den Schnittpunkten mit dem zweiten Kegelschnitt harmonisch getheilt. (Art. 302, Aufg. 7.)

Wenn wir in die Gleichung $S + R^2 = 0$ für x_1, x_2, x_3 die Werthe $lx_1' + mx_1''$, $lx_2' + mx_2''$, $lx_3' + mx_3''$ einsetzen, wo die Punkte x', x'' der Gleichung $S = 0$ genügen, so erhalten wir $(lR' + mR'')^2 + 2lm P = 0$. Wenn nun die Verbindungslinie von x' und x'' den Kegelschnitt $S + R^2 = 0$ berührt, so muss diese Gleichung ein vollständiges Quadrat sein, d. h. es muss $P = -2R'R''$ werden, so dass die Gleichung selbst in $(lR' - mR'')^2 = 0$ übergeht. Diese beweist aber das fragliche Theorem.

Beisp. 9. Welches ist die Gleichung des Kegelschnitts, welcher fünf gerade Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, $a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = 0$ berührt?

Sie ist $(a_{11}x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{22}x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{33}x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$, mit den Bedingungen $\frac{a_{11}}{a_1} + \frac{a_{22}}{a_2} + \frac{a_{33}}{a_3} = 0$, $\frac{a_{11}}{a_1'} + \frac{a_{22}}{a_2'} + \frac{a_{33}}{a_3'} = 0$ für a_{11}, a_{22}, a_{33}. In Folge dessen ist

$$a_{11} : a_{22} : a_{33} = \left(\frac{1}{a_2a_3'} - \frac{1}{a_2'a_3}\right) : \left(\frac{1}{a_3a_1'} - \frac{1}{a_3'a_1}\right) : \left(\frac{1}{a_1a_2'} - \frac{1}{a_1'a_2}\right).$$

Beisp. 10. Insbesondere ist die Gleichung des Kegelschnitts, der zu den Seiten des Fundamentaldreiecks noch die Linien $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ berührt, wegen $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$, $\frac{1}{2}a_{11} + a_{22} - a_{33} = 0$ und also $a_{11} : a_{22} : a_{33} = -4 : 3 : 1$ $2(-x_1)^{\frac{1}{2}} + (3x_2)^{\frac{1}{2}} + (x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$.

Beisp. 11. Man finde die Gleichung des Kegelschnitts, welcher die Seiten des Fundamentaldreiecks in ihren Mittelpunkten berührt.

Aufl. Sie ist $(s_1x_1)^{\frac{1}{2}} + (s_2x_2)^{\frac{1}{2}} + (s_3x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$.

Beisp. 12. Unter welcher Bedingung stellt die Gleichung $(a_{11}x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{22}x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{33}x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ eine Parabel dar?

Aufl. Wenn sie die gerade Linie in unendlicher Ferne berührt, d. h. wenn $\frac{a_{11}}{s_1} + \frac{a_{22}}{s_2} + \frac{a_{33}}{s_3} = 0$ ist.

Beisp. 13. Man soll den Ort des Brennpunktes einer Parabel bestimmen, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt.

Wenn der Punkt x' der eine Brennpunkt ist, somit die geraden Verbindungslinien desselben mit den Ecken des Fundamentaldreiecks $\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_2}{x_2'}$, $\frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_3}{x_3'}$, $\frac{x_3}{x_3'} = \frac{x_1}{x_1'}$ sind, so erhält man die geraden Verbindungslinien derselben Ecken mit dem andern Brennpunkte, als welche mit den Seiten des Dreiecks die nämlichen Winkel bilden (Art. 197 nach Art. 55 in den Gleichungen $x_1'x_1 = x_2'x_2$, $x_2'x_2 = x_3'x_3$, $x_3'x_3 = x_1'x_1$ und kann also für die Coordinaten des andern Brennpunktes die reciproken Werthe $\frac{1}{x_1'}$, $\frac{1}{x_2'}$, $\frac{1}{x_3'}$ nehmen. Wenn also die

Gleichung des Ortes gegeben ist, den der eine Brennpunkt durchläuft, so kann die Gleichung des Ortes daraus sogleich gebildet werden, den der zweite beschreibt; wenn also der eine in der unendlich entfernten Geraden $x_1'' \sin A_1 + x_2'' \sin A_2 + x_3'' \sin A_3 = 0$ bleibt, so durchläuft der andere den Kreis $\frac{\sin A_1}{x_1'} + \frac{\sin A_2}{x_2'} + \frac{\sin A_3}{x_3'} = 0$. Die Coordinaten des unendlich entfernten Brennpunktes der Parabel sind nach der Relation in Beisp. 12 durch $\frac{a_{11}}{\sin^2 A_1}, \frac{a_{22}}{\sin^2 A_2}, \frac{a_{33}}{\sin^2 A_3}$ dargestellt, weil diese Werthe den beiden Gleichungen $x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$, $(a_{11} x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_{22} x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_{33} x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ genügen; daher sind die Coordinaten des in endlicher Entfernung gelegenen Brennpunktes

$$\frac{\sin^2 A_1}{a_{11}}, \frac{\sin^2 A_2}{a_{22}}, \frac{\sin^2 A_3}{a_{33}}.$$

Beisp. 14. Man soll die Gleichung der Directrix dieser Parabel bilden.

Indem wir nach Art. 322 die Gleichung der Polare für den Punkt bilden, dessen Coordinaten wir eben geschrieben haben, finden wir

$$a_{11} x_1 (\sin^2 A_2 + \sin^2 A_3 - \sin^2 A_1) + a_{22} x_2 (\sin^2 A_3 + \sin^2 A_1 - \sin^2 A_2) + a_{33} x_3 (\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 - \sin^2 A_3) = 0 \quad \text{oder}$$

$$a_{11} x_1 \sin A_2 \sin A_3 \cos A_1 + a_{22} x_2 \sin A_3 \sin A_1 \cos A_2 + a_{33} x_3 \sin A_1 \sin A_2 \cos A_3 = 0.$$

Wenn man für a_{33} den aus Beisp. 12 entspringenden Werth substituirt, so wird diese Gleichung in

$$a_{11} \sin A_2 \sin A_1 (x_1 \cos A_1 - x_3 \cos A_3) + a_{22} \sin A_3 \sin A_1 (x_2 \cos A_2 - x_3 \cos A_3) = 0$$

übergeführt und zeigt, dass die Directrix stets durch den Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks geht. (Vergl. Aufg. 3, Art. 54; Aufg. 3, Art. 235.)

Beisp. 15. Welches ist der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte, die demselben Vierseit eingeschrieben sind?

Wenn wir die vier gemeinschaftlichen Tangenten durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ darstellen, so besteht zwischen diesen Grössen nothwendig die identische Relation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$, weil die Gleichung jeder Geraden mittelst der Gleichungen von drei andern ausdrückbar ist. Diese Relation muss nicht nur durch die Coordinaten des einen Brennpunktes x_1', x_2', x_3', x_4', sondern auch durch die des andern $\frac{1}{x_1'}, \frac{1}{x_2'}, \frac{1}{x_3'}, \frac{1}{x_4'}$ erfüllt werden. Der fragliche Ort ist daher eine Curve dritter Ordnung von der Gleichung $\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4} = 0$. vergl. Art. 310 Aufg. 8

330. Im Art. 321 ist das Paar der Durchschnittspunkte eines Kegelschnitts mit der geraden Verbindungslinie von zwei Punkten x, x' bestimmt und in den folgenden Art. sind die Ergebnisse dieser Untersuchung entwickelt worden. Es bleibt übrig, dem eine Methode hinzuzufügen, wie man die Durchschnittspunkte einer durch die allgemeine Gleichung gegebenen geraden

Linie mit einem ebenso durch die allgemeine Gleichung bestimmten Kegelschnitt ermittele.

Benutzen wir die Bezeichnung des Art. 324

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = S_1, \text{ etc.}$$

so ist $S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3 = 0$ mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades identisch; die Combination dieser Gleichung mit der Gleichung der geraden Linie $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$ giebt für die Unbekannten die Verhältnisse

$$x_1 : x_2 : x_3 = (S_2\xi_3 - S_3\xi_2) : (S_3\xi_1 - S_1\xi_3) : (S_1\xi_2 - S_2\xi_1)$$

oder durch Einführung eines zunächst unbestimmten Factors θ

$$-\theta x_1 + S_3\xi_2 - S_2\xi_3 = 0, \quad -\theta x_2 + S_1\xi_3 - S_3\xi_1 = 0,$$
$$-\theta x_3 + S_2\xi_1 - S_1\xi_2 = 0,$$

d. h. in entwickelter Form durch Wiedereinführung der Werthe der S und nach den x geordnet

$$x_1(a_{13}\xi_2 - a_{12}\xi_3 - \theta) + x_2(a_{23}\xi_2 - a_{22}\xi_3) + x_3(a_{33}\xi_2 - a_{32}\xi_3) = 0,$$
$$x_1(a_{11}\xi_3 - a_{13}\xi_1) + x_2(a_{12}\xi_3 - a_{23}\xi_1 - \theta) + x_3(a_{13}\xi_3 - a_{33}\xi_1) = 0,$$
$$x_1(a_{12}\xi_1 - a_{11}\xi_2) + x_2(a_{22}\xi_1 - a_{12}\xi_2) + x_3(a_{23}\xi_1 - a_{13}\xi_2 - \theta) = 0.$$

Man bestimmt somit die Werthe der Coordinaten der Schnittpunkte aus drei linearen homogenen Gleichungen. Die Schreibart der allgemeinen Gleichung ersten Grades $\xi_1x_1 + \text{etc.} = 0$ erlaubt zugleich, durch die einfache Vertauschung der x mit den ξ und der a mit den α dieselben Gleichungen als Bestimmungsgleichungen der Coordinaten ξ der Tangenten, die von einem Punkte $\xi_1x_1 + \text{etc.} = 0$ an den durch die allgemeine Gleichung $\alpha_{11}\xi_1^2 + \text{etc.} = 0$ gegebenen Kegelschnitt gezogen werden können.

Es erübrigt nur, die Grösse θ direct zu bestimmen. Wenn man die Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = S_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = S_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = S_3$$

nach den x auflöst, so erhält man für Δ als die Discriminante des Kegelschnitts und A_{11}, A_{12}, etc. als ihre nach den Elementen a_{11}, a_{12}, etc. gebildeten Unterdeterminanten

$$A_{11}S_1 + A_{12}S_2 + A_{13}S_3 + \frac{\Delta}{\theta}(\xi_3S_2 - \xi_2S_3) = 0,$$

$$A_{12}S_1 + A_{22}S_2 + A_{23}S_3 + \frac{\Delta}{\theta}(\xi_1S_3 - \xi_3S_1) = 0,$$

$$A_{13}S_1 + A_{23}S_2 + A_{33}S_3 + \frac{\Delta}{\theta}(\xi_2S_1 - \xi_1S_2) = 0$$

und somit durch Elimination der S_1, S_2, S_3 die Relation

$$\begin{vmatrix} A_{11} & , A_{12}+\frac{\Delta\xi_3}{\theta}, & A_{13}-\frac{\Delta\xi_2}{\theta} \\ A_{12}-\frac{\Delta\xi_3}{\theta}, & A_{22} & , A_{23}+\frac{\Delta\xi_1}{\theta} \\ A_{13}+\frac{\Delta\xi_2}{\theta}, & A_{23}-\frac{\Delta\xi_1}{\theta}, & A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

aus welcher sich $\begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \xi_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ \xi_2, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ \xi_3, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \theta^2$ ergiebt oder

$$\theta^2+(A_{11}\xi_1^2+A_{22}\xi_2^2+A_{33}\xi_3^2+2A_{23}\xi_2\xi_3+2A_{31}\xi_1\xi_3+2A_{12}\xi_1\xi_2)=0.$$

Man erhält denselben Werth, wenn man zwischen den oben gefundenen Bestimmungsgleichungen für x_1, x_2, x_3 diese Grössen eliminirt, in der Form

$$-\theta\left\{\theta^2+(A_{11}\xi_1^2+\ldots+2A_{12}\xi_1\xi_2)\right\}=0.$$

Um die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einem Kegelschnitt zu finden, bildet man also die Determinante, deren Verschwinden die Berührung der geraden Linie mit dem Kegelschnitt bedingt und ermittelt die Quadratwurzel aus ihrem mit umgekehrtem Vorzeichen genommenen Werthe; die zwei Werthe derselben geben die Werthe der Coordinaten der Schnittpunkte mittelst der obigen drei linearen Gleichungen. Für $\theta=0$ geben sie die Coordinaten des Berührungspunktes.

Die speciellen Formen der allgemeinen Gleichung geben bequeme Beispiele zur Anwendung dieser allgemeinen Methode der Auflösung zweier homogenen Gleichungen vom ersten und zweiten Grade zwischen drei Veränderlichen.

331. Das System der Kegelschnitte, die mit zwei festen Kegelschnitten $S=0$, $S'=0$ die nämlichen Schnittpunkte haben, welches also eine Gleichung von der Form $kS+S'=0$ darstellt, enthält für jeden Punkt seiner Ebene einen durch ihn gehenden Kegelschnitt; wenn S_0 und S_0' die Resultate der Substitution seiner Coordinaten in die Polynome S und S' sind, so dass $kS_0+S_0'=0$ ist, so ergiebt sich die Gleichung dieses Kegelschnitts $SS_0'-S'S_0=0$. Ebenso gehört in dem System $k\Sigma+\Sigma'=0$, welches mit den festen Kegelschnitten $\Sigma=0$, $\Sigma'=0$ dieselben Tangenten gemein hat, zu jeder geraden Linie ein sie berührender Kegelschnitt.

Dagegen wird in jenem System jede gerade Linie $\xi_1 x_1+\ldots=0$

durch zwei Curven des Systems berührt, für welche die entsprechenden Parameter k durch die Substitution von $ka_{11} + b_{11}$, $ka_{12} + b_{12}$, etc. für a_{11}, a_{12}, etc. in die Determinante des Art. 324 gefunden werden, so dass man erhält

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+b_{11}, & ka_{12}+b_{12}, & ka_{13}+b_{13}, & \xi_1 \\ ka_{21}+b_{21}, & ka_{22}+b_{22}, & ka_{23}+b_{23}, & \xi_2 \\ ka_{31}+b_{31}, & ka_{32}+b_{32}, & ka_{33}+b_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1 \quad , & \xi_2 \quad , & \xi_3 \quad , & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ schreiben wir } \Omega = 0;$$

und diess ist eine in Bezug auf k quadratische Gleichung.

Ebenso gehen durch jeden Punkt $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ zwei Kegelschnitte des Systems $k\Sigma + \Sigma' = 0$.

Den Durchschnitt einer geraden Linie $a_1 x_1 + \ldots = 0$ mit den Curven des Systems $kS + S' = 0$ findet man durch Combination der drei Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0, \quad kS + S' = 0;$$

es ist also das Product der Gleichungen eines Paares

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+b_{11}, & ka_{12}+b_{12}, & ka_{13}+b_{13}, & a_1, & \xi_1 \\ ka_{21}+b_{21}, & ka_{22}+b_{22}, & ka_{23}+b_{23}, & a_2, & \xi_2 \\ ka_{31}+b_{31}, & ka_{32}+b_{32}, & ka_{33}+b_{33}, & a_3, & \xi_3 \\ a_1 \quad , & a_2 \quad , & a_3 \quad , & 0, & 0 \\ \xi_1 \quad , & \xi_2 \quad , & \xi_3 \quad , & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ eine Gleichung,}$$

die in k vom ersten Grade ist und die wir in der Form $kP + Q = 0$ schreiben können. Setzt man für k die aus $\Omega = 0$ bestimmten Werthe k_0, k_1 ein, so erhält der Ausdruck $kP + Q$ die respectiven Werthe a_0^2, a_1^2 und die Gleichung eines Paars ist daher allgemein

$$\begin{vmatrix} \lambda, & 1, & 0 \\ \lambda_0, & 1, & a_0^2 \\ \lambda_1, & 1, & a_1^2 \end{vmatrix} = a_0^2 (\lambda_1 - \lambda) - a_1^2 (\lambda_0 - \lambda);$$

oder die Paare der Schnittpunkte bilden eine Involution $a_0 \pm \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_1 - \lambda}\right)^{\frac{1}{2}} a_1 = 0$, welche die Berührungspunkte der geraden Linie mit den Kegelschnitten des Systems zu Doppelpunkten hat. (Art. 302.)

Ebenso bestimmt ein Punkt mit dem System $k\Sigma + \Sigma' = 0$ ein involutorisches Büschel von Tangentenpaaren, welches die ihm entsprechenden Tangenten der beiden durch ihn hindurchgehenden Kegelschnitte des Systems zu Doppelstrahlen hat.

Wenn insbesondere der eine der beiden festen Kegelschnitte in das System der beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte (Art. 318, Aufg. 2) degenerirt, so sind die ihm mit dem

andern festen Kegelschnitt gemeinschaftlichen Tangenten die vier geraden Linien, welche jene mit den Brennpunkten des Letzteren verbinden und nach Art. 310 haben dann alle Kegelschnitte des Systems $k\Sigma + \Sigma' = 0$ diese Brennpunkte gemein; man nennt ein solches System ein System von confocalen Kegelschnitten. Nach dem Vorigen sieht man, dass durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte dieses Systems gehen, während jede gerade Linie von einem derselben berührt wird; von jedem Punkte aus gehen an die Kegelschnitte des Systems Tangentenpaare, die ein involutorisches Büschel bilden und die Doppelstrahlen desselben, die mit jedem Paar entsprechender Strahlen, also auch mit den nach den imaginären Kreispunkten gehenden ein harmonisches System bilden, sind nach Art. 301 rechtwinklig zu einander. Da sie die Tangenten der beiden durch den Punkt gehenden Kegelschnitte des Systems sind, so kann man sagen, dass diese sich rechtwinklig schneiden.

Aufg. 1. Man soll die Coordinaten des Berührungspunktes einer geraden Linie $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ mit dem System $kS + S' = 0$ bestimmen.

Ordnet man die Determinante Ω nach den Elementen der Reihe der a und bezeichnet die entsprechenden Unterdeterminanten durch Ω_1, Ω_2, Ω_3, so hat man für die Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Relationen $\mu x_1 = \Omega_1$, $\mu x_2 = \Omega_2$, $\mu x_3 = \Omega_3$.

Aufg. 2. Wenn eine gerade Linie $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ eine Curve n^{ter} Classe $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ umhüllt, so beschreiben die Berührungspunkte des Systems der Kegelschnitte mit der geraden Linie eine Curve, deren Gleichung gebildet wird, wenn man zwischen den Gleichungen $f(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 0$ und $kS + S' = 0$ den Parameter k eliminirt. Sie ist von der Ordnung $3n$ und hat in den Schnittpunkten des Systems und den Eckpunkten des gemeinschaftlichen selbstconjugirten Dreiecks $n$fache Punkte.

Aufg. 3. Die Tangenten der Curve des Systems $kS + S' = 0$ in ihren Schnittpunkten mit einer geraden Linie $a_1x_1 + \ldots = 0$ umhüllen eine Curve dritter Classe, welche die gegebene gerade Linie zur Doppeltangente hat.

Man bildet die Gleichung dieser Curve für $a_1x_1 + \ldots = 0$ als die Gleichung der Geraden und mit den Relationen $\mu\xi_1 = kS_1 + S_1'$, $\mu\xi_2 = kS_2 + S_2'$, $\mu\xi_3 = kS_3 + S_3'$ für $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$ als die Gleichung der Tangente, indem man in die durch Elimination zwischen den vorigen Relationen erhaltene Determinante $\begin{vmatrix} \xi_1, S_1, S_1' \\ \xi_2, S_2, S_2' \\ \xi_3, S_3, S_3' \end{vmatrix} = 0$ für die x die Werthe substituirt, welche aus der Gleichung der Tangente und der Gleichung der gegebenen Geraden gewonnen werden.

332. Die Bestimmung des Pols einer Geraden (Art. 324) führt zur Bestimmung der Bedingungen, unter welchen eine gerade Linie ein Durchmesser und unter denen zwei gerade Linien conjugirte Durchmesser sind, durch die Betrachtung der unendlich entfernten Punkte.

Wenn die gerade Linie $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ ein Durchmesser des Kegelschnitts ist, so liegt ihr Pol unendlich entfernt, oder sie selbst geht durch den Pol der unendlich entfernten geraden Linie und man hat die Relation

$$(A_{11} s_1 + A_{12} s_2 + A_{13} s_3) a_1 + (A_{21} s_1 + A_{22} s_2 + A_{23} s_3) a_2 + (A_{31} s_1 + A_{32} s_2 + A_{33} s_3) a_3 = 0.$$

Soll dagegen der zur geraden Linie $a_1 x_1 + \ldots = 0$ conjugirte Durchmesser gefunden werden, so betrachtet man die Tangente in einem Punkte y der Curve, d. h. $x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3 = 0$ als parallel der geraden Linie, so dass die Bedingung $\begin{vmatrix} s_1, s_2, s_3 \\ a_1, a_2, a_3 \\ S_1, S_2, S_3 \end{vmatrix} = 0$ besteht; werden dann die in den S_1, S_2, S_3 enthaltenen Veränderlichen als die laufenden Coordinaten angesehen, so ist diese Gleichung die Gleichung der durch die Berührungspunkte der parallelen Tangenten gehenden geraden Linie, d. i. die des zur gegebenen geraden Linie conjugirten Durchmessers; in entwickelter Form

$$x_1 \begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{32} \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Vergleicht man diese Relation mit der Gleichung einer zweiten geraden Linie $a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$, so geht die Bedingung dafür, dass diese der zum vorhergehenden conjugirte Durchmesser sei, in Form der Determinante $\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_1 \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_2 \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_3 \\ a_1, a_2, a_3, 0 \end{vmatrix} = 0$ oder

$$A_{11} a_1 a_1' + A_{22} a_2 a_2' + A_{33} a_3 a_3' + A_{23} (a_2 a_3' + a_2' a_3) + A_{31} (a_3 a_1' + a_3' a_1) + A_{12} (a_1 a_2' + a_1' a_2) = 0$$ hervor.

Wenn man die allgemeine Theorie, so weit sich die Interpretation auf Punktcoordinaten bezieht, auf den speciellen Fall Cartesischer Coordinaten einschränkt, als in welchem nach Art. 69 eine Seite des Fundamentaldreiecks unendlich entfernt und daher

$x_3 = 1$ zu setzen ist, so ergiebt sich aus der Untersuchung der Pole und Polaren der Fundamentallinien und Punkte die Theorie der conjugirten Durchmesser und die Bestimmung des Mittelpunktes.

Der Mittelpunkt ist der Pol der unendlich fernen Geraden, und da dieser die Coordinaten 0, 0 entsprechen (Art. 68), so sind die Coordinaten x_0, y_0 des Centrums durch $a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$, $a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$ bestimmt, aus denen $a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = \frac{\Delta}{A_{33}}$ hervorgeht; dieser Bruch ist zugleich der Werth der linken Seite der Kegelschnittsgleichung für die Substitution von x_0, y_0 statt x, y.

Setzt man also in die Gleichung $f(x, y) = 0$ des Kegelschnitts $(x' + x_0)$ und $(y' + y_0)$ für x und y, so erhält man $f(x, y) = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}}$, so dass so lange nur nicht $A_{33} = 0$ ist, die Gleichung immer in die Form $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k = 0$, $\left(k = \frac{\Delta}{A_{33}}\right)$ gebracht werden kann.

Die Gleichungen zwischen Pol und Polare werden $k\xi = a_{11}x + a_{12}y$, $k\eta = a_{21}x + a_{22}y$, ihre Auflösung giebt $lx = a_{22}\xi - a_{12}\eta$, $ly = -a_{12}\xi + a_{22}\eta$, $\left(l = \frac{A_{33}^2}{\Delta}\right)$ und daher so lange nicht $\Delta = 0$ die Gleichung in Liniencoordinaten

$$a_{22}\xi^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{11}\eta^2 + l = 0.$$

Die Gleichung, welche zwei harmonische Pole verbindet, ist $a_{11}xx' + a_{12}(xy' + x'y) + a_{22}yy' + k = 0$, und wenn insbesondere beide in unendlicher Ferne liegen und durch die Winkel α, α' bestimmt sind, die Relation zwischen den Richtungen conjugirter gerader Linien

$$a_{11}\cos\alpha\cos\alpha' + a_{12}(\cos\alpha\sin\alpha' + \cos\alpha'\sin\alpha) + a_{22}\sin\alpha\sin\alpha' = 0.$$

Man kann dafür setzen

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \mu\sin\alpha', \quad a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = -\mu\cos\alpha'.$$

Aufg. 1. Für die Asymptoten fallen α und α' zusammen und man erhält $a_{11}\cos\alpha + (a_{12} - \mu)\sin\alpha = 0$, $(a_{12} + \mu)\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = 0$ und daher $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + \mu^2 = 0$ oder $\mu = \sqrt{-A_{33}}$. Für die Asymptoten ist somit

$$\nu\cos\alpha\cos\alpha' = a_{22}, \quad \nu\cos\alpha\sin\alpha' = -(a_{12} - \mu), \quad \nu\cos\alpha'\sin\alpha = -(a_{12} + \mu),$$
$$\nu\sin\alpha\sin\alpha' = a_{11}; \quad \nu^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$

Aufg. 2. Für die Hauptaxen sind α und α' um 90^0 verschieden und man erhält

$(a_{11}-\lambda)\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=0,\quad a_{12}\cos\alpha+(a_{22}-\lambda)\sin\alpha=0,$
also $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2=0;\ \lambda=\frac{a_{11}+a_{22}+\nu}{2},\ \lambda'=\frac{a_{11}+a_{22}-\nu}{2},$
für $$\nu^2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2;$$
und $\cos^2\alpha=\sin^2\alpha'=\frac{a_{11}-a_{22}+\nu}{2\nu},\ \sin^2\alpha=\cos^2\alpha'=\frac{-a_{11}+a_{22}+\nu}{2\nu};$
$$\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha'\cos\alpha'=\frac{a_{12}}{\nu}.$$
Für $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$ werden die Hauptaxen also unbestimmt; diess ist der Fall des Kreises.

Aufg. 3. Wenn $(\alpha'-\alpha)$ ein gegebener Winkel μ sein soll, so gelten die Relationen
$$a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=\ \varrho(\cos\alpha\sin\mu+\sin\alpha\cos\mu),$$
$$a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha=-\varrho(\cos\alpha\cos\mu-\sin\alpha\sin\mu)$$
oder $$(a_{11}-\varrho\sin\mu)\cos\alpha+(a_{12}-\varrho\cos\mu)\sin\alpha=0,$$
$$(a_{12}+\varrho\cos\mu)\cos\alpha+(a_{22}-\varrho\sin\mu)\sin\alpha=0$$
und $$\varrho^2-(a_{11}+a_{22})\varrho\sin\mu+A_{33}=0.$$
Man findet
$$p\cos\alpha=a_{22}-\varrho\sin\mu=\frac{a_{22}\cos^2\mu-a_{11}\sin^2\mu-\sigma\sin\mu}{2},$$
$$p\sin\alpha=-a_{12}-\varrho\cos\mu=-a_{12}-\frac{(a_{11}+a_{22})\sin\mu+\sigma}{2}\cos\mu;$$
$$q\cos\alpha=-a_{12}+\varrho\cos\mu=-a_{12}+\frac{(a_{11}+a_{22})\sin\mu+\sigma}{2}\cos\mu,$$
$$q\sin\alpha=a_{11}-\varrho\sin\mu=\frac{a_{11}\cos^2\mu-a_{22}\sin^2\mu-\sigma\sin\mu}{2};$$
$$\sigma^2=(a_{11}+a_{22})^2\sin^2\mu-4A_{33}.$$
So lange $\sin^2\mu>\frac{4A_{33}}{(a_{11}+a_{22})^2}$ ist, ist die Aufgabe möglich; sie ist es also stets bei der Hyperbel.

Die Vertauschung von μ mit $-\mu$ giebt die Bestimmung des zugehörigen Winkels α'.

Aufg. 4. Aus den Relationen, von denen in der vorigen Aufgabe ausgegangen worden ist, folgt auch
$a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha=\varrho\sin\mu$; daher geht durch die Substitution $x=X\cos\alpha+Y\cos\alpha'$, $y=X\sin\alpha+Y\sin\alpha'$ die Gleichung des Kegelschnitts in
$$\frac{X^2}{d^2}+\frac{Y^2}{d'^2}=1 \text{ über mit } d^2=-\frac{k}{\varrho\sin\mu},\ d'^2=\frac{k}{\varrho'\sin\mu}.$$
Für die Hauptaxen ist speciell $d^2=-\frac{k}{\lambda},\ d'^2=-\frac{k}{\lambda'}$.

Die Transformation zu den Asymptoten vollzieht man dagegen durch
$$x=X\cos\alpha+Y\cos\alpha',\ y=X\sin\alpha+Y\sin\alpha',$$
$$a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha=0,$$
$$a_{11}\cos^2\alpha'+2a_{12}\cos\alpha'\sin\alpha'+a_{22}\sin^2\alpha'=0,$$
$$a_{11}\cos\alpha\cos\alpha'+a_{12}(\cos\alpha\sin\alpha'+\cos\alpha'\sin\alpha)+a_{22}\sin\alpha\sin\alpha'=\frac{2A_{33}}{\nu}$$
und die Gleichung der Curve wird $XY=-\frac{k\nu}{4A_{33}}$. (Vergl. Art. 207.)

———

Zwanzigstes Kapitel.

Von den Invarianten und Covarianten der Gebilde erster Stufe oder binärer Formen.

333. Der Durchschnittspunkt der geraden Linie $a_1x_1 + \ldots = 0$ mit der Seite $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks ist durch $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ dargestellt (vergl. Art. 62); oder der von $ax + by + c = 0$ mit der Axe x durch $ax + c = 0$. Ebenso bestimmt der Kegelschnitt $a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 = 0$ mit derselben Fundamentallinie ein Punktepaar $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$, wie auch für Cartesische Coordinaten das Punktepaar $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ in der Axe x. Ebenso verbindet den Punkt $\alpha_1\xi_1 + \ldots = 0$ der Strahl $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 = 0$ (vergl. Art. 79) mit der Ecke $\xi_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks und der Kegelschnitt $\alpha_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 = 0$ hat mit dem Punkte $\xi_3 = 0$ die Tangenten $\alpha_{11}\xi_1^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{22}\xi_2^2 = 0$ gemein. So bestimmt jede gerade Linie mit einer der Fundamentallinien einen Schnittpunkt, jeder Punkt mit einem der Fundamentalpunkte einen Strahl, jede Curve zweiter Ordnung mit jener ein Punktepaar und jede Curve zweiter Classe mit diesem ein Strahlenpaar. Und da jede beliebige Gerade zur Fundamentallinie und jeder Punkt zum Fundamentalpunkt durch Transformation gemacht werden kann, so erzeugen die algebraischen Curven aller Ordnungen und Classen mit beliebigen geraden Linien und Punkten Punktreihen und Strahlbüschel und die analytischen Ausdrucksformen derselben sind die allgemeinen Gleichungen der betreffenden Grade mit einer Unbekannten, oder die homogenen Gleichungen derselben Grade mit zwei Veränderlichen. Die Untersuchung dieser Formen muss zur Entdeckung der Eigenschaften der Punktreihen und Strahlbüschel auf rein analytischem Wege führen. Wenn wir die Untersuchung an homogenen Gleichungen vollziehen, so liefern ihre Resultate nach der doppelten Interpretation in Punkt- und in Liniencoordinaten zugleich die Eigenschaften der Punktreihen und der Strahlbüschel. Nachdem im vorigen Kapitel die Untersuchung der homogenen Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen begonnen ist, wird die beab-

sichtigte Untersuchung der Gleichungen mit zwei Veränderlichen die Grundlage bilden zu neuen und wichtigen Ergebnissen in jener.

Wir erinnern zuvor an das früher Gefundene; ist $a_2 = -k a_1$, etc., so sind $x_1 - k x_2 = 0$, $x_1 - l x_2 = 0$, $x_1 - m x_2 = 0$, $x_1 - n x_2 = 0$ vier Elemente, deren Doppelverhältniss durch $\frac{k-l}{l-m} : \frac{k-n}{n-m}$ ausgedrückt wird; und wenn $x_1 - k x_2 = 0$, $y_1 - k y_2 = 0$ zwei Gebilde sind, in denen der veränderliche Coefficient k für entsprechende Elemente stets einerlei Werth hat, so sind dieselben projectivisch.

334. Das durch $a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0$ dargestellte Elementenpaar fällt zusammen, wenn $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ist; denn dann hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln $x_1 : x_2$. Wenn in der Discriminante der homogenen Gleichung mit drei Variabeln (Art. 323) die Coefficienten der x_3 enthaltenden Glieder gleich Null gesetzt werden, so dass sich die Gleichung selbst auf die obige reducirt, so geht die Discriminante in die einfache Form $\Delta = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$ zurück, die man daher auch die Discriminante der betrachteten Gleichung nennt. Sie entspringt auch wie diese aus der Elimination der Veränderlichen zwischen den partiellen Differentialen der allgemeinen Gleichung nach x_1 und x_2 $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = 0$, $a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = 0$. Und wenn α_1, α_2 die Wurzelwerthe $x_1 : x_2$ sind, welche der Gleichung entsprechen, so ist wegen $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}$, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\Delta = -a_{11}^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2$, worin die Bedeutung wiederholt erscheint, zugleich aber sich ergiebt, dass die von der Form ausgedrückten Elemente reell oder imaginär sind, je nachdem die Discriminante derselben negativ oder positiv ist. Nach der Bedeutung der Discriminante muss dieselbe durch Coordinatentransformation nur durch Hinzutritt eines constanten Factors verändert werden, denn sie muss nach der Transformation Null sein, wenn sie es vorher war, da das Zusammenfallen der dargestellten Elemente vom Coordinatensystem unabhängig ist. In der That hat man für die Substitution $x_1 = \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2$, $x_2 = \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2$ die transformirte Form

$$\left\{a_{11} \lambda_1^2 + 2 a_{12} \lambda_1 \lambda_2 + a_{22} \lambda_2^2\right\} y_1^2$$
$$+ 2 \left\{a_{11} \lambda_1 \mu_1 + a_{12} (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + a_{22} \lambda_2 \mu_2\right\} y_1 y_2$$
$$+ \left\{a_{11} \mu_1^2 + 2 a_{12} \mu_1 \mu_2 + a_{22} \mu_2^2\right\} y_2^2 = 0$$

und es ist, wie leicht durch das Multiplicationsgesetz der Deter-

minanten gefunden wird,

$$\{a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2\}\ \{a_{11}\mu_1^2 + 2a_{12}\mu_1\mu_2 + a_{22}\mu_2^2\}$$
$$-\{a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + a_{22}\lambda_2\mu_2\}^2 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2);$$

d. h. die Discriminante der transformirten Form ist das Product aus der Discriminante der ursprünglichen Form in das Quadrat der Substitutionsdeterminante.

335. Wenn man zwei homogene Gleichungen zweiten Grades mit zwei Veränderlichen $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$, $b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0$ zugleich betrachtet, d. h. zwei Punktepaare in derselben geraden Linie oder zwei Strahlenpaare aus demselben Punkte, so entsprechen denselben die beiden Discriminanten $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ und $(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)$. Sind α_1, α_2, β_1, β_2 die Wurzeln der Gleichungen, so ist das Doppelverhältniss der durch dieselben dargestellten vier Elemente

$$m = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_1 - \beta_2} : \frac{\beta_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \beta_2}$$ und man bildet daraus die Relation

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) - 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)};$$ das Quadrat derselben kann nach den Relationen zwischen den Coefficienten, welche schon vorher benutzt sind, in Function der letztern geschrieben werden und giebt

$$\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^2 = \frac{4\{2a_{12}b_{12} - (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})\}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}.$$ Man sieht daraus, dass $m = +1$ das Verschwinden einer der beiden Discriminanten im Nenner der rechten Seite bedingt, d. h. dass das Doppelverhältniss von zwei Punktepaaren nur dann den Werth der positiven Einheit haben kann, wenn das eine derselben aus zwei zusammenfallenden Punkten besteht.

Man erkennt, dass für $m = 0$ die Relation

$$4\{2a_{12}b_{12} - (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})\}^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)$$

bedingend ist, d. h. dass die beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben, wenn dieselbe besteht, oder dass sie die Bedingung ist, unter welcher beide Gleichungen durch einen Werth der Veränderlichen zugleich erfüllt sind; man nennt sie die Resultante der Gleichungen. Die Relation in den Wurzeln zeigt in Uebereinstimmung damit, dass sie bis auf einen Factor mit

$$\{(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) - 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\}^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\beta_1 - \beta_2)^2$$

identisch, oder dass sie dem Producte

$(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$ proportional ist. Endlich findet

man für $m = -1$, d. h. für die harmonische Theilung der Elemente des einen Paares durch die des andern die Bedingung $2a_{12}b_{12} - (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}) = 0$ oder $\begin{vmatrix} a_{11}, & b_{12} \\ a_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}, & a_{12} \\ b_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, wir wollen abkürzend schreiben $\Theta = 0$, und in Function der Wurzeln $(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) = 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)$ oder $2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) - (\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2) = 0$, etc., d. i. $\frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2} + \frac{1}{\alpha_1 - \beta_2}$, und ebenso $\frac{2}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2 - \beta_1} + \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2}$, etc.

Nach ihrer analytischen Bedeutung ist sowohl diese Bedingung der harmonischen Relation, wie die vorher betrachtete Resultante für zwei quadratische Formen von der Coordinatenbeziehung unabhängig; in der That findet man für die Substitution $x_1 = \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2$, $x_2 = \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2$ die harmonische Relation der transformirten Formen $2A_{12}B_{12} - (A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11})$ als das Product derselben Relation der ursprünglichen Formen in das Quadrat der Substitutionsdeterminante; und dasselbe ergiebt sich direct aus ihrer Beziehung zur Resultante durch die beiden Discriminanten. In Bezug auf die Resultante fügen wir ihre Bestimmung in Determinantenform hinzu, welche in doppelter Weise gewonnen wird. Multiplicirt man die beiden Gleichungen mit den Binomen $a_1x_1 + a_2x_2$, $b_1x_1 + b_2x_2$, so müssen sich die eingeführten Constanten so bestimmen lassen, dass die Producte identisch sind; denn diess entspricht dem Falle, wo diese linearen Factoren diejenigen sind, welche in beiden Gleichungen zu dem gemeinsamen linearen Factor beider hinzutreten. Aus

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2)(a_1x_1 + a_2x_2)$$
$$= (b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2)(b_1x_1 + b_2x_2)$$

entspringen aber die vier Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}a_1 \qquad\qquad\quad - \quad b_{11}b_1 \qquad\qquad\quad &= 0, \\ 2a_{12}a_1 + a_{11}a_2 - 2b_{12}b_1 - b_{11}b_2 &= 0, \\ a_{22}a_1 + 2a_{12}a_2 - b_{22}b_1 - 2b_{12}b_2 &= 0, \\ a_{22}a_2 \qquad\qquad - \quad b_{22}b_2 &= 0 \end{aligned}$$

und zwischen ihnen können die a_1, a_2, b_1, b_2 nach der Regel des Art. 72 eliminirt werden und man erhält die Resultante in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & 0, & b_{11}, & 0 \\ 2a_{12}, & a_{11}, & 2b_{12}, & b_{11} \\ a_{22}, & 2a_{12}, & b_{22}, & 2b_{12} \\ 0, & a_{22}, & 0, & b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Oder man multiplicirt

die erste Gleichung mit b_{11}, die zweite mit a_{11} und bildet durch Subtraction und nachmalige Division mit x_2 die Gleichung $2x_1(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}) + x_2(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) = 0$; man multiplicirt dann ebenso mit $b_{11}x_1 + 2b_{12}x_2$, $a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2$, subtrahirt und dividirt mit x_2^2, um zu erhalten $x_1(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) + 2x_2(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}) = 0$; eliminirt man zwischen den beiden so gebildeten linearen Gleichungen x_1, x_2, so erhält man die Resultante in der Form

$$\begin{vmatrix} 2(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}), & (a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) \\ (a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}), & 2(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}) \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher sie als die Discriminante einer homogenen Gleichung zweiten Grades von der Form

$$(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})x_1^2 + (a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_1x_2 + (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})x_2^2 = 0$$

erscheint.

Aufg. 1. Man soll den Ort eines Punktes so bestimmen, dass die von ihm an zwei feste Kegelschnitte gezogenen Tangenten ein harmonisches Büschel bilden.

Wir denken zur Vereinfachung die beiden Kegelschnitte auf ihr gemeinsames, sich selbst conjugirtes Dreieck bezogen und ihre Gleichungen in der Form $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, $b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0$ geschrieben; dann wird das vom Punkte x' an den ersten Kegelschnitt gehende Tangentenpaar durch

$$(a_{11}x_1'^2 + \ldots)(a_{11}x_1^2 + \ldots) = (a_{11}x_1x_1' + a_{22}x_2x_2' + a_{33}x_3x_3')^2$$

ausgedrückt und für $x_3 = 0$ erhält man die Schnittpunkte des Tangentenpaars in der betreffenden Seite des Fundamentaldreiecks durch die Gleichung

$$a_{11}(a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2)x_1^2 - 2a_{11}a_{22}x_1'x_2'x_1x_2 + a_{22}(a_{33}x_3'^2 + a_{11}x_1'^2)x_2^2 = 0.$$

Indem man die Bedingung bildet, unter welcher das so bestimmte Punktepaar mit dem ebenso aus der Gleichung des zweiten Kegelschnitts abgeleiteten Paare eine harmonische Theilung giebt, erhält man die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form $a_{11}b_{22}(a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2)(b_{33}x_3^2 + b_{11}x_1^2)$ $+ a_{22}b_{11}(a_{33}x_3^2 + a_{11}x_1^2)(b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2) = 2a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}x_1^2x_2^2$ und durch Entwicklung und Reduction

$$a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2 + a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2 = 0.$$

Die wichtigen Beziehungen dieses Kegelschnitts zu den gegebenen werden wir im Folgenden untersuchen.

Aufg. 2. Wenn die vier von dem Punkte des Ortes ausgehenden Tangenten ein Büschel von bestimmtem Doppelverhältniss bilden, so ist sein Ort eine Curve vierter Ordnung $F^2 = kSS'$, wenn $F = 0$ den in der vorigen Aufgabe gefundenen Ort und $S = 0$, $S' = 0$ die beiden gegebenen Kegelschnitte ausdrücken.

Aufg. 3. Man soll die Enveloppe der geraden Linie $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$ bestimmen, welche mit zwei festen Kegelschnitten zwei Paare harmonischer Schnittpunkte hervorbringt.

Wenn man die Gleichungen beider Kegelschnitte in der vorigen Form voraussetzt, so giebt die Elimination von x_3 zwischen der Gleichung der geraden Linie und der des ersten Kegelschnitts für die Durchschnittspunkte beider die Relation

$$(a_{11}\xi_3^2 + a_{33}\xi_1^2)x_1^2 - 2a_{33}\xi_1\xi_2 x_1 x_2 + (a_{22}\xi_3^2 + a_{33}\xi_2^2)x_2^2 = 0;$$

die Bedingung, unter der diese Gleichung mit der für den zweiten Kegelschnitt gleich gebildeten ein harmonisches System bestimmt, ist daher

$$(a_{11}\xi_3^2 + a_{33}\xi_1^2)(b_{22}\xi_3^2 + b_{33}\xi_2^2) + (b_{11}\xi_3^2 + b_{33}\xi_1^2)(a_{22}\xi_3^2 + a_{33}\xi_2^2) = 2a_{33}b_{33}\xi_1^2\xi_2^2$$

und die Reduction derselben giebt die Gleichung der gesuchten Enveloppe in der Form

$$(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})\xi_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})\xi_2^2 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})\xi_3^2 = 0;$$

die Gleichung eines Kegelschnitts, für welchen das Dreieck der Fundamentalpunkte gleichfalls ein System harmonischer Pole ist.

Aufg. 4. Wenn in die Gleichungen von zwei Kegelschnitten $S=0$, $U=0$ für x_1, etc. $\lambda x_1 + \mu x_2'$, etc. substituirt werden, so geht aus den in der Form $\lambda^2 S + 2\lambda\mu P + \mu^2 S' = 0$, $\lambda^2 U + 2\lambda\mu Q + \mu^2 U' = 0$ geschriebenen (Art. 321) Substitutionsresultaten ebenso wie oben hervor, dass $SU' + S'U - 2PQ = 0$ das Paar von geraden Linien darstellt, welches durch den Punkt x' so gezogen werden kann, dass es von den beiden Kegelschnitten in harmonischen Punkten geschnitten wird. In demselben Falle ist die Gleichung des Systems der vier geraden Linien vom Punkte x' nach den Schnittpunkten der Kegelschnitte

$$(SU' + S'U - 2PQ)^2 = 4(SS' - P^2)(UU' - Q^2).$$

Aufg. 5. Welches ist die Enveloppe der Kegelschnitte, die durch drei gegebene Punkte gehen und ein festes Segment harmonisch theilen?

Wir denken die drei Punkte als Ecken des Coordinatendreiecks, so dass der Kegelschnitt die Form der Gleichung

$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0$ hat und nehmen x' und x'' für die Coordinaten der festen Punkte; dann sind die dem Doppelverhältniss d entsprechenden Theilpunkte von den Coordinaten $cx'' + x'$, $cx'' + dx'$ für ein veränderliches c, die Gleichung des Kegelschnitts ist

$$0 = \begin{vmatrix} x_2x_3, & x_3x_1, & x_1x_2 \\ (cx_2'' + x_2')(cx_3'' + x_3'), & (cx_3'' + x_3')(cx_1'' + x_1'), & (cx_1'' + x_1')(cx_2'' + x_2') \\ (cx_2'' + dx_2')(cx_3'' + dx_3'), & (cx_3'' + dx_3')(cx_1'' + dx_1'), & (cx_1'' + dx_1')(cx_2'' + dx_2') \end{vmatrix}$$

d. h. durch Entwickelung und mit Einführung von $b_i = x_j'x_k'' - x_j''x_k'$

$$c^2(b_1x_1''^2x_2x_3 + b_2x_2''^2x_3x_1 + b_3x_3''^2x_1x_2)$$
$$+ c(1+d)\{b_1x_1'x_1''x_2x_3 + b_2x_2'x_2''x_3x_1 + b_3x_3'x_3''x_1x_2\}$$
$$+ d\{b_1x_1'^2x_2x_3 + b_2x_2'^2x_3x_1 + b_3x_3'^2x_1x_2\} = 0.$$

Demnach ist die Gleichung der Enveloppe

$$0 = 4d(b_1x_1'^2x_2x_3 + b_2x_2'^2x_3x_1 + b_3x_3'^2x_1x_2)(b_1x_1''^2x_2x_3 + \ldots)$$
$$-(1+d)^2(b_1x_1'x_1''x_2x_3 + b_2x_2'x_2''x_3x_1 + b_3x_3'x_3''x_1x_2)^2$$ oder

$$4db_1b_2b_3x_1x_2x_3(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$$
$$= (1-d)^2(b_1x_1'x_1''x_2x_3 + b_2x_2'x_2''x_3x_1 + b_3x_3'x_3''x_1x_2)^2;$$

dieselbe ist also eine Curve vierter Ordnung, die die Ecken des Funda-

mentaldreiecks zu Doppelpunkten hat und von der geraden Linie des Segments in ihren beiden Endpunkten berührt wird. Für die harmonische Theilung insbesondere reducirt sich die Gleichung auf das Product der Kegelschnittsgleichungen $b_1 x_1'^2 x_2 x_3 + \ldots = 0$, $b_1 x_1''^2 x_2 x_3 + \ldots = 0$, d. h. die Enveloppe ist der vierte Punkt, der diesen beiden Kegelschnitten gemeinsam ist, oder alle einem festen Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitte, die ein festes Segment harmonisch theilen, gehen durch einen festen Punkt.

336. Wenn man zwei homogene Gleichungen vom zweiten Grade in der Form

$$k(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2) + (b_{11} x_1^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2) = 0$$

verbindet, wo k eine willkürliche Constante bezeichnet, so entspricht jedem bestimmten Werthe der Letztern ein Paar von Elementen und die Gleichung stellt also ein System von Paaren von Elementen vor; sie bilden eine Involution. Denn in der Gleichung

$$(k a_{11} + b_{11}) x_1^2 + 2 (k a_{12} + b_{12}) x_1 x_2 + (k a_{22} + b_{22}) x_2^2 = 0$$

kann k auf doppelte Weise so bestimmt werden, dass das ihm entsprechende Paar von Elementen in eins zusammenfällt; es sind diese Werthe von k die Wurzeln von

$$\begin{vmatrix} k a_{11} + b_{11}, & k a_{12} + b_{12} \\ k a_{12} + b_{12}, & k a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder von} \quad k^2 \Delta + k \Theta + \Delta_1 = 0$$

für $\Theta = a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - 2 a_{12} b_{12}$ wie oben.

Wählt man diese beiden Elemente zu den Fundamentalen und bezeichnet sie durch $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, so kann die Reihe der Elementenpaare durch $z_1^2 - \lambda z_2^2 = 0$ dargestellt werden, d. h. durch $(z_1 + \lambda^{\frac{1}{2}} z_2)(z_1 - \lambda^{\frac{1}{2}} z_2) = 0$ und man erkennt, dass jedes Paar entsprechender Elemente des Systems mit dem Paar der Doppelelemente conjugirt harmonisch ist. Jene Doppelelemente stellen also die Doppelelemente der Involution dar, welche die betrachteten Elementenpaare bilden. Nur dem Falle $\Theta^2 = 4 \Delta \Delta_1$ entspricht eine Ausnahme; denn für

$(k a_{11} + b_{11})(k a_{22} + b_{22}) - (k a_{12} + b_{12})^2 = -(kp + q)^2$ ist es erlaubt zu setzen $k a_{11} + b_{11} = m \left\{(k a_{12} + b_{12}) + (kp + q)\right\}$,

$$k a_{22} + b_{22} = \frac{1}{m} \left\{(k a_{12} + b_{12}) - (kp + q)\right\},$$

so dass die Gleichung der Involution

$(k a_{11} + b_{11}) x_1^2 + 2 (k a_{12} + b_{12}) x_1 x_2 + (k a_{22} + b_{22}) x_2^2 = 0$ in die Form

$$m \left\{(k a_{12} + b_{12}) + (kp + q)\right\} x_1^2 + 2 (k a_{12} + b_{12}) x_1 x_2$$
$$+ \frac{1}{m}\left\{(k a_{12} + b_{12}) - (kp + q)\right\} x_2^2 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$(mx_1 + x_2)\{(ka_{12} + b_{12})(mx_1 + x_2) + (kp + q)(mx_1 - x_2)\} = 0$$

übergeht, welche aussagt, dass die Involution sich in einen Punkt (Strahl) und eine einfache Reihe (Büschel) von Punkten (Strahlen) auflöst. In der That, wenn das Elementenpaar $d_{11}x_1^2 + 2d_{12}x_1x_2 + d_{22}x_2^2 = 0$ mit jedem der beiden Paare $a_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, $b_{11}x_1^2 + \ldots = 0$ conjugirt harmonisch ist, d. h. wenn die Bedingungen

$$d_{11}a_{22} + d_{22}a_{11} - 2d_{12}a_{12} = 0, \quad d_{11}b_{22} + d_{22}b_{11} - 2d_{12}b_{12} = 0$$

erfüllt, so ist es auch mit jedem durch $k(a_{11}x_1^2 + \ldots) + b_{11}x_1^2 + \ldots = 0$ dargestellten Elementenpaar conjugirt harmonisch, weil aus den vorigen beiden Relationen für jedes k

$$d_{11}(ka_{12} + b_{12}) + d_{22}(ka_{11} + b_{11}) - 2d_{12}(ka_{12} + b_{12}) = 0$$

hervorgeht. Darum bestimmen zwei Elementenpaare eine Involution, denn man kann aus den obigen, die harmonische Relation ausdrückenden Gleichungen die Coefficienten der Gleichung des Paars der Doppelelemente bestimmen. Diese Bestimmung liefert die Relation

$$d_{11} : d_{12} : d_{22} = (a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}) : \tfrac{1}{2}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) : (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})$$

und damit als die Gleichung der Doppelelemente die am Schlusse des vorigen Art. gefundene Gleichung, welche die Resultante zur Discriminante hat,

$$(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})x_1^2 + (a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_1x_2 + (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})x_2^2 = 0.$$

In der That besteht zwischen ihren Coefficienten und denen sowohl von $a_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, als von $b_{11}x_1^2 + \ldots = 0$ die harmonische Relation, denn es ist gleichmässig

$$a_{11}(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}) + a_{22}(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}) - 2a_{12}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) = 0$$

und $b_{11}(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}) + b_{22}(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}) - 2b_{12}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) = 0.$

337. Man kann jene Gleichung offenbar in der Determinantenform $\begin{vmatrix} x_1^2, & -x_1x_2, & x_2^2 \\ a_{22}, & a_{12}, & a_{11} \\ b_{22}, & b_{12}, & b_{11} \end{vmatrix} = 0$ schreiben und sie auch als die Determinante der nach x_1 und x_2 genommenen partiellen Differentiale der beiden gegebenen Gleichungen bilden; denn

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2, & b_{12}x_1 + b_{22}x_2 \end{vmatrix} = 0$$ giebt dieselbe Gleichung

wie oben. Man nennt diese Function die **Jacobi'sche Determinante** der gegebenen Functionen. Sind aber $U = 0$, $V = 0$ die beiden Gleichungen zweiten Grades und U_1, U_2, V_1, V_2 ihre

partiellen Differentiale, so ist an der Form $\begin{vmatrix} U_1, & U_2 \\ V_1, & V_2 \end{vmatrix} = 0$ leicht zu zeigen, wie diese Function sich bei einer Transformation der Coordinaten verhält. Für $x_1 = \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2$, $x_2 = \lambda_2 y_1 + \mu_2 y_2$ und $R = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ als die Determinante der Substitution wird $y_1 = (\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2) : R$, $y_2 = (-\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2) : R$ und wegen $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ auch

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \left\{\lambda_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \mu_1\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\} : R, \quad -\frac{\partial}{\partial x_1} = \left\{\lambda_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \mu_2\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\} : R;$$

d. h. die Differentiale $\frac{\partial}{\partial x_2}$ und $-\frac{\partial}{\partial x_1}$ werden, abgesehen von dem constantem Divisor R, nach denselben Regeln transformirt, wie x_1 und x_2. Deshalb ist die mit den transformirten Differentialen gebildete Determinante dem Producte der ursprünglichen in eine Potenz der Determinante der Substitution gleich. Darin ist analytisch ausgeprägt, dass die Doppelelemente eine vom Coordinatensystem unabhängige und durch lineare Transformationen überhaupt unstörbare Beziehung zu den gegebenen Elementenpaaren besitzen.

Man kann die Gleichung der Doppelelemente mittelst der Wurzeln statt der Coefficienten der gegebenen Gleichungen darstellen; sie ist $\begin{vmatrix} x_1^2, & 2x_1x_2, & x_2^2 \\ \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1+\alpha_2, & 1 \\ \beta_1\beta_2, & \beta_1+\beta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0$ oder

$$x_1^2 \left\{(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)\right\} + 2x_1x_2(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)$$
$$+ x_2^2 \left\{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta_1\beta_2 - (\beta_1 + \beta_2)\alpha_1\alpha_2\right\} = 0.$$

Man schliesst daraus, dass für den in der Mitte des Segments der Doppelpunkte gewählten Anfangspunkt die Relation $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$ besteht und erkennt die Charakteristik des Centralpunktes wieder (Art. 301), wonach das Rechteck der Entfernungen entsprechender Punkte vom Centrum einen constanten Werth hat.

Wenn endlich drei Paare von Elementen $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ oder $a_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, $b_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, $c_{11}x_1^2 + \ldots = 0$ so gelegen sind, dass die lineare Relation $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ besteht, so müssen die Grössen x_1^2, x_1x_2, x_2^2 sich linear zwischen den drei Gleichungen eliminiren lassen, d. h. man muss haben $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{22} \\ b_{11}, & b_{12}, & b_{22} \\ c_{11}, & c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} = 0$; diess ist die Bedingung der Involution

von sechs Elementen; denn die Ersetzung der Coefficienten durch die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ giebt $\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \beta_1+\beta_2, & \beta_1\beta_2 \\ 1, & \gamma_1+\gamma_2, & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ und man kommt für $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$ auf die genau der Form der Determinante der Doppelelemente entsprechende Relation

$$\begin{vmatrix} 1, & 2\alpha, & \alpha^2 \\ 1, & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \\ 1, & \beta_1+\beta_2, & \beta_1\beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$ die Involution von fünf Elementen.

Die Elemente α sind die sich selbst conjugirten Elemente der Involution und man sieht, dass die beiden Elemente dieser Art mit den Doppelelementen der vorherigen Betrachtungen identisch sind. Setzt man auch $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, so erhält man durch Einführung beider Paare sich selbst conjugirter Elemente die Relation $\begin{vmatrix} 1, & 2\alpha, & \alpha^2 \\ 1, & 2\beta, & \beta^2 \\ 1, & \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$, was in der That mit

$(\alpha - \beta)\left\{2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha\beta) - (\alpha+\beta)(\alpha_1+\alpha_2)\right\} = 0$ identisch ist und somit, wie es sein muss, auf die harmonische Relation zurückkommt.

Aufg. 1. Das System der Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gehen, wird von einer jeden geraden Linie in Punkten einer Involution geschnitten.

Denn denken wir diese gerade Linie als Seite $x_3 = 0$ des Coordinatendreiecks, so liefert die Gleichung des Systems der Kegelschnitte $kS + S' = 0$ für das System der Schnittpunkte $k(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + (b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0$; dasselbe bildet also ein involutorisches System, das durch die Paare $a_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, $b_{11}x_1^2 + \ldots = 0$ bestimmt ist.

Aufg. 2. Wenn ein System von Kegelschnitten ein System harmonischer Pole gemein hat, so wird jede durch einen dieser Pole gezogene gerade Linie von demselben in Punkten einer Involution geschnitten.

Denn die Substitution $x_1 = kx_2$ in $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ giebt $(a_{11}k^2 + a_{22})x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$ (Art. 312), d. h. ein Paar von Punkten, welches mit den beiden den geraden Linien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ angehörenden Schnittpunkten harmonisch conjugirt ist. Diese sind daher die Doppelpunkte der Involution, welche jene bilden.

Aufg. 3. Man soll in zwei involutorischen Reihen auf derselben geraden Linie das beiden gemeinsame Paar entsprechender Punkte bestimmen. Sind jene durch die Punktepaare $a_{11}x_1^2 + \ldots = 0$, $b_{11}x_1^2 + \ldots = 0$; $a_{11}'x_1^2 + \ldots = 0$, $b_{11}'x_1^2 + \ldots = 0$ bestimmt, so sind die Paare ihrer sich selbst conjugirten Punkte durch die Gleichungen

$$(a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12})x_1^2+(a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22})x_1x_2+(a_{22}b_{12}-a_{12}b_{22})x_2^2=0,$$
$$(a_{12}'b_{11}'-a_{11}'b_{12}')x_1^2+(a_{22}'b_{11}'-a_{11}'b_{22}')x_1x_2+(a_{22}'b_{12}'-a_{12}'b_{22}')x_2^2=0$$
bestimmt und das gemeinsame Punktepaar muss mit beiden zugleich ein harmonisches System bestimmen, d. h. seine Gleichung muss aus den beiden letzten Gleichungen ebenso gebildet sein, wie diese aus den Paaren der gegebenen.

338. Wenn vier Paare von Elementen, die wir durch die Wurzelpaare α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 von vier Gleichungen zweiten Grades dargestellt denken, die beiden Gruppen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ von gleichem Doppelverhältniss bestimmen, so gilt die Relation $\begin{vmatrix} 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2 \\ 1, \beta_1, \beta_2, \beta_1\beta_2 \\ 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2 \\ 1, \delta_1, \delta_2, \delta_1\delta_2 \end{vmatrix} = 0$; sie ergiebt sich durch Elimination der Coefficienten a, b, c, d zwischen den vier nach Art. 298 bestehenden Gleichnngen

$$a\alpha_1\alpha_2+b\alpha_1+c\alpha_2+d=0,\quad a\beta_1\beta_2+b\beta_1+c\beta_2+d=0,$$
$$a\gamma_1\gamma_2+b\gamma_1+c\gamma_2+d=0,\quad a\delta_1\delta_2+b\delta_1+c\delta_2+d=0.$$

Die Abkürzungen

$$(\beta_1-\gamma_1)(\alpha_1-\delta_1)=A_1,\quad (\beta_2-\gamma_2)(\alpha_2-\delta_2)=A_2,$$
$$(\gamma_1-\alpha_1)(\beta_1-\delta_1)=B_1,\quad (\gamma_2-\alpha_2)(\beta_2-\delta_2)=B_2,$$
$$(\alpha_1-\beta_1)(\gamma_1-\delta_1)=C_1,\quad (\alpha_2-\beta_2)(\gamma_2-\delta_2)=C_2,$$

für welche die Summen $A_1+B_1+C_1$ und $A_2+B_2+C_2$ verschwinden, geben

$$\begin{vmatrix} B_1, & B_2 \\ C_1, & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1, & C_2 \\ A_1, & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2 \\ 1, \beta_1, \beta_2, \beta_1\beta_2 \\ 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2 \\ 1, \delta_1, \delta_2, \delta_1\delta_2 \end{vmatrix}.$$

Eine Umformung der vorigen Determinante genügt zum Beweise; wenn man in ihr die mit $\beta_1\delta_2$, $-\beta_2$ und $-\beta_1$ respective multiplicirten ersten Reihen zur letzten addirt, so erhält man

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_2, & (\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\delta_2) \\ 1, & \beta_1, & \beta_2, & 0 \\ 1, & \gamma_1, & \gamma_2, & (\gamma_1-\beta_1)(\gamma_2-\delta_2) \\ 1, & \delta_1, & \delta_2, & 0 \end{vmatrix},$$ d. i. durch Entwicklung

$$=(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\delta_2)\begin{vmatrix} \beta_2, & \beta_1, & 1 \\ \gamma_2, & \gamma_1, & 1 \\ \delta_2, & \delta_1, & 1 \end{vmatrix} + (\gamma_1-\beta_1)(\gamma_2-\delta_2)\begin{vmatrix} \delta_2, & \delta_1, & 1 \\ \alpha_2, & \alpha_1, & 1 \\ \beta_2, & \beta_1, & 1 \end{vmatrix};$$

hier ist aber die erste Determinante

$= \begin{vmatrix} \beta_2-\gamma_2, & \beta_1-\gamma_1 \\ \gamma_2-\delta_2, & \gamma_1-\delta_1 \end{vmatrix}$ und die zweite $= \begin{vmatrix} \delta_2-\alpha_2, & \delta_1-\alpha_1 \\ \alpha_2-\beta_2, & \alpha_1-\beta_1 \end{vmatrix}$,
also die obige Determinante

$$=(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\delta_2)\left\{(\beta_2-\gamma_2)(\gamma_1-\delta_1)-(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_2-\delta_2)\right\}$$
$$+(\gamma_1-\beta_1)(\gamma_2-\delta_2)\left\{(\delta_2-\alpha_2)(\alpha_1-\beta_1)-(\delta_1-\alpha_1)(\alpha_2-\beta_2)\right\}, \text{ d. i.}$$
$$=(\alpha_2-\beta_2)(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_2-\delta_2)(\delta_1-\alpha_1)-(\alpha_1-\beta_1)(\beta_2-\gamma_2)(\gamma_1-\delta_1)(\delta_2-\alpha_2)$$

und für ihr Verschwinden unter Anwendung der obigen Abkürzungen $C_1A_2 - C_2A_2 = 0$.

Diess zeigt aber, dass das Verschwinden der obigen Determinante die Doppelverhältnissgleichheit entsprechender Elemente ausdrückt; denn $A_1:B_1=A_2:B_2$ giebt $\frac{\beta_1-\gamma_1}{\gamma_1-\alpha_1}:\frac{\beta_1-\delta_1}{\delta_1-\alpha_1}=\frac{\beta_2-\gamma_2}{\gamma_2-\alpha_2}:\frac{\beta_2-\delta_2}{\delta_2-\alpha_2}$, etc.
Die Projectivität von zwei Reihen von beliebig vielen Elementen kann auf dieselbe Weise ausgedrückt werden, denn die Relation

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & .. \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, & \varepsilon_1, & .. \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2, & \varepsilon_2, & .. \\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \delta_1\delta_2, & \varepsilon_1\varepsilon_2, & .. \end{vmatrix} = 0,$$

welche anzeigt, dass jede der aus vier Reihen dieses Systems gebildeten Determinanten verschwindet, drückt die Doppelverhältnissgleichheit aller Gruppen von vier entsprechenden Elementen beider Reihen aus. Die Form derselben zeigt, dass zwei projectivische Systeme durch das eine und drei Paare entsprechender Punkte aus beiden vollkommen und auf lineare Weise bestimmt auf. (Art. 59, 298.)

Ebenso sind die Paare α_1, α_2; β_1, β_2; etc. in Involution, wenn die Relation $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & .. \\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2, & .. \\ \alpha_1\alpha_1, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & .. \end{vmatrix}=0$ erfüllt ist; denn jede der aus drei Reihen dieses Systems gebildeten Determinanten giebt durch ihr Verschwinden die involutorische Relation der drei in sie eintretenden Paare, weil die Elimination der Coefficienten a, k, d zwischen den drei Bedingungsgleichungen
$a\alpha_1\alpha_2 + k(\alpha_1+\alpha_2) + d = 0$, $a\beta_1\beta_2 + k(\beta_1+\beta_2) + d = 0$, $a\gamma_1\gamma_2 + k(\gamma_1+\gamma_2) + d = 0$ dieser Determinante den Werth Null ertheilt.

Wenn man die Relation der Projectivität zwischen den beiden durch $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1$ bestimmten Gruppen betrachtet, so gelangt man durch eine einfache Umformung zu der

der Involution; man hat

$$0=\begin{vmatrix}1, & 1, & 1, & 1\\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \alpha_2\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \alpha_1\\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \alpha_2\\ 1, & 1, & 1, & 1\\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2, & \alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \alpha_1\alpha_2\end{vmatrix}$$

und durch Subtraction der Elemente der letzten Reihe von den entsprechenden der ersten $0=(\alpha_1-\alpha_2)\begin{vmatrix}1, & 1, & 1\\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2\\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2\end{vmatrix}$;

d. h. die Projectivität der aus vier Elementen des Systems entsprechender Paare $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ gebildeten Gruppen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_1$ ist die Bedingung der Involution dieser Paare. (Art. 299.)

Aufg. 1. Man soll die zwischen den drei verschiedenen Doppelverhältnissen von vier Punkten bestehenden Relationen aufstellen.

Sie sind in der Gleichung $A_1+B_1+C_1=0$ enthalten; denn die Division derselben mit je einem ihrer drei Glieder giebt $1+\frac{B_1}{A_1}+\frac{C_1}{A_1}=0$, etc. und daher wenn man die Doppelverhältnisse $A_1:B_1$, $B_1:C_1$, $C_1:A_1$ mit d_1, d_2, d_3 respective bezeichnet mit Berücksichtigung der Zeichenänderungen $1=\frac{1}{d_1}+d_3$, $1=\frac{1}{d_2}+d_1$, $1=\frac{1}{d_3}+d_2$. Sind diese drei Doppelverhältnisse gleich gross, so ist jedes von ihnen vom Werthe $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$. (Vergl. Art. 313, Aufg. 4.)

Aufg. 2. Man drücke die drei Doppelverhältnisse von vier Elementen durch die Invarianten Δ, Δ', Θ der quadratischen Gleichungen aus, welche sie darstellen, und bilde die Bedingung, unter welcher sie einander gleich sind.

Aufg. 3. Wenn die Elementenpaare $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$; etc. eine Involution bilden, so erzeugen die in Bezug auf die einzelnen Paare conjugirt harmonischen Elemente eines beliebigen, durch den Werth w bestimmten Elements ein System $\varrho_{12}, \sigma_{12}, \tau_{12}, \ldots$ von unveränderlichem Doppelverhältniss. Ist also für ein anderes Element w' das System der conjugirten Elemente $\varrho_{12}', \sigma_{12}', \ldots$, so gilt die Relation

$$\begin{vmatrix}1, & 1, & 1, & \ldots\\ \varrho_{12}, & \sigma_{12}, & \tau_{12}, & \ldots\\ \varrho_{12}', & \sigma_{12}', & \tau_{12}', & \ldots\\ \varrho_{12}\varrho_{12}', & \sigma_{12}\sigma_{12}', & \tau_{12}\tau_{12}', & \ldots\end{vmatrix}=0$$

Da die Relation der Projectivität durch Coordinatentransformation nicht gestört wird, so kann man $w=\infty$, und $w'=0$ setzen und erhält

$$\varrho_{12}=\frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2},\ \sigma_{12}=\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2},\ \text{etc.};\ \varrho_{12}'=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},\ \sigma_{12}'=\frac{\beta_1+\beta_2}{2},$$

etc., so dass die vorausgesetzte Gleichung in die neue

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}, & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}, & \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}, & \frac{\delta_1\delta_2}{\delta_1+\delta_2} \\ \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2, & \gamma_1+\gamma_2, & \delta_1+\delta_2 \\ \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2, & \delta_1\delta_2 \end{vmatrix} = 0$$

übergeht, welche nach den Elementen der zweiten Zeile entwickelt sich als eine Consequenz der involutorischen Relation der Paare ergiebt. Diess giebt analytisch den Begriff einer zur Involution projectivischen Reihe. (Vergl. Art. 301.)

Aufg. 4. Man soll die Doppelelemente von zwei projectivischen Gebilden auf derselben geraden Linie oder aus demselben Scheitel bestimmen.

Sind α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 die zur Bestimmung hinreichenden Paare entsprechender Punkte und ist durch δ einer der Doppelpunkte bestimmt, so hat man in

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \delta, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \delta, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \delta^2, & \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2, & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

die zur Ermittelung derselben führende Gleichung zweiten Grades. Die Doppelelemente einer Involution stellt dar

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 2\delta, & \alpha_1+\alpha_2, & \beta_1+\beta_2 \\ \delta^2, & \alpha_1\alpha_2, & \beta_1\beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen führen auf die des Art. 337 zurück.

Aufg. 5. Wenn irgend sechs Elemente 1, 2, ..., 6 eines Grundgebildes erster Stufe gegeben sind und man construirt die drei Elementenpaare, welche respective zu 12 und 45, 23 u. 56, 34 u. 61 gleichzeitig harmonisch conjugirt sind, so bilden diese Paare eine Involution.

339. Wir verfolgen die vorige Betrachtungsweise wenigstens in einigen Hauptzügen auf das Gebiet der homogenen Formen mit zwei Veränderlichen von höheren Graden, weil diess zur analytischen Entwickelung einzelner früher auf geometrischem Wege gefundenen Resultate nöthig ist. Eine **cubische Gleichung** zwischen den Veränderlichen x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2 ist der algebraische Ausdruck einer Gruppe von drei Punkten in gerader Linie oder von drei Geraden aus einem Punkte, welche durch ihre Wurzeln bestimmt sind. Stellt die Gleichung

$$U = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 0$$

Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von den Coordinaten x_1', x_2'; x_1'', x_2''; x_1''', x_2''' dar, so ist nach der Theorie der Gleichungen

$$x_2'x_2''x_2''' : a_0 = -(x_1'x_2''x_2''' + x_1''x_2'''x_2' + x_1'''x_2'x_2'') : 3a_1$$
$$= (x_2'x_1''x_1''' + x_2''x_1'''x_1' + x_2'''x_1'x_1'') : 3a_2 = x_1'x_1''x_1''' : -a_3.$$

Wenn die Relationen $\frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial x_1} = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$,

$\frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial x_2} = a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 = 0$ gleichzeitig erfüllt sind,

so sind zwei der Wurzeln einander gleich; es findet diess also statt, wenn die Resultante dieser Gleichungen verschwindet, d. h. für die Coefficientenrelation

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) = 0.$$

Ihre entwickelte Form ist

$$a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_3 a_1^3 - 3 a_1^2 a_2^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 = 0.$$

und wir wollen sie in diesem und dem folgenden Artikel durch $\Delta = 0$ repräsentiren und sie wie üblich als Discriminante der cubischen Gleichung benennen. Für

$$= 2A_6 = 2(a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 3a_1 a_2 a_3), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_1} = 6A_5 = 6(a_3 a_1^2 - a_1 a_2^2 - a_0 a_2 a_3),$$

$$= 6A_4 = 6(a_0 a_2^2 - a_2 a_1^2 - a_0 a_1 a_3), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_3} = 2A_3 = 2(a_0^2 a_3 + 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2)$$

und $a_{02} = a_0 a_2 - a_1^2$, $2a_{03} = a_0 a_3 - a_1 a_2$, $a_{13} = a_1 a_3 - a_2^2$ ist $2\Delta = A_6 a_0 + 3A_5 a_1 + 3A_4 a_2 + A_3 a_3 = 8(a_{03}^2 - a_{02} a_{13})$ und für $\Delta = 0$ bestehen die Relationen $A_6 A_4 = A_5^2$, $A_6 A_3 = A_5 A_4$, $A_5 A_3 = A_4^2$, $A_6^2 = -4a_{13}^3$, $A_5^2 = -4a_{13} a_{03}^2$, $A_4^2 = -4a_{02} a_{03}^2$, $A_3^2 = -4a_{02}^3$; für das Doppelelement x_1, x_2 ergeben sich aber die Bestimmungen

$$x_1 : x_2 = A_6 : A_5 = A_5 : A_4 = A_4 : A_3 = -a_{13} : a_{03} = -a_{03} : a_{02}.$$

In den Coordinaten der durch die cubische Gleichung dargestellten Elemente, als für welche $U = (x_1 x_2' - x_1' x_2)(x_1 x_2'' - x_1'' x_2)(x_1 x_2''' - x_1''' x_2)$ ist, wird sie

$$= -\frac{(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')^2 (x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'')^2 (x_1''' x_2' - x_1' x_2''')^2}{27\, x_2'^4 x_2''^4 x_2'''^4}$$

Diess zeigt, dass die Wurzeln der cubischen Gleichung reell und verschieden, reell und paarweis gleich oder paarweis imaginär sind, je nachdem die Discriminante negativ, gleich Null oder positiv ist.

Die Gleichheit aller Wurzeln fordert die gleichzeitige Erfüllung der Relationen $\frac{1}{6}\frac{\partial^2 U}{x_1^2} = a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0$,

$$\tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \quad \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0$$

oder der Bedingungen

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0, \quad a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0, \quad a_1 a_3 - a_2^2 = 0,$$

von denen jede zwei die dritte nach sich ziehen.

Substituirt man in $U = 0$ für x_1 und x_2 die Werthe $l y_1 + m z_1$, $l y_2 + m z_2$, so erhält man die Gleichung

$$l^3 \left\{a_0 y_1^3 + 3a_1 y_1^2 y_2 + 3a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3\right\}$$
$$+ 3l^2 m \left\{z_1(a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2) + z_2(a_1 y_1^2 + 2a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2)\right\}$$
$$+ 3lm^2 \left\{y_1(a_0 z_1^2 + 2a_1 z_1 z_2 + a_2 z_2^2) + y_2(a_1 z_1^2 + 2a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2)\right\}$$
$$+ m^3 \left\{a_0 z_1^3 + 3a_1 z_1^2 z_2 + 3a_2 z_1 z_2^2 + a_3 z_2^3\right\} = 0,$$

die man schreiben kann $l^3 U_y + l^2 m \left\{\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y\right\}$ $+ lm^2 \left\{\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y\right\} + m^3 U_z = 0$ oder auch

$$l^3 U_y + l^2 m \left\{\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 U_z\right\} + lm^2 \left\{\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) U_z\right\}$$

$+ m^3 U_z = 0$, wenn man durch den dem Buchstaben U angehängten Index y oder z die Ersetzung der Variabeln x in der Form durch y oder z und durch $\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) U_z$ das Resultat der Ausführung der angegebenen Differentiationen an U_z, aber durch $\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 U_z$ das von $\left(y_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + y_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) U_z$ ausdrückt. Wenn die durch die Coordinaten y und z dargestellten Elemente β und γ heissen, so sind die Wurzeln unserer letztgeschriebenen cubischen Gleichung die drei Theilungsverhältnisse der Elemente α in Bezug auf das Paar β, γ, also

$$\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}, \frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2}, \frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3} \text{ oder } \frac{\sin\gamma\alpha_1}{\sin\beta\alpha_1}, \frac{\sin\gamma\alpha_2}{\sin\beta\alpha_2}, \frac{\sin\gamma\alpha_3}{\sin\beta\alpha_3},$$

jenachdem das durch $U = 0$ dargestellte Gebilde als eine Reihe von drei Punkten oder als ein Büschel von drei Strahlen angesehen wird.

Für $\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y = 0$ oder $\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 U_z = 0$ sind die Elemente β, γ so auf die α bezogen, dass $\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1} + \frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2} + \frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3} = 0$ ist und für die analoge Gruppe von Relationen $\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y = 0$ oder $\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) U_z = 0$

$$\text{so, dass } \frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2}\frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3} + \frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3}\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1} + \frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}\frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2} = 0 \text{ ist.}$$

Die erste Relation bestimmt zu dem Elemente von den Coordinaten y ein einziges Element z, die zweite aber zu jedem y zwei Elemente z, die den angegebenen Relationen der Theilverhältnisse entsprechen. Wenn das Element β also insbesondere

mit einem der Elemente α zusammenfällt, so fällt mit demselben auch das Element γ der ersten Relation und eines der Elemente γ der zweiten Relationen zusammen, während das andere dem Element β als conjugirt harmonisches Element in Bezug auf die beiden andern Elemente α entspricht. Da die harmonische Relation der Elemente β, γ zu den durch eine quadratische Gleichung bestimmten Elementen α_1, α_2 durch

$$\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1} + \frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2} = 0 \text{ oder } \frac{\sin\gamma\alpha_1}{\sin\beta\alpha_1} + \frac{\sin\gamma\alpha_2}{\sin\beta\alpha_2} = 0 \text{ und analytisch durch}$$

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y = 0 \text{ oder } \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) U_z = 0$$

ausgedrückt wird, so hat man in den vorher erhaltenen Beziehungen allgemein die Erweiterungen der harmonischen Relation oder der Bestimmung von Systemen harmonischer Pole und Polaren. In Bezug auf die drei Elemente $U = 0$ bestimmen die Gleichungen

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y = 0, \quad \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 U_z = 0$$

oder $(a_0 y_1^2 + 2 a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2) z_1 + (a_1 y_1^2 + 2 a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2) z_2 = 0$ zu dem Element y das harmonische Element z oder das harmonische System (Polarsystem) erster Ordnung; und ebenso die Gleichungen

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y = 0, \quad \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) U_z = 0$$

oder $(a_0 y_1 + a_1 y_2) z_1^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1 z_2 + (a_2 y_1 + a_3 y_2) z_2^2 = 0$ zu dem Element y die beiden Elemente z, welche das harmonische oder Polarsystem zweiter Ordnung bilden.

340. Die biquadratische Gleichung

$$U = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = 0$$

bestimmt vier Elemente einer Reihe oder eines Büschels α_1, α_2, α_3, α_4 von den Coordinaten x_1', x_2'; x_1'', x_2''; x_1''', x_2'''; x_1'''', x_2'''' und nach der Theorie der Gleichungen ist

$$x_2' x_2'' x_2''' x_2'''' : a_{40} = -(x_1' x_2'' x_2''' x_2'''' + x_1'' x_2''' x_2'''' x_2'$$
$$+ x_1''' x_2'''' x_2' x_2'' + x_1'''' x_2' x_2'' x_2''') : 4 a_{31} = (x_1' x_1'' x_2''' x_2''''$$
$$+ x_1'' x_1''' x_2'''' x_2' + x_1''' x_1' x_2'' x_2'''' + x_1' x_1'''' x_2'' x_2''' + x_1'' x_1'''' x_2' x_2'''$$
$$+ x_1''' x_1'''' x_2' x_2'') : 6 a_{22} = -(x_1' x_1'' x_1''' x_2'''' + x_1'' x_1''' x_1'''' x_2'$$
$$+ x_1''' x_1'''' x_1' x_2'' + x_1'''' x_1' x_1'' x_2''') : -4 a_{13} = x_1' x_1'' x_1''' x_1'''' : a_{04}.$$

Für $(x_1'' x_2''' - x_1''' x_2'')(x_1' x_2'''' - x_1'''' x_2') = D_1$, $(x_1''' x_2' - x_1' x_2''')$ $(x_1'' x_2'''' - x_1'''' x_2'') = D_2$, $(x_1' x_2'' - x_1'' x_2')(x_1''' x_2'''' - x_1'''' x_2''') = D_3$

ist $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ und die Quotienten $-D_3 : D_2$, $-D_2 : D_1$, $-D_1 : D_3$ drücken die drei fundamentalen Doppelverhältnisse der Gruppe $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ aus, nämlich $(\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4)$, $(\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4)$, $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ aus; die drei Wurzeln θ_1, θ_2, θ_3 der Gleichung
$\theta^3 + 3(D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2)\theta - (D_2 - D_3)(D_3 - D_1)(D_1 - D_2) = 0$
sind die Grössen $D_1 - D_2$, $D_2 - D_3$, $D_3 - D_1$, ihre Coefficienten aber symmetrische Functionen der Coefficienten von U, so dass sie die Form $\theta^3 - 36(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\theta - 432(a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3) = 0$ und für die Bezeichnungen
$J_{4,2} = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$, $J_{4,3} = a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 + 2a_2a_1a_3 - a_2^3$
die Form $\theta^3 - 36J_{4,2}\theta - 432J_{4,3} = 0$. Die Grössen $J_{4,2}$ und $J_{4,3}$ sind, da die Doppelverhältnisse durch lineare Transformationen ihre Werthe nicht ändern, **Invarianten der biquadratischen Form** und zwar die quadratische und cubische Invariante derselben, wie es durch ihre Indices angedeutet ist. Ihre Bedeutung erhellt daraus, dass für $J_{4,3} = 0$ nothwendig zwei der Grössen D einander gleich werden, so dass eines der drei fundamentalen Doppelverhältnisse den Werth -1 hat; und dass für $J_{4,2} = 0$ nothwendig $D_3 : D_2 = D_2 : D_1 = D_1 : D_3$ ist, so dass alle drei fundamentalen Doppelverhältnisse den nämlichen Werth haben. (Art. 338.) Der Gleichheit zweier Werthe von θ endlich entspricht nach dem vorigen Artikel die Relation $J_{4,2}^3 - 27\,J_{4,3}^2 = 0$, d. i. $\frac{1}{256}\,D_1^2 D_2^2 D_3^2 = 0$ und das Zusammenfallen zweier Wurzeln α der biquadratischen Gleichung; es ist also die zusammengesetzte Invariante $\Delta = J_{4,2}^3 - 27J_{4,3}^2$ die **Discriminante der biquadratischen Form**. Ihren entwickelten Ausdruck in Function der Coefficienten erhält man durch Elimination der Veränderlichen aus den für den Fall gleicher Wurzeln zugleich geltenden Bedingungen

$$\tfrac{1}{4}\,\frac{\partial U}{\partial x_1} = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 = 0,$$
$$\tfrac{1}{4}\,\frac{\partial U}{\partial x_2} = a_1x_1^3 + 3a_2x_1^2x_2 + 3a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3 = 0 \text{ mit}$$

$$\Delta = a_0^3a_4^3 - 12a_0^2a_1a_3a_4^2 - 18a_0^2a_2^2a_4^2 + 54\,a_0^2a_2a_3^2a_4 - 27\,a_0^2a_3^4$$
$$+ 54a_0a_1^2a_2a_4^2 - 6\,a_0a_1^2a_3^2a_4 - 180\,a_0a_1a_2^2a_3a_4 + 108\,a_0a_1a_2a_3^3$$
$$+ 81\,a_0a_2^4a_4 - 54a_0a_2^3a_3^2 - 27\,a_1^4a_4^2 + 108\,a_1^3a_2a_3a_4 - 64\,a_1^3a_3^3$$
$$- 54\,a_1^2a_2^3a_4 + 36\,a_1^2a_2^2a_3^2$$ oder in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} a_0a_2 - a_1^2, & a_0a_3 - a_1a_2, & a_0a_4 - a_1a_3 \\ a_0a_3 - a_1a_2, & a_0a_4 - a_2^2, & a_1a_4 - a_2a_3 \\ a_0a_4 - a_1a_3, & a_1a_4 - a_2a_3, & a_2a_4 - a_3^2 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Man erhält auch

$$J_{4,2}^3 : J_{4,3}^2 = -108(D_2D_3+D_3D_1+D_1D_2)^3 : (D_2-D_3)^2(D_3-D_1)^2(D_1-D_2)^2$$

und für δ als die Summe eines Paares der reciproken fundamentalen Doppelverhältnisse der Gruppe α

$108\,J_{4,3}^2(\delta - 1)^3 - J_{4,2}^3(\delta+2)(2\delta-5)^2 = 0$, so dass die Doppelverhältnisse der Gruppe nur von dem Verhältniss des Cubus und des Quadrats der beiden Invarianten abhängen. Das Auftreten von Gruppen gleicher Wurzeln in der biquadratischen Gleichung characterisirt sich gleichfalls durch diese Invarianten und ihre partiellen Differentiale.

Wenn man nun in $U=0$ für x_1 und x_2 die Werthe ly_1+mz_1, ly_2+mz_2 substituirt, so erhält man die Gleichung

$$l^4U_y + 4l^3m\left\{\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)U_y\right\} + 6l^2m^2\left\{\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2U_y\right\}$$
$$+ 4lm^3\left\{\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^3U_y\right\} + m^4U_z = 0 \text{ oder}$$
$$l^4U_y + 4l^3m\left\{\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^3U_z\right\} + 6l^2m^2\left\{\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2U_z\right\}$$
$$+ 4lm^3\left\{\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)U_z\right\} + m^4U_z = 0.$$

Wenn dann wieder die durch die Coordinaten y und z dargestellten Elemente β und γ heissen, so sind die Wurzeln der letztgeschriebenen biquadratischen Gleichung die Theilungsverhältnisse der Elemente α in Bezug auf das Paar β, γ, also

$\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}, \frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2}, \frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3}, \frac{\gamma\alpha_4}{\beta\alpha_4}$ oder $\frac{\sin\gamma\alpha_1}{\sin\beta\alpha_1}$, etc. Den Relationen

$$\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)U_y = 0 \text{ oder } \left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^3U_z = 0$$

entspricht die Beziehung $\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}+\frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2}+\frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3}+\frac{\gamma\alpha_4}{\beta\alpha_4} = 0$; den andern $\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2U_y=0$ oder $\left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2U_z=0$

ebenso $\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}.\frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2}+\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}.\frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3}+\text{etc.}=0$; und den letzten

$$\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^3U_y = 0 \text{ oder } \left(y_1\frac{\partial}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)U_z = 0$$

endlich $\frac{\gamma\alpha_1}{\beta\alpha_1}\frac{\gamma\alpha_2}{\beta\alpha_2}\frac{\gamma\alpha_3}{\beta\alpha_3}+\text{etc.}=0$. Die Relationen sind in entwickelter Form respective $(a_0y_1^3+3a_1y_1^2y_2+3a_2y_1y_2^2+a_3y_2^3)z_1$

$$+(a_1y_1^3+3a_2y_1^2y_2+3a_3y_1y_2^2+a_4y_2^3)z_2 = 0,$$

$(a_0y_1^2 + 2a_1y_1y_2 + a_2y_2^2)z_1^2 + 2(a_1y_1^2 + 2a_2y_1y_2 + a_3y_2^2)z_1z_2$
$+ (a_2y_1^2 + 2a_3y_1y_2 + a_4y_2^2)z_2^2 = 0, \ (a_0y_1 + a_1y_2)z_1^3$
$+ 3(a_1y_1 + a_2y_2)z_1^2z_2 + 3(a_2y_1 + a_3y_2)z_1z_2^2 + (a_3y_1 + a_4y_2)z_2^3 = 0$
und bestimmen je ein, zwei oder drei Elemente von den Coordinaten z, welche dem Element von den Coordinaten y als harmonische Polarsysteme erster, zweiter und dritter Ordnung in Bezug auf die Elemente der biquadratischen Gleichung entsprechen. Aus der Natur und Form dieser Relationen erhellt, dass für γ als harmonisches Element erster, zweiter oder dritter Ordnung von β auch β als harmonisches Element dritter, zweiter, erster Ordnung von γ folgt und dass das Zusammenfallen von β mit einem der Elemente α auch das Zusammenfallen je eines der harmonischen Elemente der verschiedenen Stufen mit demselben Elemente α nach sich zieht, während das zweite harmonische Element der zweiten und die beiden andern harmonischen Elemente der dritten Ordnung respective das harmonische Element erster Ordnung und die harmonischen Elemente zweiter Ordnung in Bezug auf das System der drei übrigen Elemente α bilden.

341. Wenn man in die allgemeine homogene Gleichung n^{ten} Grades mit zwei Veränderlichen die Substitutionen der vorigen Artikel macht, so lässt sich das Ergebniss auf Grund des Taylor'schen Theorems ganz ebenso wie vorher angeben: es ist in den äquivalenten Formen

$$l^n U_y + \frac{n}{1} l^{n-1} m \left\{\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} l^{n-2} m^2 \left\{\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y\right\} + \ldots + m^n U_z = 0,$$
$$l^n U_y + \frac{n}{1} l^{n-1} m \left\{\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-1} U_z\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} l^{n-2} m^2 \left\{\left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-2} U_z\right\} + \ldots + m^n U_z = 0$$

darstellen und liefert in

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) U_y = 0 \text{ oder } \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-1} U_z = 0,$$
$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2 U_y = 0 \text{ oder } \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^{n-2} U_z = 0,$$

etc. die Gleichungen der verschiedenen Polarsysteme; wenn eine derselben in Bezug auf die z vom Grade r ist, so ist sie in Bezug auf die y vom Grade $(n-r)$, sie stellt im ersten

Falle das Polarsystem r^{ter} Ordnung für den Pol y in Bezug auf das System der x, im zweiten Falle das Polarsystem $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung für den Pol z in Bezug auf das System der x dar. Dieser allgemeinen Ausdrucksweise entspricht die geometrische Characteristik; wonach das Polarsystem $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung eines gegebenen Systems von n Elementen x in Bezug auf ein Element z aus $(n - r)$ Elementen y besteht, für welche die Summe der Combinationen ihrer Theilverhältnisse zu $(n - r)$ den Werth Null hat.

Die entwickelte Form jener Gleichungen der verschiedenen Polarsysteme lässt sich durch ein Symbol von der Form $(a_y^{n-r} a_z^r) = 0$ ausdrücken, wenn in demselben die Klammer den Inbegriff der Producte bedeutet, die aus den verschiedenen Factoren r^{ten} Grades in z mit den Polynomen $(n - r)^{\text{ten}}$ Grades in y gebildet werden oder auch derer, die aus den verschiedenen Factoren $(n - r)^{\text{ten}}$ Grades in z mit den Polynomen r^{ten} Grades in y gebildet werden. Diese Symbolik begründet die folgenden Sätze: Gehört y zum Polarsystem $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung von z, so gehört z zum Polarsystem r^{ter} Ordnung von y. Das Polarsystem $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung wird als das erste, das Polarsystem $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung als das r^{te}, das Polarsystem erster Ordnung als das $(n - 1)^{\text{te}}$ bezeichnet, so dass das Originalsystem den Ursprung einer Reihe von Polarsystemen in der natürlichen Zählfolge bildet. Bildet man das p^{te} Polarsystem des Systems x für das Element u, das q^{te} des neuen Systems für das Element z, etc. und gelangt so endlich zu einer Gleichung vom Grade t, der ein Element y entspricht, so bleibt derselbe Zusammenhang noch bestehen, wenn man in irgend einer Weise gleichzeitig die Elemente $y, z, u, \ldots$ und die Ordnungszahlen $t, q, p, \ldots$ der Polarsysteme vertauscht. Denn in einem Product $a_y^p a_z^q a_u^t \ldots$ ist die Ordnung der Factoren gleichgültig. Weil ferner $a_y^p a_z^q a_z^t = a_y^p a_z^{q+t}$ ist, so hat man den Satz: Wenn man für das gegebene System das t^{te} Polarsystem in Bezug auf den Pol z und für das neue System das q^{te} Polarsystem in Bezug auf denselben Pol bildet, so ist das Letztere auch das $(t + q)^{\text{te}}$ Polarsystem des ersten für jenen Pol. Und weil $(a_y^{n-t-q} a_z^t a_u^q)$ sich nicht ändert, wenn man z mit u und t mit q vertauscht, so ist das q^{te} Polarsystem des Pols u für das t^{te} Polarsystem des Pols z auch das t^{te} Polarsystem des Pols z für das q^{te} Polarsystem des Pols u.

Das $(n - 1)^{\text{te}}$ Polarsystem ist von der ersten Ordnung; denkt

man das gegebene System aus einem Elemente $b_x = 0$ und einem System von $(n-1)$ Elementen $(c_x^{n-1}) = 0$ gebildet, so ist $n(a_y a_z^{n-1}) = b_y (c_z^{n-1}) + (n-1) b_z (c_y c_z^{n-2})$; für $b_y = 0$ u. $(c_y c_z^{n-2}) = 0$ ist also auch $(a_y a_z^{n-1}) = 0$, d. h. die $(n-2)^{te}$ Polare eines Systems von $(n-1)$ Elementen ist auch die $(n-1)^{te}$ Polare des Systems, welches aus jenen $(n-1)$ Elementen und ihm selbst gebildet wird.

Fallen p Elemente des gegebenen Systems zusammen, so enthält das r^{te} Polarsystem eines beliebigen Elements $(a_y^{n-r} a_z^r) = 0$ das betreffende Element $(p-r)$ mal. Ist das vielfache Element c_z zugleich der Pol, so folgt aus $(a_x^n) = c_x^p (b_x^{n-p})$ durch Bildung des r^{ten} Polarsystems $(a_y^{n-r} a_z^r) = \text{Const.}\ c_y^p (b_y^{n-p-r} b_z^r)$, d. h. das r^{te} Polarsystem des vielfachen Elements selbst besteht aus diesem Element als einem $p$fachen und aus der r^{ten} Polare desselben in Bezug auf die übrigen $(n-p)$ Elemente des Systems. Für $p + r > n$ wird $(a_y^{n-r} a_z^r) = 0$ zur Identität und das Polarsystem wird unbestimmt.

Wenn man unter (a_y^n) die Form U_y und durch U_i, U_{ij} ihre ersten und zweiten Differentiale nach der Veränderlichen y_i, y_i und y_j ausdrückt, wie folgt: $U_i = \frac{1}{n} \frac{\partial (U_y)}{\partial y_i}$, $U_{ij} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 (U_y)}{\partial y_i \partial y_j}$, so erhält das erste Polarsystem oder das Polarsystem $(n-1)^{ter}$ Ordnung von z den Ausdruck $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ und man kann in einer analogen Weise auch die übrigen Polarsysteme darstellen. Diese Darstellung führt zur bequemen Erläuterung weiterer wichtiger Functionen. Wir verfolgen sie zunächst an dem Beispiel der cubischen und biquadratischen Formen.

342. Das Polarsystem zweiter Ordnung oder das erste Polarsystem einer cubischen Form, welches die Gleichung

$$(a_0 y_1 + a_1 y_2) z_1^2 + 2 (a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1 z_2 + (a_2 y_1 + a_3 y_2) z_2^2 = 0$$

ausdrückt (Art. 339), reducirt sich für gewisse Pole y auf ein Paar zusammenfallender Elemente oder auf ein Doppelelement z; diese Pole sind bestimmt durch die Bedingung der Gleichheit der Wurzeln der vorigen Gleichung, d. h. durch

$$(a_0 y_1 + a_1 y_2)(a_2 y_1 + a_3 y_2) - (a_1 y_1 + a_2 y_2)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$(a_0 a_2 - a_1^2) y_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) y_1 y_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) y_2^2 = 0.$$

Da die obige Gleichung des ersten Polarsystems nach dem Schluss des vorigen Art. auch durch $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ dargestellt ist, so erhält man die Bedingung der Gleichheit der Wurzeln z durch Elimination von z zwischen den Differentialen $U_{11} z_1 + U_{12} z_2 = 0$,

$U_{21}z_1 + U_{22}z_2 = 0$, also in der Form $U_{11}U_{22} - U_{12}^2 = 0$; wir wollen schreiben $H = 0$. Wenn man zwischen denselben Gleichungen die y eliminirt, so erhält man eine andere Gleichung $\mathbf{H} = 0$ vom zweiten Grade in den z, wie die vorige in y. Es giebt also für jedes System von drei Elementen eine Gruppe von zwei Polen, deren Polarsystem zweiter Ordnung je ein Doppelelement bildet und diese Doppelelemente sind durch die Gleichung $H \equiv U_{11}U_{22} - U_{12}^2 = 0$ bestimmt. Da die Gleichung $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ auch das erste Polarsystem für ein allgemeines System von n Elementen darstellt, so führt die Elimination der Veränderlichen zwischen ihren Differentialen für jedes System zur Bestimmung der $(2n-4)$ Pole $(\mathbf{H} = 0)$, deren Polarsysteme Doppelelemente besitzen und zur Bestimmung dieser Doppelelemente selbst; ihr Ausdruck ist allgemein $U_{11}U_{22} - U_{12}^2 = 0$ oder $H = 0$. Da die Lage dieser Doppelelemente nur von dem gegebenen System, aber nicht von der besonderen Art seiner Beziehung auf gegebene feste Elemente abhängig sein kann, so ist die analytische Verbindung von H und U von der Art, dass sie durch eine lineare Transformation der Veränderlichen nicht gestört wird, d. h. das ursprüngliche H geht aus dem ursprünglichen U als dieselbe Function seiner Coefficienten und der Veränderlichen hervor, wie das transformirte H aus dem transformirten U. Solche Functionen heissen **Covarianten** der Function U und die in Rede stehende bezeichnen wir nach ihrem Entdecker als die **Hesse'sche Covariante** des Systems. Als allgemeines Symbol einer Covariante könnten wir $C_{n,\nu}$ benutzen, wo n den Grad der gegebenen Form und ν den der Covariante in den Veränderlichen bezeichnet; H ist dann identisch mit $C_{n,2n-4}$. Die Hesse'sche Covariante für eine binäre quadratische Form ist die Discriminante derselben.

Es giebt ferner Pole, deren erste Polaren für das gegebene System ihre Polare für das System der beiden Doppelelemente als Element enthalten; sie bestimmen sich durch das Zusammenbestehen der Gleichungen $U_1 z_1 + U_2 z_2 = 0$ und $H_1 z_1 + H_2 z_2 = 0$ und die Elimination der z zwischen diesen Gleichungen liefert eine Gleichung $T \equiv U_1 H_2 - U_2 H_1 = 0$ vom dritten Grade, während die Elimination der y zwischen ihnen auf eine andere Gleichung vom dritten Grade $(\mathbf{T} = 0)$ führt. Man hat für die cubische Gleichung

$$T = \begin{vmatrix} a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2, & a_1 y_1^2 + 2a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2 \\ 2(a_0 a_2 - a_1^2) y_1 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) y_2, & (a_0 a_3 - a_1 a_2) y_1 + 2(a_1 a_3 - a_2^2) y_2 \end{vmatrix}$$

oder $T=(a_0^2a_3+2a_1^3-3a_0a_1a_2)y_1^3+3(a_1^2a_2+a_0a_1a_3-2a_0a_2^2)y_1^2y_2$ $+3(a_1^2a_3-a_0a_2a_3-a_1a_2^2)y_1y_2^2+(a_1a_2a_3-2a_2^3-a_0a_3^2)y_2^3=0$ als Gleichung dieser gemeinschaftlichen Elemente.

Und wieder gelten dieselben Betrachtungen allgemein; für das System von n Elementen giebt es Elemente, deren erste Polaren ($(n-1)^{ter}$ Ord.) für das gegebene System mit ihren ersten Polaren ($(2n-5)^{ter}$ Ord.) für das System der durch die Hesse'sche Covariante ausgedrückten Doppelelemente ein gemeinschaftliches Element haben. Die Elimination zwischen den Gleichungen von jenen, d. i. allgemein zwischen $U_1z_1+U_2z_2=0$ und $H_1z_1+H_2z_2=0$ liefert die sie und diese gemeinschaftlichen Elemente bestimmenden Gleichungen $\mathbf{T}=0$ und $T=U_1H_2-U_2H_1=0$, welche beide vom Grade $(3n-6)$ sind. Diesen gemeinsamen Elementen entspricht eine Covariante vom $(3n-6)^{ten}$ Grade, die man als die Jacobi'sche Covariante von U und H bezeichnet. Ihr allgemeines Symbol wäre $C_{n,3n-6}$.

Wenn man die Elemente der Hesse'schen Covariante y_1, y_2 zu den Fundamentalen wählt, so dass diese selbst sich auf das Product $y_1\,y_2$ reducirt, so muss $a_1=a_2=0$ sein und man erhält die gleichzeitigen einfachen Ausdrücke der cubischen Form, ihrer Discriminante und ihrer Covarianten $U=a_0y_1^3+a_3y_2^3$, $\varDelta=J_{3,4}=a_0^2a_3^2$, $H=C_{3,2}=a_0a_3y_1y_2$, $T=C_{3,3}=a_0a_3(a_0y_1^3-a_3y_2^3)$, aus ihnen aber die allgemeingültige Relation

$$J_{3,4}U=C_{3,3}^2+4C_{3,2}^3 \text{ oder } \varDelta U=T^2+4H^3.$$

Zugleich liefert jene reducirte Form eine geometrische Beziehung der Elemente der Hesse'schen Covariante zu denen der Originalform. Denn für $\sqrt[3]{-a_3:a_0}=\alpha$ und θ, θ^2 als die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit sind $y_1-\alpha y_2=0$, $y_1-\alpha\theta y_2=0$, $y_1-\alpha\theta^2y_2=0$ die drei Elemente α_1, α_2, α_3 der gegebenen cubischen Form und die drei fundamentalen Doppelverhältnisse der Gruppen η_1, α_1, α_2, α_3 und η_2, α_1, α_2, α_3 sind respective sämmtlich gleich $-\theta$ im einen und gleich $-\theta^2$ im andern Falle. Beispielsweise ist $(\eta_1\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=\frac{\theta}{\theta^2}:\frac{\theta-1}{\theta^2-1}=-\theta$. Die Elemente der Hesse'schen Covariante sind daher diejenigen Elemente, welche mit denen der cubischen Form selbst Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bestimmen. Da die Zeichenänderung von α im Vorigen die Elemente der cubischen Covariante liefert, so

bilden die Elemente der cubischen Form und die ihrer cubischen Covariante drei Paare von Elementen, welche in Bezug auf das Paar der quadratischen Covariante einander harmonisch conjugirt sind oder jene sechs Elemente bilden eine Involution, welche diese Letzteren zu Doppelelementen hat. Und überdiess erkennt man, dass die cubische Covariante der cubischen Form die drei Elemente repräsentirt, von denen jedes zu einem Elemente der Form in Bezug auf ihre beiden andern Elemente conjugirt harmonisch ist. Denn das Element, welches mit $y_1 - \alpha y_2 = 0$ zu $y_1 - \alpha\theta y_2 = 0$ und $y_1 - \alpha\theta^2 y_2 = 0$ conjugirt harmonisch ist, ist $y_1 + \alpha y_2 = 0$.

Aufg. Wenn ein Kegelschnitt einem Dreieck so umgeschrieben ist, dass die drei Geraden, welche den Tangenten desselben in den Ecken des Dreiecks in Bezug auf die anstossenden Seiten harmonisch conjugirt sind, in einem Punkte zusammentreffen, so bestimmen die von diesem Punkte ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts mit jenen zwei Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen.

Für den Kegelschnitt $x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0$ sind die Tangenten in den Ecken durch $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ und ihre harmonisch conjugirten durch $x_2 - x_3 = 0$, etc. dargestellt; dieselben gehen durch den Punkt $x_1 = x_2 = x_3$ und ihre Schnitte mit $x_3 = 0$ sind durch $x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0$ dargestellt. Das Tangentenpaar von jenem Punkte an den Kegelschnitt ist (Art. 326) durch $(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = 0$ und ihre Schnitte mit $x_3 = 0$ also durch $x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 0$ ausgedrückt Diess ist aber die Hesse'sche Covariante einer cubischen Form für $a_0 = a_3 = 0$, $3a_1 = 1$, $3a_2 = -1$ also der Form $x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 = 0$. Der dualistisch entsprechende Satz kann ebenso bewiesen werden.

343. Die Hesse'sche und die Jacobi'sche Covariante sind schon im Vorigen als Covarianten nachgewiesen worden, welche jede binäre Form von einer die zweite übersteigenden Ordnungszahl besitzt; wir entwickeln sie für die biquadratische Form und unterwerfen sie einer kurzen Betrachtung. Wenn das erste Polarsystem der biquadratischen Form, welches die Gleichung

$(a_0 y_1 + a_1 y_2) z_1^3 + 3(a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1^2 z_2 + 3(a_2 y_1 + a_3 y_2) z_1 z_2^2 + (a_3 y_1 + a_4 y_2) z_2^3 = 0$ darstellt, ein Doppelelement hat, so dass gleichzeitig die Relationen

$$(a_0 y_1 + a_1 y_2) z_1^2 + 2(a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1 z_2 + (a_2 y_1 + a_3 y_2) z_2^2 = 0,$$
$$(a_1 y_1 + a_2 y_2) z_1^2 + 2(a_2 y_1 + a_3 y_2) z_1 z_2 + (a_3 y_1 + a_4 y_2) z_2^2 = 0$$

erfüllt sind, so ist die Resultante dieser Gleichungen oder die

Discriminante der vorigen Gleichung oder die Hesse'sche Covariante der Form selbst gleich Null, d. h.

$$\{(a_0 a_3 - a_1 a_2) y_1^2 + (a_0 a_4 - a_1 a_3) y_1 y_2 + (a_1 a_4 - a_2 a_3) y_2^2\}^2$$
$$= \{(a_0 a_2 - a_1^2) y_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) y_1 y_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) y_2^2\}$$
$$\{(a_1 a_3 - a_2^2) y_1^2 + (a_1 a_4 - a_2 a_3) y_1 y_2 + (a_2 a_4 - a_3^2) y_2^2\}$$

und in entwickelter Form

$$(a_0 a_2 - a_1^2) y_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) y_1^3 y_2 + (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) y_1^2 y_2^2$$
$$+ 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) y_1 y_2^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) y_2^4 = 0 \text{ oder } H \text{ d. i. } C_{4,4} = 0.$$

Sie ist zugleich die Hesse'sche Covariante des ersten Polarsystems der biquadratischen Form und bezeichnet daher nicht nur die Doppelemente des ersten Polarsystems der Form, sondern auch diejenigen Elemente, die mit den drei Elementen dieses Polarsystems je ein System von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bilden.

Die Jacobi'sche Covariante von U und H oder $T = U_1 H_2 - U_2 H_1 = 0$ ist in entwickelter Form

$$(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) y_1^6 + (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) y_1^5 y_2$$
$$+ (5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3) y_1^4 y_2^2 + (10 a_1^2 a_4 - 10 a_0 a_3^2) y_1^3 y_2^3$$
$$+ (15 a_1 a_2 a_4 - 5 a_0 a_3 a_4 - 10 a_1 a_3^2) y_1^2 y_2^4 + (9 a_2^2 a_4 - a_0 a_4^2 - 2 a_1 a_3 a_4$$
$$- 6 a_2 a_3^2) y_1 y_2^5 + (3 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2 a_3^3) y_2^6$$

und bestimmt durch Gleichsetzung mit Null jene sechs Elemente, in welchen ein Element des ersten Polarsystems in Bezug auf das System der biquadratischen Form selbst mit einem Elemente des ersten Polarsystems in Bezug auf das System der Hesse'schen Covariante derselben zusammenfällt; nach dem Vorigen bildet jedes von ihnen mit den Elementen des ersten Polarsystems eine harmonische Gruppe.

Für $a_1 = a_3 = 0$ reduciren sich die Invarianten und Covarianten der biquadratischen Form und diese selbst auf die Formen

$$U = a_0 y_1^4 + 6 a_2 y_1^2 y_2^2 + a_4 y_2^4, \quad J_{4,2} = a_0 a_4 + 3 a_2^2, \quad J_{4,3} = a_0 a_2 a_4 - a_2^3,$$
$$H = C_{4,4} = a_0 a_2 y_1^4 + (a_0 a_4 - 3 a_2^2) y_1^2 y_2^2 + a_2 a_4 y_2^4.$$
$$T = C_{4,6} = (a_0^2 a_4 - 9 a_0 a_2^2) y_1^5 y_2 + (9 a_2^2 a_4 - a_0 a_4^2) y_1 y_2^5$$
$$= (a_0 a_4 - 9 a_2^2)(a_0 y_1^4 - a_4 y_2^4) y_1 y_2.$$

Man findet aus diesen reducirten Formen die allgemein gültige Relation $\quad C_{4,6}^2 = J_{4,2} C_{4,4} U^2 - J_{4,3} U^3 - 4 C_{4,4}^3.$

Aber für die durch diese Reduction gegebene Beziehung auf die fundamentalen Elemente ergiebt sich nach der Form von U und H, dass sie in Factoren von der Form $y_1^2 - \mu y_2^2 = 0$, $y_1^2 - \nu y_2^2 = 0$

zerlegbar sind, während zugleich die Covariante T drei Paare $y_1 y_2 = 0$, $y_1^2 - \lambda y_2^2 = 0$, $y_1^2 + \lambda y_2^2 = 0$ repräsentirt und diess giebt den Satz: Die vier Elemente einer biquadratischen Form und ebenso die ihrer Hesse'schen Covariante bestimmen drei Involutionen, und die drei Paare ihrer Doppelelemente — welche für beide dieselben sind und die durch die Vergleichung der Covariante $C_{4,6}$ mit Null bestimmt werden — sind in solcher gegenseitiger Beziehung, dass jedes von ihnen für die Involution der beiden andern das Paar der Doppelelemente ist.

344. Denken wir durch $U=0$, $V=0$ oder durch $(a_x^n)=0$ und $(b_x^n)=0$ zwei binäre Formen n^{ten} Grades repräsentirt, und durch sie zwei Systeme von Elementen in Gebilden erster Stufe ausgedrückt, so giebt die Gleichung $(a_x^n) + \lambda (b_x^n) = 0$ für λ als einen veränderlichen Parameter eine Reihe von Elementargruppen, welche je aus n Elementen bestehen und deren jede durch eines ihrer Elemente bestimmt ist, während offenbar das ganze System durch jede zwei seiner Gruppen von n Elementen bestimmt ist. Man nennt es ein involutorisches System vom n^{ten} Grade. Die ersten Polarsysteme eines gegebenen Systems n^{ten} Grades bilden eine Involution vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Unter seinen Gruppen giebt es solche, welche Doppelelemente enthalten; mit der Bezeichnung $U_i = \frac{1}{n}\frac{\partial (a_x^n)}{\partial x_i}$, $V_i = \frac{1}{n}\frac{\partial (b_x^n)}{\partial x_i}$ (Art. 341) entsprechen diese der gleichzeitigen Erfüllung der beiden Gleichungen $U_1 + \lambda V_1 = 0$, $U_2 + \lambda V_2 = 0$ oder sind bestimmt durch die Gleichung $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades $U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0$; die Elimination der x giebt eine Gleichung von demselben Grade zur Bestimmung der entsprechenden Werthe von λ. Die Gleichung dieser Doppelelemente ist die Jacobi'sche Determinante der Functionen U und V und natürlich eine Covariante derselben; die Bestimmung der Doppelelemente in der quadratischen Involution, die in Art. 336 gegeben wurde, ist der einfachste specielle Fall davon. Die Zahl der Doppelelemente der oben erwähnten Involution der ersten Polarsysteme ist $2n - 4$, wie im Art. 342 gefunden ist.

Man nennt zwei Involutionen projectivisch, wenn der veränderliche Parameter λ in beiden derselbe ist, der ihre entsprechenden Gruppen bestimmt. Die Gleichungen

$(a_x^n) + \lambda (b_x^n) = 0$, $(c_x^m) + \lambda (d_x^m) = 0$ repräsentiren zwei projectivische Involutionen. Darnach gilt der Satz: Wenn man von einem involutorischen System ausgehend und eine beliebige Zahl fester Pole benutzend die Polarsysteme derselben Stufe nach einander für alle Gruppen des Systems bildet, so sind alle Reihen dieser Systeme involutorisch und diese Involutionen zu einander projectivisch. Die ersten Polarsysteme irgend zweier Systeme bilden projectivische Involutionen, in denen je zwei entsprechende Gruppen demselben Pol entsprechen. Da die $(n-1)^{\text{ten}}$ Polarsysteme insbesondere Gebilde erster Stufe, nämlich einfache Punktreihen oder Strahlbüschel sind, so soll das Doppelverhältniss von irgend vier Elementen dieser Reihe auch das der entsprechenden Gruppen der gegebenen Involution oder der für ein beliebiges Element gebildeten Polarsysteme heissen. Da dasselbe nur von den Werthen der λ abhängig ist, so erhält man den Satz: Das Doppelverhältniss einer Involution von vier Gruppen, welche durch Polarisirung aus vier Gruppen einer gegebenen Involution entstanden sind, ist gleich dem Doppelverhältniss der Letzteren und von dem als Pol benutzten Element unabhängig.

In projectivischen Involutionen giebt es entsprechende Gruppen, welche ein Element gemein haben und da sie durch die Gleichung $(a_x^n)(d_x^m) - (b_x^n)(c_x^m) = 0$ bestimmt werden, die aus der Elimination des Parameters zwischen den Gleichungen der Involutionen entspringt, so ist ihre Anzahl für zwei Involutionen von den respectiven Graden m und n gleich $(m+n)$.

Man darf diess auch so aussprechen und kann es ganz ebenso beweisen, wie den Satz des Art. 298, 299: W e n n i n e i n e m G e b i l d e e r s t e r S t u f e z w e i R e i h e n v o n E l e m e n t e n s i c h g e g e n s e i t i g s o e n t s p r e c h e n, d a s s j e d e m E l e m e n t d e r e r s t e n n E l e m e n t e d e r z w e i t e n u n d j e d e m E l e m e n t d e r z w e i t e n m E l e m e n t e d e r e r s t e n e n t s p r e c h e n, s o e x i s t i r e n $(m+n)$ E l e m e n t e, w e l c h e m i t i h r e n j e d e s m a l i g e n e n t s p r e c h e n d e n z u s a m m e n f a l l e n. Denn für λ, λ' als die Theilverhältnisse entsprechender Elemente in Bezug auf zwei feste Elemente des Systems ist der algebraische Ausdruck der ausgesprochenen Beziehung von der Form

$(a_0 \lambda'^m + a_1 \lambda'^{m-1} + \text{etc.}) \lambda^n + \text{etc.} = 0$ und liefert für $\lambda = \lambda'$ eine Gleichung vom Grade $(m+n)$ zur Bestimmung von λ.

Wenn die Formen (a_x^n) und (b_x^n) einen Factor vom Grade p

gemeinsam haben, so gehören die entsprechenden Elemente jeder Gruppe der Involution an und dieselbe besteht aus p festen Elementen und einer Involution vom $(n - p)^{\text{ten}}$ Grade; wenn das Nämliche mit den Formen (c_x^{m}) und (d_x^{m}) für einen Factor vom Grade p' der Fall ist, so zerfällt die Gleichung der beiden Involutionen der gemeinschaftlichen Elemente $(a_x^{n})(d_x^{m}) - (b_x^{n})(c_x^{m}) = 0$ in die Factoren von den Graden p und p' und einen Factor vom Grade $m + n - (p + p')$.

Enthält eine bestimmte Gruppe der einen involutorischen Reihe einen Factor p fach, die entsprechende Gruppe der andern denselben Factor q fach, so tritt das betreffende Element mit der Vielfachheit der kleinern von diesen beiden Zahlen in die Gruppe der gemeinsamen Elemente der Involutionen ein.

Aufg. 1. Man zeige die harmonische Theilung der Doppelelemente durch die Paare der quadratischen Involution.

Die Gleichung der quadratischen Involution $(a_x^2) + \lambda(b_x^2) = 0$ oder $(a_{11} + \lambda b_{11}) x_1^2 + 2(a_{12} + \lambda b_{12}) x_1 x_2 + (a_{22} + \lambda b_{22}) x_2^2 = 0$ liefert für die beiden aus $(a_{11} + \lambda b_{11})(a_{22} + \lambda b_{22}) = (a_{12} + \lambda b_{12})^2$ entspringenden Werthe λ', λ'' von λ zusammenfallende Elemente. Für sie gelten die Identitäten nach x $(a_x^2) + \lambda'(b_x^2) = \alpha_x^2$, $(a_x^2) + \lambda''(b_x^2) = \beta_x^2$ und man erhält aus ihnen und der Gleichung der Involution durch Elimination der (a_x^2), (b_x^2) $\alpha_x^2(\lambda - \lambda'') - \beta_x^2(\lambda - \lambda') = 0$ oder $\alpha_x^2 - \mu\beta_x^2 = 0$, d. h. $(\alpha_x + \beta_x\sqrt{\mu})(\alpha_x - \beta_x\sqrt{\mu}) = 0$, welche projectivische Reihen von der angegebenen Eigenschaft darstellen, so lange nicht $\lambda' = \lambda''$ ist, in welchem Falle die Involution sich in ein Element und ein einfaches Gebilde auflöst.

Aufg. 2. Zwei quadratische Involutionen besitzen eine gemeinsame Gruppe von Elementen.

Wenn x, y die Elemente derselben sind, und beide Gruppen auf ihre Doppelelemente α_x, β_x; γ_y, δ_y bezogen sind, so gelten für diess gemeinsame Paar die Gleichungen
$\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$, $\gamma_x + \mu\delta_x = 0$, $\alpha_y - \lambda\beta_y = 0$, $\gamma_y - \mu\delta_y = 0$ und die Elimination der λ und μ zwischen diesen Paaren giebt die Gleichungen
$0 = \alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x = 2\alpha_1\beta_1 x_1 y_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2\alpha_2\beta_2 x_2 y_2$,
$0 = \gamma_x\delta_y + \gamma_y\delta_x = 2\gamma_1\delta_1 x_1 y_1 + (\gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2\gamma_2\delta_2 x_2 y_2$,
aus denen folgt $2x_1 y_1 : (x_1 y_2 + x_2 y_1) : 2x_2 y_2 = A_{11} : A_{12} : A_{22}$ und damit
$x_1 y_1 = m A_{11}$, $x_2 y_2 = m A_{22}$, $x_1 y_2 = m(A_{12} + \sqrt{A_{11} A_{22} - A_{12}^2})$, $x_2 y_1 = m(A_{12} - \sqrt{A_{11} A_{22} - A_{12}^2})$ zur Bestimmung derselben.

Aufg. 3. Wenn zwei projectivische Gruppen von Elementen desselben Grundgebildes erster Stufe, von denen die eine aus einfachen Elementen, die andere aus Paaren in Involution besteht, so gelegen sind, dass die Doppelelemente des involutorischen Systems mit den drei gemeinschaftlichen Elementen beider Gruppen Systeme von gleichen fundamentalen

Doppelverhältnissen bilden, so entspricht jedes der Doppelelemente als Element der zweiten Gruppe dem andern als Element der ersten Gruppe.

Die Gruppen sind durch $x_1 + \lambda x_2 = 0$, $(a_1 + \lambda a_2) y_1^2 + (b_1 + \lambda b_2) y_2^2 = 0$ darstellbar und die gemeinschaftlichen Elemente also durch $a_2 x_1^3 - a_1 x_1^2 x_2 + b_2 x_1 x_2^2 - b_1 x_2^3 = 0$. Damit ihre Hesse'sche Covariante $(3 a_2 b_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_1 b_2 - 9 a_2 b_1) x_1 x_2 + (3 a_1 b_1 - b_2^2) x_2^2 = 0$ sich auf $x_1 x_2 = 0$ reducire, müssen die Bedingungen $3 a_2 b_2 = a_1^2$, $3 a_1 b_1 = b_2^2$ erfüllt sein, was nur durch $a_1 = 0$, $b_2 = 0$ geschehen kann, wenn nicht gleichzeitig $a_1 b_2 = 9 a_2 b_1$ werden darf. Dann wird aber die Gleichung der gemeinschaftlichen Elemente $a_2 x_1 y_1^2 - a_1 x_2 y_2^2 = 0$ und diese beweist den Satz.

Aufg. 4. Unter welcher Bedingung sind die Elemente einer cubischen Form U conjugirt harmonisch zu denen einer andern V?

Wenn die Coefficienten der einen Form durch a, die der andern durch b bezeichnet werden, so ist die Bedingung $a_0 b_3 - a_3 b_0 + 3 a_2 b_1 - 3 a_1 b_2 = 0$. Wenn man die Coefficienten der cubischen Covarianten beider Formen abkürzend durch A_3, A_4, A_5, A_6; B_3, B_4, etc. bezeichnet (Art. 339; nur zwei Zeichenwechsel unterscheiden sie von den Differentialen der Discriminante) und ebenso die der quadratischen Covarianten durch a_{02}, a_{03}, a_{13}; a_{02}', etc. so sind auch $A_3 b_3 - A_6 b_0 + 3 A_5 b_1 - 3 A_4 b_2 = 0$, $a_3 B_3 - a_6 B_0 + 3 a_5 B_1 - 3 a_4 B_2 = 0$; $A_3 B_6 - A_6 B_3 + 3 A_5 B_4 - 3 A_4 B_5 = 0$; $a_{02} b_{13} + a_{13} b_{02} - 2 a_{03} b_{03} = 0$ Invarianten und ihre geometrische Bedeutung ist die folgende: Die beiden ersten drücken durch ihr Verschwinden aus, dass die drei den Elementen der einen Form in Bezug auf die jedesmaligen beiden andern conjugirten Elemente eine Gruppe bilden, welche in Bezug auf die drei Elemente der andern Form conjugirt harmonisch ist, wie oben; die dritte giebt durch ihr Verschwinden die Bedingung, unter welcher die beiden Systeme harmonisch conjugirter Elemente zu den Elementen jedes Systems in Bezug auf die jedesmaligen beiden andern zu einander harmonisch sind; und die letzte giebt die Bedingung, unter welcher die beiden Paare der Elemente der Hesse'schen Covarianten beider Formen mit einander ein harmonisches System bilden.

Aufg. 5. Die Jacobi'sche Determinante der beiden Hesse'schen Covarianten der cubischen Formen ist eine Covariante derselben, durch deren Verschwinden das Elementenpaar bestimmt ist, welches zu beiden Paaren der Hesse'schen Covarianten harmonisch conjugirt ist, oder deren jedes mit den Elementen der cubischen Formen selbst Systeme von gleichen fundamentalen Doppelverhältnissen bildet.

Aufg. 6. Wenn $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ drei cubische Formen in Involution sind, und die Coefficienten derselben durch a, b, c respective bezeichnet werden, so sind die vier Determinanten des Systems gleich Null

$$\left\| \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \\ c_0, & c_1, & c_2, & c_3 \end{matrix} \right\|.$$

Einundzwanzigstes Kapitel.

Von den Invarianten und Covarianten der Systeme von Kegelschnitten oder ternären Formen.

---

345. Im Vorigen ist erwiesen, dass die wichtigsten Eigenschaften der geometrischen Elementarformen oder der Büschel und Reihen aus Functionen hervorgehen, die durch Coordinatentransformation und allgemeiner durch lineare Transformationen nur durch Hinzutreten eines dem Quadrat der Substitutionsdeterminante gleichen Factors geändert werden. So war die Discriminante des Art. 334 und die Bedingung der harmonischen Relation im Art. 335 und die Functionen Δ und $J_{4,2}$, $J_{4,3}$ der Art. 339, 340; so auch die die Doppelelemente der Involution darstellende Jacobi'sche Determinante im Art. 336, 337 und allgemeiner des Art. 344, oder die Functionen H und T der Art. 342, 343; sie hatten den gemeinsamen Charakter, dass die auf die transformirte Form bezüglichen, ganz in gleicher Weise aus ihren Coefficienten wie aus denen der ursprünglichen gebildeten Functionen von jenen, die sich auf die Originalform beziehen, nur um einen constanten Factor unterschieden sind. Wir nannten jene Functionen, welche nur die Coefficienten der betrachteten algebraischen Formen enthielten, Invarianten und diejenigen, welche selbst Functionen der Veränderlichen sind, Covarianten derselben. Wir übertragen dieselben Begriffe und Benennungen nun auf das Gebiet der homogenen Formen mit drei Veränderlichen.

Invarianten sind allgemein analytische Ausdrucksformen von Eigenschaften der durch die Gleichungen dargestellten geometrischen Gebilde für sich allein betrachtet; Covarianten repräsentiren selbst geometrische Gebilde, welche mit den gegebenen eine Relation besitzen, die ebenso wie jene Eigenschaft durch lineare Transformationen unzerstörbar ist. Die Auffindung dieser Functionen ist von entscheidender Wichtigkeit für die Lösung der allgemeinsten Probleme der analytischen Geometrie. Wir haben sie im Folgenden für die allgemeinen homogenen Gleichungen zweiten Grades mit drei Veränderlichen zu entwickeln und

ihre Benutzung zu zeigen. Die Discriminante der allgemeinen Gleichung ist als eine Function solcher Art schon mehrfach charakterisirt und so wie im Art. 336 aus der Discriminante Δ der binären Form die Invariante Θ der harmonischen Theilung hervorging, so werden wir im Folgenden aus der Discriminante Δ die übrigen Invarianten der Systeme von Curven zweiten Grades entspringen sehen. Wir beweisen aber vorher rein analytisch den Invariantencharakter dieser Discriminante Δ, wie folgt: Wenn die Function

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

durch die linearen Substitutionen $x_1 = \beta_1'y_1 + \beta_1''y_2 + \beta_1'''y_3$, $x_2 = \beta_2'y_1 + \beta_2''y_2 + \beta_2'''y_3$, $x_3 = \beta_3'y_1 + \beta_3''y_2 + \beta_3'''y_3$ in die Form

$$b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 + 2b_{13}y_1y_3 + 2b_{23}y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0$$

übergeführt wird, so geht die Discriminante Δ derselben

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \text{ in } \bar{\Delta} \text{ oder } \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{32} \end{vmatrix} \text{ über und}$$

man hat $\bar{\Delta} = \Delta \, . \, r^2$ für r als die Determinante der Substitution

$$\text{oder } \begin{vmatrix} \beta_1', & \beta_1'', & \beta_1''' \\ \beta_2', & \beta_2'', & \beta_2''' \\ \beta_3', & \beta_3'', & \beta_3''' \end{vmatrix}. \text{ Man hat nämlich zuerst}$$

$$\Delta \, . \, r = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1', & \beta_1'', & \beta_1''' \\ \beta_2', & \beta_2'', & \beta_2''' \\ \beta_3', & \beta_3'', & \beta_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1', & b_1'', & b_1''' \\ b_2', & b_2'', & b_2''' \\ b_3', & b_3'', & b_3''' \end{vmatrix}$$

für $b_k^{(i)} = a_{k1}\beta_1^{(i)} + a_{k2}\beta_2^{(i)} + a_{k3}\beta_3^{(i)}$; und sodann

$$\Delta . r^2 = \begin{vmatrix} b_1', & b_2', & b_3' \\ b_1'', & b_2'', & b_3'' \\ b_1''', & b_2''', & b_3''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1', & \beta_2', & \beta_3' \\ \beta_1'', & \beta_2'', & \beta_3'' \\ \beta_1''', & \beta_2''', & \beta_3''' \end{vmatrix} \text{ gleich einer Determinante,}$$

in welcher das Element von den Indices i und h durch die Summe $b_1^{(i)}\beta_1^{(h)} + b_2^{(i)}\beta_2^{(h)} + b_3^{(i)}\beta_3^{(h)}$ gegeben ist, oder durch Einsetzung der Werthe der $b_k^{(i)}$

$$= \beta_1^{(h)}\left\{a_{11}\beta_1^{(i)} + a_{12}\beta_2^{(i)} + a_{13}\beta_3^{(i)}\right\} + \beta_2^{(h)}\left\{a_{21}\beta_1^{(i)} + a_{22}\beta_2^{(i)} + a_{23}\beta_3^{(i)}\right\}$$
$$+ \beta_3^{(h)}\left\{a_{31}\beta_1^{(i)} + a_{32}\beta_2^{(i)} + a_{33}\beta_3^{(i)}\right\}.$$

Man erkennt aber durch folgende Betrachtung, dass diess genau mit dem Coefficienten b_{ih} der transformirten Function identisch ist und beweist damit vollends den Satz. Das Product $\left\{a_1\beta_1^{(h)} + a_2\beta_2^{(h)} + a_3\beta_3^{(h)}\right\}\left\{a_1\beta_1^{(i)} + a_2\beta_2^{(i)} + a_3\beta_3^{(i)}\right\}$ wird mit dem gewonnenen Ausdrucke identisch, sobald man darin nach

vollzogener Entwickelung die Producte $a_1 a_1$, $a_1 a_2$, etc. durch die a_{11}, a_{12}, etc. ersetzt. In ganz derselben Weise ist aber die homogene Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen gleich $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2$, wenn man in der Entwickelung die Coefficientenproducte $a_1 a_1$, $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, etc. durch a_{11}, a_{12}, a_{13}, etc. ersetzt; danach ist aber die transformirte Form gleich

$$\{y_1(a_1\beta_1' + a_2\beta_2' + a_3\beta_3') + y_2(a_1\beta_1'' + a_2\beta_2'' + a_3\beta_3'') + y_3(a_1\beta_1''' + a_2\beta_2''' + a_3\beta_3''')\}^2$$

und man erhält für die Coefficienten von y_1^2, etc. Ausdrücke, die mit den entsprechenden Elementen der vorigen Determinante identisch sind. Es ist offenbar, dass der nämliche Beweisgang für homogene Functionen zweiten Grades von beliebig vielen Variabeln die Existenz einer invarianten Function von der Bildungsweise der Discriminante begründet.

346. Wir gelangen zur Bildung der Invarianten der homogenen Gleichungen zweiten Grades mit drei Veränderlichen durch die Betrachtung der Discriminante des einfachen Systems

$$kS + S' = 0 \text{ für } S = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$
$$S' = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \ldots + 2b_{12}x_1x_2 = 0$$

und k als einen veränderlichen Parameter. Wir wissen nach Art. 270, dass es drei Werthe von k giebt, für welche die Curve des Systems in ein Paar von geraden Linien oder, der Interpretation nach Liniencoordinaten entsprechend, in ein Paar von Punkten degenerirt und es ist klar, dass diese drei Werthe von k aus der durch das Verschwinden der Discriminante von $kS + S' = 0$ entstehenden Gleichung hervorgehen müssen. Man bildet sie durch die Substitution von $ka_{11} + b_{11}$, $ka_{12} + b_{12}$, etc. für a_{11}, a_{12}, etc. in $\Delta = 0$ und erhält also

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+b_{11}, & ka_{12}+b_{12}, & ka_{13}+b_{13} \\ ka_{21}+b_{21}, & ka_{22}+b_{22}, & ka_{23}+b_{23} \\ ka_{31}+b_{31}, & ka_{32}+b_{32}, & ka_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder durch Entwickelung

$$k^3\Delta + k^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, b_{13} \\ a_{21}, a_{22}, b_{23} \\ a_{31}, a_{32}, b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}, a_{12}, a_{13} \\ b_{21}, a_{22}, a_{23} \\ b_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, b_{12}, a_{13} \\ a_{21}, b_{22}, a_{23} \\ a_{31}, b_{32}, a_{33} \end{vmatrix} \right\}$$
$$+ k \left\{ \begin{vmatrix} a_{11}, b_{12}, b_{13} \\ a_{21}, b_{22}, b_{23} \\ a_{31}, b_{32}, b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}, a_{12}, b_{13} \\ b_{21}, a_{22}, b_{23} \\ b_{31}, a_{32}, b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, a_{13} \\ b_{21}, b_{22}, a_{23} \\ b_{31}, b_{32}, a_{33} \end{vmatrix} \right\} + \Delta' = 0,$$

wenn man mit Δ und Δ' die Discriminanten von $S = 0$ und $S' = 0$ bezeichnet. Wir schreiben $k^3\Delta + 3k^2\Theta + 3k\Theta' + \Delta' = 0$ und

finden durch Entwickelung der vorigen Determinantensummen

$$3\Theta = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)b_{11} + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2)b_{22} + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)b_{33}$$
$$+ 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})b_{23} + 2(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})b_{13} + 2(a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12})b_{12}$$
$$= A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12}$$
$$= \sum \frac{d\Delta}{da_{ij}} b_{ij} + \text{etc.},$$ wie auch aus dem Taylor'schen Satze direct hervorgehen würde; ebenso ist

$$3\Theta' = (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)a_{11} + \text{etc.} = B_{11}a_{11} + B_{22}a_{22} + \text{etc.} = \sum \frac{d\Delta'}{db_{ij}} a_{ij}.$$

Man nennt Θ, Θ' die simultanen Invarianten des Systems.

Wenn man zwischen der Gleichung des Systems $kS + S' = 0$ und der cubischen Gleichung $\Delta k^3 + 3\Theta k^2 + 3\Theta' k + \Delta' = 0$ die Grösse k eliminirt, so erhält man die Gleichung der drei Paare von geraden Linien (oder von Punkten), welche dem System angehören, in der Form $\Delta S'^3 - 3\Theta S'^2 S + 3\Theta' S^2 S' - \Delta' S^3 = 0$.

Aufg. Man soll den Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Normalen eines Kegelschnitts finden, welche in den Enden einer durch den Punkt (α, β) gehenden Sehne errichtet werden.

Sei $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ die Gleichung der Curve, so sind nach Art. 189 die Fusspunkte der durch einen gegebenen Punkt $(x'y')$ gehenden Normalen in den Durchschnittspunkten von $S = 0$ mit der Hyperbel $S' \equiv 2(c^2xy + b^2y'x - a^2x'y) = 0$. Man bildet dann nach dem gegenwärtigen Art. die Gleichung der sechs geraden Linien, welche die Fusspunkte der durch $(x'y')$ gehenden Normalen verbinden, und indem man ausdrückt, dass diese Gleichung durch die Coordinaten α, β erfüllt werde, erhält man die Gleichung des fraglichen Ortes. Im gegenwärtigen Falle ist $\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}$, $\Theta = 0$, $3\Theta' = -(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4)$, $\Delta' = -2a^2b^2c^2x'y'$; die Gleichung des Ortes also wird

$$\frac{8}{a^2b^2}(a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta)^3 + 2a^2b^2c^2xy\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^3$$
$$+ 2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)(a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) = 0,$$

und er ist daher im Allgemeinen eine Curve dritter Ordnung. Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, d. h. wenn der Punkt in einer der Axen liegt, reducirt sich der Ort auf einen Kegelschnitt; die bezügliche Axe ist dann selbst ein Theil des Ortes. Der Ort reducirt sich auch auf einen Kegelschnitt, wenn der gegebene Punkt unendlich entfernt ist, d. h. wenn der Schnittpunkt der Normalen zu bestimmen ist, die in den Enden paralleler Sehnen liegen.

347. Dass die Grössen Θ und Θ' ebenso wie die Discriminanten Δ und Δ' Invarianten sind, erhellt aus ihrem Auftreten in Gemeinschaft mit diesen als Coefficienten der Gleichung

$\Delta k^3 + 3\Theta k^2 + 3\Theta' k + \Delta' = 0$; denn diese Gleichung bestimmt die Werthe von k, für welche die Gleichung $kS + S' = 0$ Paare von geraden Linien darstellt; wenn aber die Polynome S und S' durch lineare Transformation in $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ übergehen, so bleibt der Parameter k ungeändert, die Gleichung des Systems $kS + S' = 0$ geht in $k\overline{S} + \overline{S'} = 0$ über und die Werthe von k, für welche dieselbe Paare von Geraden oder die entsprechende Gleichung $k\Sigma + \Sigma' = 0$ Paare von Punkten darstellt, müssen für alle Coordinatensysteme und bei allen linearen Transformationen überhaupt dieselben sein. Wenn also unter den Coefficienten der Gleichung, durch welche diese Werthe bestimmt sind, zwei nur durch das Hinzutreten des Factors r^2 (Art. 345) geändert werden, so müssen auch die beiden andern dieselbe Veränderung erfahren, so dass $\overline{\Theta} = \Theta \cdot r^2$, $\overline{\Theta'} = \Theta' r^2$ ist. Die Invarianten Θ sind die Invarianten des Systems, während die Discriminante die Invariante eines Kegelschnitts als für sich betrachtet ist; es sind die analogen Formen zu denen, welche bei den Functionen mit zwei Veränderlichen als die Discriminante und die Invariante der harmonischen Relation Θ gefunden worden sind; das wird die Untersuchung der geometrischen Bedeutung der Relation $\Theta = 0$ ebenso anschaulich machen, wie die bekannte von $\Delta = 0$. Und wie die beiden Invarianten der binären Formen zweiten Grades die Grundlage der Beziehungen der Reihen und Büschel bildeten, so werden wir zeigen können, dass die von Transformationen der Coordinaten unabhängigen Beziehungen von Kegelschnitten zu einander vermittelst ihrer Invarianten ausgedrückt werden können. Vorher stellen wir in Uebungen in der Berechnung der Invarianten diejenigen Formen zusammen, welche bei Untersuchungen über die Kegelschnitte am häufigsten begegnen. Die einfachsten unter ihnen bieten zugleich noch den Vortheil dar, dass sie es erleichtern, homogene Relationen zu erkennen, welche zwischen den Invarianten bestehen, die dem nämlichen Falle entsprechen; jede solche Relation bleibt aber nach der analytischen Natur der Invarianten unter jeder linearen Substitution bestehen und ihre geometrische Bedeutung ist ein allgemeiner Satz über das bezügliche System.

Aufg. 1. Berechne die Invarianten für die auf ihr gemeinschaftliches sich selbst conjugirtes Dreieck bezogenen Kegelschnitte. Wir können setzen

$$S \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad S' \equiv b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0$$

und weiter durch Einführung von x_1, x_2, x_3 für $x_1\sqrt{b_{11}}$, $x_2\sqrt{b_{22}}$, $x_3\sqrt{b_{33}}$ respective S' auf die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ zurückführen. Dann ist $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$, $3\Theta = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22}$, $3\Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\Delta' = 1$. Die Bedingung, unter welcher die Gleichung $kS' + S = 0$ Paare von geraden Linien darstellt, ist
$k^3 + k^2(a_1 + a_2 + a_3) + k(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22}) + a_{11}a_{22}a_{33} = 0$
und man erkennt, wie es auch sonst sich ergiebt, dass die drei Werthe $-a_{11}$, $-a_{22}$, $-a_{33}$ für k diese Paare von geraden Linien liefern.

Aufg. 2. Wenn $S' = 0$ wie vorher in der Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ vorausgesetzt wird, und $S = 0$ die allgemeine Gleichung repräsentirt, so ist
$3\Theta = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{33}a_{11} - a_{31}^2) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$,

$$3\Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Aufg. 3. Für zwei durch
$S \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $S' \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r'^2 = 0$ dargestellte Kreise ist
$\Delta = -r^2$, $3\Theta = \alpha^2 + \beta^2 - 2r^2 - r'^2$, $3\Theta' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 - 2r'^2$, $\Delta' = -r'^2$.
Ist daher D die Entfernung der Centra beider Kreise von einander, so repräsentirt $S + kS' = 0$ gerade Linien für die aus
$r^2 + (2r^2 + r'^2 - D^2)k + (r^2 + 2r'^2 - D^2)k^2 + r'^2k^3 = 0$ erhaltenen Werthe. Da nun wie bekannt $S - S' = 0$ zwei gerade Linien dargestellt, von denen die eine die unendlich entfernte ist, so ist -1 eine Wurzel dieser Gleichung und dieselbe ist durch $(k + 1)$ theilbar; der Quotient ist $r^2 + (r^2 + r'^2 - D^2)k + r'^2k^2 = 0$.

Aufg. 4. Wenn $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $S' \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$

sind, so ist $\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}$, $3\Theta = \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - r^2)$,

$$3\Theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),\quad \Delta' = -r^2.$$

Aufg. 5. Für $S \equiv y^2 - 4mx = 0$ und $S' = 0$ als die allgemeine Gleichung des Kreises wie vorher ist
$\Delta = -4m^2$, $3\Theta = -4m(\alpha + m)$, $3\Theta' = \beta^2 - 4m\alpha - r^2$, $\Delta' = -r^2$.

Aufg. 6. Berechne die Invarianten für zwei Kegelschnitte, die denselben Dreieck respective ein- und umgeschrieben sind.

Für $S = a_1^2x_1^2 + \text{etc.} - 2a_2a_3x_2x_3 - \text{etc.}$,
$S' = 2(b_{23}x_2x_3 + b_{31}x_3x_1 + b_{12}x_1x_2)$ ist
$\Delta = -4a_1^2a_2^2a_3^2$, $\Delta' = 2b_{23}b_{31}b_{12}$
$3\Theta = 4(a_1^2a_2a_3b_{23} + a_2^2a_3a_1b_{31} + a_3^2a_1a_2b_{12})$
$= 4a_1a_2a_3(b_{23}a_1 + b_{31}a_2 + b_{12}a_3)$
$3\Theta' = -(b_{23}^2a_1^2 + b_{31}^2a_2^2 + b_{12}^2a_3^2 + 2b_{13}b_{12}a_2a_3 + 2b_{12}b_{23}a_3a_1$
$+ 2b_{23}b_{13}a_1a_2)$, d. i. $= -(b_{23}a_1 + b_{31}a_2 + b_{12}a_3)^2$.

348. Man soll die Bedingung finden, unter welcher zwei Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ einander berühren.

Wenn von den vier Schnittpunkten A, B, C, D der Kegelschnitte zwei, A und B, sich decken, so ist offenbar das Paar der geraden Linien AC, BD mit dem Paar AD, BC identisch

und die cubische Gleichung $\Delta k^3 + 3\Theta k^2 + 3\Theta' k + \Delta' = 0$ muss ein Paar gleiche Wurzeln besitzen. Man findet die Bedingung dafür durch die Elimination der Veränderlichen aus den partiellen Differentialen der homogen gemachten Gleichungen in der Form $4(\Theta^2 - \Delta\Theta')(\Theta'^2 - \Delta'\Theta) = (\Theta\Theta' - \Delta\Delta')^2$ oder entwickelt $3\Theta^2\Theta'^2 + 6\Delta\Delta'\Theta\Theta' - \Delta^2\Delta'^2 - 4\Delta\Theta'^3 - 4\Delta'\Theta^3 = 0$. Man beweist in der Theorie der Gleichungen, dass die linke Seite der zuletzt geschriebenen Gleichung zu dem Product der Quadrate der Differenzen der Wurzeln proportional ist, welche die Gleichung in k besitzt, und dass, wenn sie positiv ist, diese Wurzeln sämmtlich reell, wenn sie negativ ist, aber zwei von ihnen imaginär sind. Im letztern Falle schneiden sich (vergl. Art. 311) die beiden Kegelschnitte in zwei reellen und zwei imaginären Punkten, im ersten Falle durchschneiden sie einander entweder in vier reellen oder in vier imaginären Punkten. Diese beiden letztern Fälle unterscheiden sich nicht durch ein einfaches Kennzeichen.

Aufg. 1. Man soll nach dieser Methode die Bedingung finden, unter der zwei Kreise sich berühren.

Indem man die Bedingung bildet, unter welcher die reducirte Gleichung der Aufg. 3 im Art. 347 $r^2 + (r^2 + r'^2 - D^2)k + r'^2 k^2 = 0$ gleiche Wurzeln hat, erhält man $r^2 + r'^2 - D^2 = \pm 2rr'$ oder $D = r \pm r'$, wie es geometrisch offenbar ist.

Aufg. 2. Man bestimme den Ort des Centrums für einen Kreis von constantem Radius, welcher stets einen gegebenen Kegelschnitt berührt.

Dazu setzen wir in die Gleichung dieses Art. die Werthe von Δ, Δ', Θ, Θ' ein, welche in den Aufg. 4 und 5 des Art. 347 gegeben wurden und betrachten sodann α und β als die laufenden Coordinaten. Der Ort ist im allgemeinen Falle eine Curve von der achten Ordnung und reducirt sich im Falle der Parabel zu einer Curve der sechsten; sie ist dieselbe Curve, die man als den Ort der Endpunkte erhält, wenn man auf allen Normalen der Curve von dieser aus eine constante Länge gleich r abträgt. Man nennt sie auch die Parallelcurve des Kegelschnitts. Sie hat mit dem Kegelschnitt selbst die nämliche Evolute. Ihre Gleichung liefert auch die Bestimmung der normalen Entfernungen, welche von einem beliebigen Punkte aus zur Curve gemessen werden. In voller Entwickelung ist sie für $y^2 = 4mx$

$$r^6 - (3y^2 + x^2 + 8mx - 8m^2)r^4 + \{3y^4 + y^2(2x^2 - 2mx + 20m^2) + 8mx^3 + 8m^2x^2 - 32m^3x + 16m^4\}r^2 - (y^2 - 4mx)^2\{y^2 + (x-m)^2\} = 0;$$

und für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn man die Abkürzung $a^2 - b^2 = c^2$ benutzt (Art. 169)

$$c^4 r^8 - 2c^2 r^6\{c^2(a^2+b^2) + (a^2 - 2b^2)x^2 + (2a^2 - b^2)y^2\}$$
$$+ r^4\{c^4(a^4 + 4a^2b^2 + b^4) - 2c^2(a^4 - a^2b^2 + 3b^4)x^2 + 2c^2(3a^4 - a^2b^2 + b^4)y^2$$
$$+ (a^4 - 6a^2b^2 + 6b^4)x^4 + (6a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^4 + (ba^4 - 10a^2b^2 + 6b^4)x^2y^2\}$$

$$+r^2\{-2a^2b^2c^4(a^2+b^2)+2c^2(3a^4-a^2b^2+b^4)x^2-2c^2(a^4-a^2b^2+3b^4)y^2$$
$$-b^2(6a^4-10a^2b^2+6b^4)x^4-a^2(6a^4-10a^2b^2+6b^4)y^4$$
$$+(4a^6-6a^4b^2-6a^2b^4+4b^6)x^2y^2+2b^2(a^2-2b^2)x^6-2(a^4-a^2b^2+3b^4)x^4y^2$$
$$-2(3a^4-a^2b^2+b^4)x^2y^4+2a^2(b^2-2a^2)y^6\}$$
$$+(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)^2\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}=0.$$

Darnach ist der Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner normalen Abstände von der Ellipse gegeben ist, ein Kegelschnitt, dargestellt durch $c^2(a^2+b^2)+(a^2-2b^2)x^2+(2a^2-b^2)y^2=0$ oder $x^2+3y^2+8mx=m^2$ respective. Wenn wir die Bedingung bilden, unter welcher die Gleichung in r^2 gleiche Wurzeln hat, so erhalten wir das Product aus dem Quadrate der Axen in den Cubus der Evolute. Für $r=0$ finden wir die Curve selbst doppelt gezählt und ihre Brennpunkte, nämlich $\{(x-c)^2+y^2\}\{(x+c)^2+y^2\}=0$ und $y^2+(x-m)^2=0$ respective, d. h. vier gerade Linien, welche die Gleichung $(x\pm c)^2+y^2=0$ im ersten Falle darstellt und deren jede einen reellen und einen imaginären Brennpunkt der Ellipse mit einander verbindet und eine Tangente derselben ist. Der Voraussetzung $a=b$ entspricht als Parallelcurve des Kreises ein Paar von concentrischen Kreisen $x^2+y^2-(a\pm r)^2=0$ und die vier Geraden $(x^2+y^2)^2=0$, welche die Tangenten des Kreises aus seinem Centrum oder die nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen gehenden Geraden doppelt gezählt sind.

Endlich lehrt die allgemeine Form der Gleichung $4(\Theta^2-\Delta\Theta')(\Theta'^2-\Delta'\Theta)=(\Theta\Theta'-\Delta\Delta')^2$, dass die Parallelcurve von den Curven vierter Ordnung $\Theta^2=\Delta\Theta'$, $\Theta'^2=\Delta'\Theta$ in den Punkten berührt wird, in welchen sie die Curve vierter Ordnung $\Theta\Theta'=\Delta\Delta'$ schneidet, d. h. in den Punkten, welche zu den Punkten der Ellipse vom Krümmungshalbmesser r gehören; denn für sie ist $\Theta=(\Delta^2\Delta')^{\frac{1}{3}}$, $\Theta'=(\Delta\Delta'^2)^{\frac{1}{3}}$ oder

$$x^2+y^2-a^2-b^2-r^2=-3(abr)^{\frac{2}{3}},$$
$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2-r^2(a^2+b^2)=-3(abr)^{\frac{4}{3}}.$$

Aufg. 3. Die Gleichung der Evolute der Ellipse zu finden.

Man hat dazu nur die Bedingung auszudrücken, unter der die Curven $S=0$, $S'=0$ in der Aufg. des Art. 346 sich berühren. Für $\Theta=0$ reducirt sich aber die Bedingung der Existenz gleicher Wurzeln in $\Delta k^3+3\Theta k^2+3\Theta' k+\Delta'=0$ auf $\Delta\Delta'^2+4\Theta'^3=0$, d. h. die Gleichung der Evolute ist $(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x^2y^2=0$. (Vergl. Art. 256.)

Aufg. 4. Nach Art. 339 besitzt die cubische Gleichung $\Delta k^3+3\Theta k^2+3\Theta' k+\Delta'=0$ drei gleiche Wurzeln, wenn die Bedingungen $\Delta\Theta'=\Theta^2$, $\Delta\Delta'=\Theta\Theta'$, $\Delta'\Theta=\Theta'^2$ erfüllt sind, von denen zwei die dritte nach sich ziehen. Für den Fall des Kreises führt diess auf die Bestimmung des Krümmungskreises. (Vergl. Aufg. 2.)

Aufg. 5. Welches ist die Gleichung der Evolute der Parabel?

Weil für diese $S\equiv y^2-4mx$, $S'=2xy+2(2m-x')y-4my'$, $\Delta=-4m^2$, $\Theta=0$, $3\Theta'=-4m(2m-x)$, $\Delta'=4my$ ist, so ist die Gleichung der Evolute $27my^2=4(x-2m)^3$. Es ist zu bemerken,

dass die Durchschnittspunkte von $S = 0$ und $S' = 0$ nicht nur die Fusspunkte der drei Normalen liefern, welche von einem beliebigen Punkte ausgehen, sondern auch den unendlich fernen Punkt der Axe y. Die sechs Sehnen zwischen diesen Durchschnittspunkten sind also die Sehnen, welche die Fusspunkte der Normalen verbinden, und dazu die drei Parallelen zur Axe durch diese Punkte. Darum ist die in der Aufg. des Art. 346 angewendete Methode für die Lösung des entsprechenden Problems bei der Parabel nicht die einfachste; man erhält zwar die Gleichung der Aufg. 12 im Art. 235, aber mit dem Factor $4m(2my + y'x - 2my') - y'^3$ multiplicirt.

Aufg. 6. Man zeige, dass die Bedingung der Berührung für einen dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen und einen ihm umgeschriebenen Kegelschnitt (Aufg. 6 des Art. 347) die Relation

$$(a_1 b_{23})^{\frac{1}{3}} + (a_2 b_{31})^{\frac{1}{3}} + (a_3 b_{12})^{\frac{1}{3}} = 0 \text{ ist.}$$

349. Wenn der eine der betrachteten Kegelschnitte $S' = 0$ in zwei gerade Linien degenerirt, so ist $\Delta' = 0$ und wir untersuchen die Bedeutung von Θ und Θ' in diesem Falle. Wir dürfen dazu die beiden Geraden des Kegelschnitts $S' = 0$ als die Coordinatenaxen und das System der Kegelschnitte daher durch $S + kxy = 0$ dargestellt ansehen; aus der bekannten Bedeutung der Invarianten Θ, Θ' in diesem Falle folgt ihre Bedeutung im allgemeinen Falle; sie ist dieselbe. Um die Discriminante von $S + kxy = 0$ zu finden, hat man nur in Δ für a_{12} die Summe $(a_{12} + k)$ zu substituiren und erhält sie also in der Form $\Delta + 2k(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) - a_{33}k^2$. Es ist also $3\Theta' = -a_{33}$ und $3\Theta = 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})$, d. h. Θ' verschwindet zugleich mit a_{33} und Θ für $a_{13}a_{23} = a_{12}a_{33}$; jenes bedingt, dass der Anfangspunkt $x = y = 0$ in der Curve $S = 0$ liegt, dieses, dass die beiden Geraden $x = 0$, $y = 0$ in Bezug auf $S = 0$ conjugirt sind. (Art. 236, Aufg. 3.) Also allgemein: Wenn $S' = 0$ zwei gerade Linien darstellt, so verschwindet Δ', $\Theta' = 0$ repräsentirt die Bedingung, unter welcher der Durchschnittspunkt der beiden Geraden in der Curve $S = 0$ liegt, $\Theta = 0$ aber die Bedingung, unter welcher diese beiden Geraden in Bezug auf $S = 0$ zu einander conjugirt oder harmonische Polaren sind. Und für Gleichungen in Liniencoordinaten: Wenn $\Sigma' = 0$ zwei Punkte darstellt, so verschwindet $\Delta' = 0$, $\Theta' = 0$ repräsentirt die Bedingung, unter welcher ihre Verbindungslinie eine Tangente von $\Sigma = 0$ ist und $\Theta = 0$ die Bedingung, unter welcher beide Punkte in Beziehung auf $\Sigma = 0$ conjugirt oder harmonische Pole sind.

Die Bedingung, unter welcher die Gleichung $\Delta + 3\Theta k + 3\Theta' k^2 = 0$ ein vollständiges Quadrat ist, $4\Delta\Theta' = 3\Theta^2$, ist nach dem letzten Artikel die Bedingung, unter welcher jede der beiden Geraden $S' = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ berührt. Das gewählte Beispiel bestätigt diess leicht, denn $3\Theta^2 - 4\Delta\Theta'$ ist für dasselbe $a_{33}\Delta + (a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})^2$ oder $(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)(a_{33}a_{11} - a_{13}^2)$.

Aufg. Wenn $S' = 0$ ein vollständiges Quadrat ist, so dass die Discriminante des Systems auf die von $S + kx^2$ zurückführbar ist, so hat man $\Delta + k(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = 0$ als die entsprechende cubische Gleichung, und $\Theta = 0$ ist die Bedingung, unter welcher diese Gerade den Kegelschnitt berührt.

350. Man soll die Gleichung der Tangenten an den Kegelschnitt $S = 0$ bestimmen, die ihn in den Punkten der geraden Linie $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ berühren. Dieselben bilden unter den den Kegelschnitt $S = 0$ in diesen Punkten doppelt berührenden Kegelschnitten, die die Gleichung $kS + (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 = 0$ darstellt, denjenigen, welcher in gerade Linien degenerirt. Man hat in diesem Falle $\Delta' = 0$ und wegen $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0$, $b_{33}b_{11} - b_{31}^2 = 0$, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$ nach Art. 346 auch $\Theta' = 0$ und findet also für die cubische Gleichung $\Delta k^3 + 3\Theta k^2 = 0$, d. h. ausser der doppelt zu zählenden Wurzel $k = 0$, die der Geraden $\xi_1 x_1 +$ etc. $= 0$ selbst entspricht, liefert sie nur einen Werth von k, der eben die fraglichen Tangenten bestimmen muss. Man hat aber

$$3\Theta \equiv (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\xi_1^2 + \text{etc.} + 2(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\xi_2\xi_3 + \text{etc.}$$

oder $= A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{31}\xi_3\xi_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2$, d. h. 3Θ ist mit dem Polynom der Tangentialgleichung des Kegelschnitts $S = 0$ identisch (Art. 316, 114) und wir bezeichnen sie daher durch das Zeichen Σ und erhalten aus $k\Delta + \Sigma = 0$ den bezüglichen Werth von k und die Gleichung des Tangentenpaars

$$\Sigma S = \Delta(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2.$$

Wenn $\xi_1 x_1 +$ etc. $= 0$ selbst den Kegelschnitt $S = 0$ berührt, so fällt das Tangentenpaar mit dieser Geraden selbst zusammen und die bezügliche Bedingung ist eben $\Sigma = 0$, wie schon vorher erkannt ist. Wenn die ξ_i speciell durch die Seitenlängen s_i des Fundamentaldreiecks ersetzt werden, so liefert die erhaltene Gleichung die Bestimmung der Asymptoten des durch die allgemeine homogene Gleichung ausgedrückten Kegelschnitts.

351. Wir untersuchen nun die geometrische Bedeutung der Relationen $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ respective im Allgemeinen.

Wir denken dazu das Fundamentaldreieck als sich selbst conjugirt in Bezug auf $S=0$, so dass diese Gleichung die Form $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$ hat (Art. 309) und $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$ ist. In Folge dessen ist $3\Theta=a_{22}a_{33}b_{11}+a_{33}a_{11}b_{22}+a_{11}a_{22}b_{33}$ (Art. 346) und wird also gleich Null für $b_{11}=b_{22}=b_{33}=0$, d. h. wenn die Gleichung des Kegelschnitts $S'=0$ für dasselbe Fundamentaldreieck die Form $2(b_{23}x_2x_3+b_{31}x_3x_1+b_{12}x_1x_2)=0$ annimmt. Die Invariante Θ hat also den Werth Null, wenn ein in Bezug auf $S=0$ sich selbst conjugirtes Dreieck in $S'=0$ eingeschrieben ist, oder wenn $S'=0$ durch ein System in Bezug auf $S=0$ harmonischer Pole hindurchgeht.

Machen wir $b_{23}=0$, $b_{31}=0$, $b_{12}=0$, d. h. wählen ein System harmonischer Pole in Bezug auf $S'=0$ zu Fundamentalpunkten, so wird

$$3\Theta=(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)b_{11}+(a_{33}a_{11}-a_{31}^2)b_{22}+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)b_{33}$$

und erhält also den Werth Null, wenn gleichzeitig $a_{22}a_{33}=a_{23}^2$, $a_{33}a_{11}=a_{31}^2$, $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$ ist, d. h. wenn die drei Fundamentallinien $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ den Kegelschnitt $S=0$ berühren; d. h. die Invariante Θ hat den Werth Null, wenn ein dem Kegelschnitt $S=0$ umgeschriebenes Dreieck in Bezug auf den Kegelschnitt $S'=0$ sich selbst conjugirt ist oder wenn $S=0$ ein System harmonischer Polaren in Bezug auf $S'=0$ zu Tangenten hat.

In derselben Art beweist man, dass die Invariante Θ' den Werth Null hat, wenn ein System harmonischer Pole in Bezug auf $S'=0$ in $S=0$ liegt, oder ein System harmonischer Polaren in Bezug auf $S=0$ den Kegelschnitt $S'=0$ berührt.

Wenn eine dieser Beziehungen verwirklicht ist, so ist es auch die andere.

Aber ein System von Kegelschnitten, für welches die Relation $\Theta=0$ stattfindet, besitzt noch eine andere Eigenschaft. Nennen wir den Punkt, in welchem die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken zweier Dreiecke sich schneiden, von denen die Seiten des einen die Polaren der Ecken des andern in Bezug auf denselben Kegelschnitt sind, den Pol eines jeden der Dreiecke in Bezug auf den Kegelschnitt (Art. 309, Aufg. 5) und die gerade Linie, welche die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten dieser Dreiecke verbindet, die Axe von jedem derselben in Bezug auf ihn, so bedingt die Relation $\Theta=0$, dass der in Bezug auf $S=0$ genommene Pol eines dem Kegelschnitt $S'=0$

eingeschriebenen Dreiecks auf dem Kegelschnitt $S' = 0$ liegt und zugleich, **dass die in Bezug auf $S' = 0$ genommene Axe eines dem Kegelschnitt $S = 0$ umgeschriebenen Dreiecks $S = 0$ berührt.** Denn wenn x_1, x_2, x_3 nach einander zwischen den Paaren der Gleichungen $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$ eliminirt werden, so erhält man $(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})x_1 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = (a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})x_3$ oder $A_{23}x_1 = A_{31}x_2 = A_{12}x_3$ für die Gleichungen der Geraden, welche die Ecken des Fundamentaldreiecks $x_1\,x_2\,x_3$ mit den entsprechenden Ecken seines Polardreiecks verbinden; die Coordinaten des Pols des Dreiecks sind also den reciproken Werthen von A_{23}, A_{31}, A_{12} proportional. Substituirt man sie in die Gleichung von $S' = 0$, als für welche $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$ sind, so erhält man $2A_{23}b_{23} + 2A_{31}b_{31} + 2A_{12}b_{12} = 0$ oder $\Theta = 0$. Den zweiten Theil des Satzes beweist man in analoger Weise.

Aufg. 1. Wenn jedes von zwei Dreiecken in Bezug auf einen Kegelschnitt $S' = 0$ sich selbst conjugirt ist, so liegen ihre sechs Ecken auf einem Kegelschnitt und ihre sechs Seiten berühren einen und denselben Kegelschnitt. (Art. 309, Aufg. 4.)

Denken wir einen Kegelschnitt durch die Ecken des einen Dreiecks und durch zwei des andern gelegt, welches als Fundamentaldreieck gewählt werde, so folgt $\Theta' = 0$ oder $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ aus der Voraussetzung, dass er dem ersten Dreieck eingeschrieben sei (Art. 347, Aufg. 2) und da zwei Ecken des Fundamentaldreiecks dem Kegelschnitt angehören, so ist $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$ und man erkennt somit, dass auch $a_{33} = 0$ ist oder auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks dem Kegelschnitt angehört. Ebenso beweist man den zweiten Theil des Satzes.

Aufg. 2. Das Quadrat der Länge der Tangente, welche vom Centrum eines Kegelschnitts an den einem in Bezug auf ihn sich selbst conjugirten Dreieck umgeschriebenen Kreis gehen, ist constant und gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen.

Diess ist die geometrische Interpretation der speciellen Form der Relation $\Theta = 0$, wie sie in der 4. Aufg. des Art. 347 gefunden ward, nämlich $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = a^2 + b^2$. Man kann den Satz auch so aussprechen: Jeder Kreis, der ein System harmonischer Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt enthält, ist orthogonal zu dem Kreise, in welchem sich die zu einander rechtwinkligen Tangenten dieses Kegelschnitts schneiden. Denn das Quadrat des Radius dieses Kreises ist $= a^2 + b^2$.

Aufg. 3. Das Centrum des Kreises, welcher von einem System harmonischer Polaren in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel berührt wird, liegt in der Curve. Die Relation $\Theta' = 0$ in der Aufg. 4 des Art. 347 beweist diess für $b^2 = -a^2$.

Aufg. 4. Wenn das Rechteck unter den Segmenten eines der Höhenperpendikel eines von drei Tangenten eines Kegelschnitts gebildeten Dreiecks constant und gleich f^2 ist, so ist der Ort des Höhendurchschnittspunktes der Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + f^2$. Denn $\Theta = 0$ (Art. 347, Aufg. 4) ist die Bedingung, unter welcher ein System harmonischer Polaren in Bezug auf den Kreis den Kegelschnitt $S = 0$ berührt. Das Centrum des Kreises ist aber der Höhendurchschnittspunkt für ein Dreieck, das in Bezug auf ihn sich selbst conjugirt ist, während das Quadrat seines Radius das Rechteck unter den Segmenten einer seiner Höhen ist, mit positivem oder negativem Zeichen genommen, je nachdem das Dreieck stumpfwinklig oder spitzwinklig ist. Wenn man in diesem Beispiel $f^2 = 0$ voraussetzt, so erhält man den Ort des Durchschnitts rectangulärer Tangenten des Kegelschnitts.

Aufg. 5. Wenn das Rechteck unter den Segmenten eines der Höhenperpendikel für ein in den Kegelschnitt $S = 0$ eingeschriebenes Dreieck constant ist $(= f^2)$, so ist der Ort des Höhendurchschnittspunktes der mit $S = 0$ concentrische und ähnliche ähnlich gelegene Kegelschnitt $S = f^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$. Diess ergiebt sich auf dieselbe Weise aus $\Theta' = 0$.

Aufg. 6. Man soll den Ort des Höhendurchschnittspunktes für ein Dreieck finden, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben und zugleich einem andern Kegelschnitt umgeschrieben ist. Wenn man das Centrum des letzteren Kegelschnitts zum Coordinatenanfangspunkt wählt und die Werthe von f^2 einander gleich setzt, die sich aus den beiden vorigen Aufgaben ergeben, so ist für a', b' als die Axen des Kegelschnitts $S = 0$, in welchen das Dreieck eingeschrieben ist, die Gleichung des Ortes $(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2) = a'^2 b'^2 S$. Der Ort ist daher ein Kegelschnitt, dessen Axen denen von $S = 0$ parallel sind und der mit $S = 0$ zugleich ein Kreis wird.

Aufg. 7. Das Centrum eines Kreises, der ein System harmonischer Pole in Bezug auf eine Parabel enthält, liegt in der Directrix.

Aufg. 8. Der Höhendurchschnitt eines Dreiecks, welches einer Parabel umgeschrieben ist, liegt in der Directrix.

Der Beweis für beide letztere Sätze liegt in der Relation $\Theta = 0$ in der 5. Aufg. des Art. 347.

Aufg. 9. Für einen Kreis, der ein System harmonischer Polaren in Bezug auf eine Parabel zu Tangenten hat, ist die vom Fusspunkt seiner Mittelpunktsordinate in der Axe an ihn zu legende Tangente der bezüglichen Parabelordinate gleich. Der Beweis liegt in der Relation $\Theta' = 0$ in der 5. Aufg. des Art. 347.

Aufg. 10. Wenn der Radius des einem System harmonischer Polaren in Bezug auf eine Parabel eingeschriebenen Kreises gegeben ist, so ist der Ort des Centrums der Parabel eine Parabel von gleichem Parameter mit der gegebenen.

352. Es ist nicht im Allgemeinen möglich, dem einen von zwei beliebigen Kegelschnitten ein Dreieck einzuschreiben, welches

zugleich dem andern von ihnen umgeschrieben ist. Wenn aber zwischen beiden Kegelschnitten eine gewisse Relation stattfindet, so können unendlich viele solche Dreiecke gefunden werden; diese Relation soll bestimmt werden.

Wir nehmen an, ein solches Dreieck sei möglich und es sei zum Fundamentaldreieck gewählt; dann sind die Gleichungen beider Kegelschnitte auf die einfachen Formen

$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0,$

$S' = 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{31}x_3x_1 + 2b_{12}x_1x_2 = 0$ reducirbar [in der ersten sind die Coefficienten a_1, a_2, a_3 (vergl. Art. 347, Aufg. 6 implicite den x gedacht] und wir erhalten für ihre Invarianten die Werthe $\Delta = -4$, $\Delta' = 2b_{23}b_{31}b_{12}$, $3\Theta = 4(b_{23} + b_{31} + b_{12})$, $3\Theta' = -(b_{23} + b_{31} + b_{12})^2$. Zwischen diesen besteht aber die Relation $3\Theta^2 = 4\Delta\Theta'$ und da diese eine Gleichung der Art ist, von welcher im Art. 347 erörtert wurde, dass sie durch eine Veränderung der Coordinatenbeziehung ungestört bleibt, so muss dieselbe Relation unter den Coefficienten der Gleichungen beider Kegelschnitte stattfinden, wenn es überhaupt möglich sein soll, sie in die vorher angenommenen einfachen Formen zu transformiren. Sie ist also die analytische Bedingung der geforderten geometrischen Beziehung. Man beweist auch umgekehrt, ganz ebenso wie in der Aufg. 1 des Art. 351, dass unter Voraussetzung dieser Relation auch die dritte Ecke eines Dreiecks dem Kegelschnitt $S' = 0$ angehört, welches dem Kegelschnitt $S = 0$ umgeschrieben ist und dessen zwei erste Ecken auf $S' = 0$ liegen.

Aufg. 1. Man bestimme die Bedingung für diejenige Lage von zwei Kreisen, bei welcher dem einen ein Dreieck eingeschrieben werden kann, das zugleich dem andern umgeschrieben ist. Für $D^2 - r^2 - r'^2 = E$ ist nach der Aufg. 3 des Art. 347 die fragliche Bedingung

$(E - r^2)^2 + 4r^2(E - r'^2) = 0$ oder $(E + r^2)^2 = 4r^2r'^2$ also $D^2 = r'^2 \pm 2rr'$,

der wohlbekannte Ausdruck, welchen bereits Euler für die Entfernung zwischen dem Centrum des einem Dreieck umgeschriebenen und dem eines ihm eingeschriebenen Kreises gegeben hat.

Aufg. 2. Man soll den Ort des Centrums für einen Kreis von gegebenem Halbmesser finden, welcher einem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Dreieck umgeschrieben oder einem ihm eingeschriebenen Dreieck eingeschrieben ist. Die fraglichen Oerter sind Curven vierter Ordnung, ausgenommen den Fall vom Centrum des umgeschriebenen Kreises für das Dreieck der Parabeltangenten; dieser ist ein Kreis, der den Brennpunkt zum Mittelpunkt hat, wie auch sonst geschlossen werden kann.

Aufg. 3. Unter welcher Bedingung kann in den Kegelschnitt $S'=0$ ein Dreieck eingeschrieben werden, dessen Seiten die Kegelschnitte $S+lS'=0$, $S+mS'=0$, $S+nS'=0$ respective berühren?

Setzen wir $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(1+lb_{23})x_2x_3-2(1+mb_{31})x_3x_1-2(1+nb_{12})x_1x_2=0$, $S'=2b_{23}x_2x_3+2b_{31}x_3x_1+2b_{12}x_1x_2=0$, so wird $S+lS'=0$ durch $x_1=0$, $S+mS'=0$ durch $x_2=0$, etc. berührt, die Invarianten des Systems sind aber

$$\Delta=-(2+lb_{23}+mb_{31}+nb_{12})^2-2lmnb_{23}b_{31}b_{12},$$

$$3\Theta=2(b_{23}+b_{31}+b_{12})(2+lb_{23}+mb_{31}+nb_{12})+2b_{23}b_{31}b_{12}(mn+nl+lm),$$

$$3\Theta'=-(b_{23}+b_{31}+b_{12})^2-2(l+m+n)b_{23}b_{31}b_{12},\quad \Delta'=2b_{23}b_{31}b_{12}$$

und erfüllen die Relation

$$\{3\Theta-\Delta'(mn+nl+lm)\}^2=4(\Delta+lmn\Delta')\{3\Theta'+\Delta'(l+m+n)\},$$

welche die verlangte Bedingung ist.

353. **Man soll die Bedingung angeben, unter welcher die gerade Linie $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ durch einen der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ hindurchgeht**; d. i. man soll die Gleichung dieser Punkte in Tangential- oder Linien-Coordinaten entwickeln.

Die Tangentialgleichung von irgend einem Kegelschnitt des Systems $S+kS'=0$ wird gebildet, indem man in die Tangentialgleichung des Kegelschnitts $S=0$ d. h. in

$$\Sigma=(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)\xi_1^2+\ldots+2(a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23})\xi_2\xi_3+\text{etc.}=0$$

oder $\begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \xi_1, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ \xi_2, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ \xi_3, & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}=0$ (Art. 324) für die Coefficienten a_{11}, a_{23}, etc. die Summen $a_{11}+kb_{11}$, $a_{23}+kb_{23}$, etc. substituirt. Die Determinante lässt sich nach der binomischen Zusammensetzung von drei Reihen ihrer Elemente in sieben andere Determinanten als Summanden zerlegen (Art. 73), von denen die erste keine der Verticalreihen b enthält und darum mit Σ identisch ist, während drei weitere von ihnen je eine Verticalreihe der b und damit den Factor k enthalten, und in die drei letzten je zwei Verticalreihen der b und damit der Factor k^2 eingehen. Die Summe dieser letzteren erweist sich als die mit Σ ganz gleich gebildete Determinante der b und ist daher durch Σ' zu bezeichnen. Daher ist das Substitutionsresultat, d. h. die Tangentialgleichung des Kegelschnitts $S+kS'=0$ durch $\Sigma+2k\Phi+k^2\Sigma'=0$ dargestellt, wenn wir durch 2Φ die Summe jener drei Partial-Determinanten bezeichnen, die mit dem Factor k behaftet sind. Sie sind

$$k\left\{\begin{vmatrix} 0, & 0, & \xi_2, & \xi_3 \\ \xi_1, & b_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ \xi_2, & b_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ \xi_2, & b_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & 0, & \xi_3 \\ \xi_1, & a_{11}, & b_{12}, & a_{13} \\ \xi_2, & a_{21}, & b_{22}, & a_{23} \\ \xi_3, & a_{31}, & b_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & 0 \\ \xi_1, & a_{11}, & a_{12}, & b_{13} \\ \xi_2, & a_{21}, & a_{22}, & b_{23} \\ \xi_3, & a_{31}, & a_{32}, & b_{33} \end{vmatrix}\right\}$$

und der Factor von k kann in den Summenformen dargestellt

$$= \Sigma \frac{d\Theta}{da_{ij}} \xi_i \xi_j = \Sigma \frac{d\Theta'}{db_{ij}} \xi_i \xi_j$$ oder entwickelt werden mit

$$2\Phi = (a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\xi_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{31}b_{31})\xi_2^2$$
$$+ (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\xi_3^2 + 2(a_{13}b_{12} + a_{12}b_{13} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\xi_2\xi_3$$
$$+ 2(a_{21}b_{23} + a_{23}b_{21} - a_{22}b_{31} - a_{31}b_{22})\xi_3\xi_1 + 2(a_{32}b_{31} + a_{31}b_{32} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})\xi_1\xi_2.$$

Man nennt Σ, Φ und Σ' nach Gauss die **zugehörigen Formen** oder **Contravarianten** des Systems. Die Tangentialgleichung der Enveloppe des Systems $\Sigma + 2k\Phi + k^2\Sigma' = 0$ ist daher durch $\Phi^2 = \Sigma\Sigma'$ ausgedrückt. (Art. 319, Aufg. 2.) Und da $S + kS' = 0$ und also auch die entsprechende Tangentialgleichung ein System von Kegelschnitten bezeichnet, welche durch dieselben vier Punkte gehen, so kann die Enveloppe eben nur das System dieser vier Punkte bezeichnen und die Relation $\Phi^2 = \Sigma\Sigma'$ ist daher die fragliche Bedingung, unter welcher die Gerade $\xi_1 x_1 +$ etc. $= 0$ durch einen dieser vier Punkte geht.

Man kann auch sagen: Durch vier Punkte gehen im Allgemeinen zwei Kegelschnitte, die eine gegebene Gerade berühren (Art. 302, Aufg. 8); geht aber die gerade Linie durch einen der vier Punkte, so fallen diese beiden Kegelschnitte in einen zusammen, welcher sie in eben diesem Punkte berührt; und in der That ist $\Phi^2 = \Sigma\Sigma'$ die Bedingung, unter welcher die zwei Kegelschnitte des Systems $S + kS' = 0$, welche die Gerade $\xi_1 x_1 +$ etc. $= 0$ berühren, zusammenfallen können.

354. **Man soll die Gleichung der vier gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Kegelschnitten bestimmen.**

Das gegenwärtige Problem entspricht dem Vorigen dualistisch und kann ganz analog behandelt werden. Sind $\Sigma = 0$ und $\Sigma' = 0$ die Gleichungen beider Kegelschnitte in Tangentialcoordinaten, so repräsentirt die Gleichung $\Sigma + k\Sigma' = 0$ jeden Kegelschnitt in Tangentialcoordinaten, der mit jenen beiden demselben Tangentenvierseit eingeschrieben ist. (Art. 292.) Bildet man dann nach Art. 316 die der Gleichung

$$\Sigma + k\Sigma' = 0 \text{ oder } (A_{11} + kB_{11})\xi_1^2 + \text{etc.} + 2(A_{23} + kB_{23})\xi_2\xi_3 + \text{etc.} = 0$$

entsprechende Gleichung in Punktcoordinaten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1, & A_{11}+kB_{11}, & A_{12}+kB_{12}, & A_{13}+kB_{13} \\ x_2, & A_{21}+kB_{21}, & A_{22}+kB_{22}, & A_{23}+kB_{23} \\ x_3, & A_{31}+kB_{31}, & A_{32}+kB_{32}, & A_{33}+kB_{33} \end{vmatrix} = 0$$

und durch die Zerlegung dieser Determinante in ihre sieben Summanden, wie oben eine in k quadratische Gleichung, in welcher das absolute Glied und das Glied in k^2 durch

$$(A_{22}A_{33} - A_{23}^2)x_1^2 + \text{etc.} + 2(A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23})x_2x_3 + \text{etc. und}$$
$$\{(B_{22}B_{33} - B_{23}^2)x_1^2 + \text{etc.} + 2(B_{13}B_{12} - B_{11}B_{23})x_2x_3 + \text{etc.}\}\, k^2$$

dargestellt werden, während auch das Glied in k einen in A_{ij} und B_{ij} ganz ebenso gebildeten Coefficienten hat, wie das entsprechende Glied in der Untersuchung des vorigen Artikels. Nun ward aber in Art. 316 bewiesen, dass die der Determinante der Tangentialgleichung des Kegelschnitts $a_{11}x_1^2 + \text{etc.} = 0$ oder $S = 0$ gleichgebildete Determinante der A_{ij} mit dem Product ΔS gleichwerthig ist und man hat daher als Ergebniss der jetzigen Untersuchung die Gleichung $\Delta S + 2kF + k^2\Delta' S' = 0$ mit

$$\begin{aligned} 2F = &(A_{22}B_{33} + A_{33}B_{22} - 2A_{23}B_{23})x_1^2 + (A_{33}B_{11} + A_{11}B_{33} - 2A_{31}B_{31})x_2^2 \\ &+ (A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} - 2A_{12}B_{12})x_3^2 + 2(A_{13}B_{12} + A_{12}B_{13} - A_{11}B_{23} - A_{23}B_{11})x_2x_3 \\ &+ 2(A_{21}B_{23} + A_{23}B_{21} - A_{22}B_{31} - A_{31}B_{22})x_3x_1 \\ &+ 2(A_{32}B_{31} + A_{31}B_{32} - A_{33}B_{12} - A_{12}B_{33})x_1x_2. \end{aligned}$$

Die Enveloppe des Systems $\Delta S + 2kF + k^2\Delta' S' = 0$ ist aber durch $F^2 = \Delta\Delta' SS'$ dargestellt und diese Gleichung somit die Gleichung der vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte.

Die Gleichung $F^2 = \Delta\Delta' SS'$ bezeichnet durch ihre Form (Art. 272) einen Ort, welcher die Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ in den Punkten berührt, in denen der Kegelschnitt $F = 0$ sie schneidet; man erfährt also, dass die acht Berührungspunkte zweier Kegelschnitte mit ihren gemeinsamen Tangenten auf einem Kegelschnitt $F = 0$ liegen. Dieselbe Ueberlegung führt von dem Resultat der Untersuchung des vorigen Art. zu dem Satz: Die acht Tangenten zweier Kegelschnitte in ihren Durchschnittspunkten berühren sämmtlich einen Kegelschnitt $\Phi = 0$.

Aufg. 1. Welches ist die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten der durch $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, $b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0$ gegebenen Kegelschnitte? Man hat $A_{11} = a_{22}a_{33}$, $A_{22} = a_{33}a_{11}$, $A_{33} = a_{11}a_{22}$, $B_{11} = b_{22}b_{33}$, etc., also $2F = a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2$

$+ a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2 + a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2$ und die fragliche Gleichung ist somit

$$\{a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22})x_1^2 + a_{22}b_{22}(a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33})x_2^2 + a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})x_3^2\}^2$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}b_{11}b_{22}b_{33}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2)(b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2).$$

Aufg. 2. Man bestimme die gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Kegelschnitten, welche demselben Dreieck umgeschrieben sind.

Der Kegelschnitt $F=0$, welcher ihre acht Berührungspunkte enthält, ist in diesem Falle durch $(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})^2x_1^2 + \text{etc.} + (a_{12}b_{23} + a_{23}b_{12})(a_{13}b_{23} + a_{23}b_{13})x_2x_3 + \text{etc.} = 0$ dargestellt.

355. Der letzte Artikel erläutert die Bedeutung der **Covarianten**, sowie die früheren Entwickelungen die der Invarianten ins Licht gestellt haben. Wenn aus der allgemeinen Gleichung einer Curve oder den Gleichungen eines Systems von Curven die Gleichung $U=0$ eines Ortes hervorgeht, der zu ihr oder zu dem System eine von den Coordinatenaxen unabhängige gesetzliche Beziehung hat, so ist $U=0$ eine Covariante der Curve oder des Systems. Die auf neue Axen bezogene Gleichung dieses Ortes wird ebenso erhalten, wenn wir die Gleichung $U=0$ selbst zu diesen neuen Axen transformiren, als wenn wir die ursprüngliche Gleichung der Curve oder die Gleichungen des Systems von Curven so transformiren und aus den transformirten die Function U in derselben Weise bilden, wie sie aus den ursprünglichen gebildet wird. Wenn wir die Gleichungen $S=0$, $S'=0$ der Kegelschnitte zu einem neuen Coordinatendreieck transformiren, indem wir x_1, x_2, x_2 durch $\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\alpha_{13}y_3$, $\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\alpha_{23}y_3$, $\alpha_{31}y_1+\alpha_{32}y_2+\alpha_{33}y_3$ respective ersetzen, und wenn wir dieselbe Substitution in der Gleichung $F^2 = \Delta\Delta' SS'$ vollziehen, so kann das Resultat dieser letzteren Substitution nur durch einen constanten Factor von der Gleichung $F^2 = \Delta\Delta' SS'$ verschieden sein, welche mit den Coefficienten der transformirten Formen S, S' gebildet ist. Denn jede von beiden Gleichungen repräsentirt die vier gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte.

Wenn ferner die Function $\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0$ durch die Substitution $\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3$, $\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3$, $\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3$ für x_1, x_2, x_3 respective transformirt, also in $\xi_1(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3) + \xi_2(\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3) + \xi_3(\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3)$ übergeführt wird, welches wir in der Form $\eta_1y_1 + \eta_2y_2 + \eta_3y_3$ schreiben, indem wir voraussetzen $\eta_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_1$, $\eta_2 = \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{22}\xi_2 + a_{33}\xi_3$, $\eta_3 = \alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 +$

so liefern diese Gleichungen durch Auflösung für R als den Werth der Determinante der Substitution und A_{ij} als ihre Unterdeterminanten nach den entsprechenden Elementen α_{ij}
$R\xi_1 = A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3$, $\xi_2 = A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{23}\eta_3$, $\xi_3 = A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + A_{33}\eta_3$. Setzen wir die daraus hervorgehenden Werthe der ξ in die Bedingung ein, welche die Berührung einer Curve durch die Gerade $\xi_1 x_1 +$ etc. $= 0$ oder allgemeiner eine vom Axensystem unabhängige Relation derselben Geraden zu dieser Curve oder zu einem System von Curven ausdrückt, so erhalten wir die Bedingung in Function der η und sie kann nur durch einen constanten Factor von der gleichbedeutenden Function der y verschieden sein, die man erhalten würde, wenn man die ursprünglichen Gleichungen zu neuen Coordinaten transformirte und für die transformirten Gleichungen jene Bedingung nach demselben Gesetze wie vorher bildete. Functionen dieser Art sind die zugehörigen Formen oder Contravarianten (Art. 352); sie gleichen den Covarianten darin, dass eine solche Contravariante, wie z. B. die Tangentialgleichung eines Kegelschnitts $(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\xi_1^2 +$ etc. $=0$ durch lineare Substitutionen in die Gleichung $(b_{22}b_{33} - b_{23}^2)\eta_1^2 +$ etc. $= 0$ transformirt wird, welche nach demselben Gesetze aus den Coefficienten der transformirten Punktgleichung des Kegelschnitts gebildet ist, aber sie unterscheiden sich von denselben darin, dass die ξ nicht durch dieselben (ursprünglichen) Substitutionen wie die x, sondern durch die transponirten Substitutionen transformirt werden, wie diess oben angegeben ist. (Vergl. Art. 82, 80.) Die Bedingung des Art. 353 ist eine Contravariante des Systems der Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$.

Wir bemerken endlich, dass die Function $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$ durch die gleichzeitige Anwendung der ursprünglichen und der transponirten Substitution direct in die entsprechende Function $\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3$ übergeht; denn in der Entwickelung von

$$\{(A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3)(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3) + (A_{21}\eta_1 + \text{etc.})(\alpha_{21}y_1 + \text{etc.}) + (A_{31}\eta_1 + \text{etc.})(\alpha_{31}y_1 + \text{etc.})\} = R$$

verschwinden nach den Relationen $\Sigma\alpha_{1i}A_{1j} = 0$, $\Sigma\alpha_{1i}A_{1i} = R$ (Art. 76) alle Glieder $\eta_1 y_2$, $\eta_1 y_3$, $\eta_2 y_1$, etc. und die Coefficienten der Glieder $\eta_1 y_1$, $\eta_2 y_2$, $\eta_3 y_3$ werden übereinstimmend gleich der Einheit. Man nennt diese Function eine Zwischenform des Systems und giebt die nämliche Benennung jeder Function der beiden

Reihen von Veränderlichen x und ξ, welche ihren Werth nicht oder nur durch Hinzutritt eines constanten Factors ändern, wenn man die eine Reihe der Variabeln durch die ursprünglichen, die andere aber gleichzeitig durch die transponirten Substitutionen transformirt. Zwischenformen sind daher alle Producte von Potenzen der Covarianten und Contravarianten des Systems.

356. Die Bedingung $\Phi = 0$ drückt aus, dass die Gerade $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ von dem System der Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ in Punkten eines harmonischen Systems geschnitten wird.

Wenn man zwischen der Gleichung der Geraden und der allgemeinen Gleichung des Kegelschnitts $S = 0$ die Variable x_3 eliminirt, so erhält man für die Schnittpunkte die Gleichung

$$(a_{11}\xi_3^2 - 2a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{33}\xi_1^2)x_1^2 + 2(a_{12}\xi_3^2 - a_{23}\xi_1\xi_3 - a_{13}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_1\xi_2)x_1x_2$$
$$+ (a_{22}\xi_3^2 - 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_2^2)x_2^2 = 0$$

und eine ganz gleichgebildete Gleichung mit den Coefficienten b an Stelle der a ergiebt sich für die Schnittpunkte der Geraden mit dem zweiten Kegelschnitt. Sollen diese vier Punkte ein harmonisches System bilden, so muss durch die Coefficienten beider Gleichungen die Relation der harmonischen Theilung (Art. 335) erfüllt sein, d. h. man hat die Bedingung

$$(a_{11}\xi_3^2 - 2a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{33}\xi_1^2)(b_{22}\xi_3^2 - 2b_{23}\xi_2\xi_3 + b_{33}\xi_2^2)$$
$$+ (b_{11}\xi_3^2 - 2b_{13}\xi_1\xi_3 + b_{33}\xi_1^2)(a_{22}\xi_3^2 - 2a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_2^2)$$
$$= 2(a_{12}\xi_3^2 - a_{23}\xi_1\xi_3 - a_{13}\xi_2\xi_3 + a_{33}\xi_1\xi_2)(b_{12}\xi_3^2 - b_{23}\xi_1\xi_3 - b_{13}\xi_2\xi_3 + b_{33}\xi_1\xi_2)$$

d. h. durch Entwickelung und Reduction

$$(a_{22}b_{33} + a_{33}b_{22} - 2a_{23}b_{23})\xi_1^2 + (a_{33}b_{11} + a_{11}b_{33} - 2a_{31}b_{31})\xi_2^2$$
$$+ (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\xi_3^2 + 2(a_{13}b_{12} + a_{12}b_{13} - a_{11}b_{23} - a_{23}b_{11})\xi_2\xi_3$$
$$+ 2(a_{21}b_{23} + a_{23}b_{21} - a_{22}b_{31} - a_{31}b_{22})\xi_3\xi_1$$
$$+ 2(a_{32}b_{31} + a_{31}b_{32} - a_{33}b_{12} - a_{12}b_{33})\xi_1\xi_2 = 0$$

und somit $\Phi = 0$. In derselben Art beweist man, dass $F = 0$ die Gleichung für den Ort aller der Punkte ist, für welche die von ihnen an die Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ gehenden Tangentenpaare ein harmonisches Büschel bilden. (Vergl. Art. 335.) Man findet, dass die Punktgleichung jedes mit $S = 0$ und $S' = 0$ covarianten Kegelschnitts in Function von S, S', F ausgedrückt werden kann, indess seine Tangentialgleichung in Function von Σ, Σ', Φ sich ergiebt. Die folgenden Beispiele werden diess erläutern.

Aufg. 1. Wenn man die Pole aller Tangenten eines Kegelschnitts

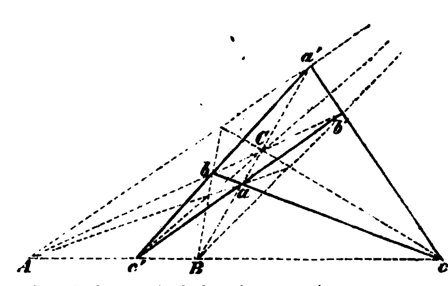
$S=0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S'=0$ bildet, so ist der Ort derselben eine Curve, die man die Polarcurve von S in Bezug auf S' nennt. Diese und die Polarcurve von S' in Bezug auf S sind Covarianten des Systems; man soll ihre Gleichungen in Function von S, S', F entwickeln.

Wir denken die gegebenen Kegelschnitte auf ihr gemeinsames System harmonischer Pole bezogen und setzen ihre Gleichungen in der Form $S = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, $S' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ voraus; dann ist $F = a_{11}(a_{22}+a_{33})x_1^2 + a_{22}(a_{33}+a_{11})x_2^2 + a_{33}(a_{11}+a_{22})x_3^2 = 0$. Da aber die Bedingung der Berührung einer Geraden mit $S=0$ die Form $a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}\xi_3^2 = 0$ hat, so ist der Ort der Pole der Tangenten von $S=0$ mit Bezug auf $S'=0$ durch $a_{22}a_{33}x_1^2 + a_{33}a_{11}x_2^2 + a_{11}a_{22}x_3^2 = 0$ gegeben. Da diess aber in der Form $(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2F$ geschrieben werden kann, in welcher auch der Coefficient der linken Seite eine Invariante ist (Art. 347, Aufg. 1), so wird der Ort durch die Gleichung $3\Theta S' = 2F$ allgemein dargestellt. Ebenso ist $3\Theta' S = 2F$ die Gleichung der Polare von $S'=0$ in Bezug auf $S=0$.

Aufg. 2. Der mit $S=0$, $S'=0$ covariante Kegelschnitt $3\Theta' S - 3\Theta S' = 0$ geht durch die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte selbst und durch die der Polarcurven eines jeden in Bezug auf den andern. Denn die gegebene Gleichung ist die Differenz der Gleichungen dieser Polarcurven. Der Kegelschnitt $F=0$ geht durch die Schnittpunkte jedes der beiden Kegelschnitte mit der Polarcurve des andern in Bezug auf ihn.

Aufg. 3. Für $\Theta = \Theta' = 0$ decken sich beide Polarcurven in dem Kegelschnitt $F=0$. Vorausgesetzt, dass beide Kegelschnitte auf ihr gemeinsames System harmonischer Pole in den Formen $a_{11}x_1^2 + \text{etc.} = 0$, $b_{11}x_1^2 + \text{etc.} = 0$ bezogen sind, so hat man hiernach
$\frac{a_{11}}{b_{11}} + \frac{a_{22}}{b_{22}} + \frac{a_{33}}{b_{33}} = 0$, $\frac{a_{22}}{b_{22}}\frac{a_{33}}{b_{33}} + \text{etc.} = 0$, d. h. die Verhältnisse von $\frac{a_{11}}{b_{11}}, \frac{a_{22}}{b_{22}}, \frac{a_{33}}{b_{33}}$ sind für die Cubikwurzeln der Einheit 1, θ, θ^2 durch $\frac{a_{11}}{b_{11}} = \theta\frac{a_{22}}{b_{22}} = \theta^2\frac{a_{33}}{b_{33}}$ gegeben, d. h. die Gleichungen der Kegelschnitte sind $a_{11}x_1^2 + \text{etc.} = 0$, $a_{11}x_1^2 + \theta a_{22}x_2^2 + \theta^2 a_{33}x_3^2 = 0$. Man findet dann für die Gleichungen der Polarcurven und für F den Ausdruck $a_{11}x_1^2 + \theta^2 a_{22}x_2^2 + \theta a_{33}x_3^2 = 0$ und sieht daraus, dass jeder der drei Kegelschnitte zugleich den Kegelschnitt F und die vereinigten Polarcurven für die beiden andern repräsentirt. Für solche Kegelschnitte ist auch die Bedingung $3\Theta'^2 = 4\Delta\Theta$ erfüllt, die dem ein- und umgeschriebenen Dreieck entspricht. Zwei gleiche Kreise, deren gemeinschaftliche Sehne dem Radius gleich ist, geben ein solches System.

Aufg. 4. Die Doppel-punkte der drei Involutionen aa', BC; bb', CA; cc', AB in den Diagonalen eines Vier-ecks und die vier Paare von Punkten, welche in den Seiten mit den ihnen angehörigen Gruppen abc, $ba'c'$, $a'b'c$, $b'ac'$ Systeme von gleichen fundamentalen Doppel-



verhältnissen bilden, liegen auf demselben Kegelschnitt.

Wenn drei Seiten des Vierecks als Fundamentallinien genommen werden und die vierte die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ hat, sodass $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$, $a_3 x_3 + a_1 x_1 = 0$, $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ die Diagonalen sind, so sind durch $x_2 x_3 (a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0$ die drei Punkte einer Vierecksseite und durch deren Hesse'sche Determinante (Art. 342) $a_2^2 x_2^2 + a_2 a_3 x_2 x_3 + a_3^2 x_3^2 = 0$ die Punkte bestimmt, die mit ihnen gleiche fundamentale Doppelverhältnisse bestimmen. Diese und die beiden Paare $a_3^2 x_3^2 + a_3 a_1 x_3 x_1 + a_1^2 x_1^2 = 0$, $a_1^2 x_1^2 + a_1 a_2 x_1 x_2 + a_2^2 x_2^2 = 0$ liegen auf dem Kegelschnitt
$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + a_2 a_3 x_2 x_3 + a_3 a_1 x_3 x_1 + a_1 a_2 x_1 x_2 = 0$ oder $(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 + (a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 + (a_3 x_3 + a_1 x_1)^2 = 0$ d. h. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ für die drei Diagonalen als Fundamentallinien. Auch die vierte Seite schneidet ihn in zwei Punkten der bezeichneten Art. Die Diagonale $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ giebt als Schnittpunkte mit ihm $a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 = 0$, d. h. die Doppelpunkte der auf ihr bestimmten Involution. (Vergl. Art. 344) Für ein reelles Viereck ist unser Kegelschnitt imaginär.

Aufg. 5. Man soll die Gleichung des Kegelschnitts $\Phi = 0$ in Function von S, S', F ausdrücken, welchen eine Gerade umhüllt, die die Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ in vier harmonischen Punkten schneidet. Die Tangentialgleichung desselben ist $\Phi = 0$ oder unter der Voraussetzung der Beziehung auf das gemeinsame System harmonischer Pole

$$(a_{22} + a_{33}) \xi_1^2 + (a_{33} + a_{11}) \xi_2^2 + (a_{11} + a_{22}) \xi_3^2 = 0.$$

Daher ist seine Gleichung in Punktcoordinaten

$$(a_{33} + a_{11})(a_{11} + a_{22}) \xi_1^2 + (a_{11} + a_{22})(a_{22} + a_{33}) \xi_2^2 + (a_{22} + a_{33})(a_{33} + a_{11}) \xi_3^2 = 0$$

oder als Gleichung mit nur invarianten Coefficienten

$$2F = (a_{22} x_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) +$$
$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})(a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2)^2, \text{ d. h. } 3(\Theta S' + \Theta' S) - 2F = 0.$$

Aufg. 6. Man soll die Gleichung des in Aufg. 4 bezeichneten Kegelschnitts als Covariante des Systems von zwei Kegelschnitten ausdrücken. Wenn die beiden Kegelschnitte auf das gemeinsame System harmonischer Pole bezogen oder ihre Gleichungen $a_{11} x_1^2 + \text{etc.} = 0$, $b_{11} x_1^2 + \text{etc.} = 0$ sind, $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$ aber eine ihrer gemeinsamen Tangenten ist, so sind diese Tangenten sämmtlich durch $c_1 x_1 \pm c_2 x_2 \pm c_3 x_3 = 0$ dargestellt, und der fragliche Kegelschnitt hat die Gleichung $c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2 + c_3^2 x_3^2 = 0$; für die c aber gelten die Bedingungen $a_{22} a_{33} c_1^2 + \text{etc.} = 0$, $b_{22} b_{33} c_1^2 + \text{etc.} = 0$ d. h. $c_1^2 : c_2^2 : c_3^2$ $= a_{11} b_{11} (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22}) : a_{22} b_{22} (a_{33} b_{11} - a_{11} b_{33}) : a_{33} b_{33} (a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11})$.

Sind dann $S = 0$, $S' = 0$ die Gleichungen der Kegelschnitte und vertritt $W = 0$ die Gleichung der Enveloppe der vorigen Aufg., so ist

$\lambda S + \mu S' + \nu W = 0$ die Gleichung unseres Kegelschnitts; dann ergeben sich aus $W = a_{11} b_{11} (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22}) x_1^2 +$ etc. $= 0$ für die vorausgesetzte Beziehung die Relationen

$$\lambda a_{11} + \mu b_{11} + \nu a_{11} b_{11} (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22}) = a_{11} b_{11} (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22})$$

mit zwei gleichgebildeten durch cyclische Vertauschung der Indices. Multiplicirt man diese Relationen respective mit $a_{22} a_{33}$, $a_{33} a_{11}$, $a_{11} a_{22}$ und addirt die Producte, so erhält man

$$3 \lambda a_{11} a_{22} a_{33} + \mu (b_{11} a_{22} a_{33} + \text{etc.}) + 2 \nu a_{11} a_{22} a_{33} (a_{11} b_{22} b_{33} + \text{etc.}) = 0$$

wo alle Glieder Invarianten sind; d. h. allgemein gilt die Relation $\lambda \Delta + \mu \Theta + 2 \nu \Delta \Theta' = 0$ und ebenso $\lambda \Theta' + \mu \Delta' + 2 \nu \Delta' \Theta = 0$, so dass sich ergiebt $\lambda : \mu : \nu = \Delta' (\Theta^2 - \Delta \Theta') : \Delta (\Theta'^2 - \Delta' \Theta) : (\Delta \Delta' - \Theta \Theta')$. Die allgemeine Gleichung des durch jene vierzehn Punkte gehenden Kegelschnitts ist somit

$$2 \Delta' (\Theta^2 - \Delta \Theta') S + 2 \Delta (\Theta'^2 - \Delta' \Theta) S' + (\Delta \Delta' - \Theta \Theta') \{ 3 (\Theta S' + \Theta' S) - 2 F \} = 0.$$

Aufg. 7. Für das System der Kegelschnitte $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$, $a_{11} x_1^2 + a_{22} \theta x_2^2 + a_{33} \theta^2 x_3^2 = 0$, $a_{11} x_1^2 + a_{22} \theta^2 x_2^2 + a_{33} \theta x_3^2 = 0$ geht jeder der drei durch das System der vierzehn Punkte, welches die beiden andern der vorigen Aufgabe gemäss bestimmen.

Aufg. 8. Man soll die Bedingung aufstellen, unter welcher der Kegelschnitt $F = 0$ in zwei gerade Linien degenerit. Sie ist

$$a_{11} a_{22} a_{33} (a_{22} + a_{33}) (a_{33} + a_{11}) (a_{11} + a_{22}) = 0 \quad \text{oder}$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} \{ (a_{11} + a_{22} + a_{33}) (a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22}) - a_{11} a_{22} a_{33} \} = 0$$

oder

$$\Delta \Delta' (9 \Theta \Theta' - \Delta \Delta') = 0.$$

$9 \Theta \Theta' = \Delta \Delta'$ ist auch die Bedingung, unter welcher $\Phi = 0$ in zwei lineare Factoren zerfällt, d. h. unter welcher alle Geraden, welche von den beiden Kegelschnitten harmonisch getheilt werden, durch einen oder den andern von zwei festen Punkten gehen. Diese Bedingung wird z. B. erfüllt für zwei Kreise, welche sich rechtwinklig durchschneiden, und in der That wird in diesem Falle jeder Durchmesser des einen Kreises durch den andern harmonisch getheilt und der Ort der Punkte, deren Tangenten ein harmonisches Büschel bilden, reducirt sich auf zwei gerade Linien. Ort und Enveloppe reduciren sich auf analoge Weise für

$$D^2 = 2 (r^2 + r'^2).$$

Aufg. 9. Man soll die Envoloppe der Basis eines Dreiecks bestimmen, welches dem Kegelschnitt $S = 0$ eingeschrieben ist und dessen Seiten den Kegelschnitt $S' = 0$ berühren.

Wird das Dreieck als Fundamentaldreieck genommen und sind daher die Gleichungen der Kegelschnitte durch

$$S = 2 (a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2) = 0,$$

$$S' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 x_2 x_3 - 2 x_3 x_1 - 2 a_{12} k x_1 x_2 = 0$$

gegeben, wo $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die durch $S' = 0$ berührten Seiten bezeichnen, so ist der Kegelschnitt $k S + S' = 0$ durch die Seite $x_3 = 0$ berührt und nach den Werthen der Invarianten des Falles erkennt man diess als die Gleichung eines festen Kegelschnitts. Denn wegen

$\Delta = 2 a_{23} a_{31} a_{12}$, $3\Theta = -(a_{23} + a_{31} + a_{12})^2 - 2 a_{23} a_{31} a_{12} k$, $3\Theta' = 2(a_{23} + a_{31} + a_{12})(2 + a_{12} k)$, $\Delta' = -(2 + a_{12} k)^2$ ist $9\Theta'^2 - 12\Theta\Delta = 4\Delta\Delta' k$ und die Gleichung $kS + S' = 0$ geht daher über in $3(3\Theta'^2 - 4\Theta\Delta)S + 4\Delta\Delta' S' = 0$, die Gleichung eines festen Kegelschnitts, den die dritte Seite des Dreiecks berührt. Für $3\Theta'^2 = 4\Theta\Delta$ berührt die dritte Seite den Kegelschnitt $S' = 0$. (Art. 352.)

Aufg. 10. Man soll den Ort für die Spitze eines Dreiecks finden, dessen drei Seiten einen Kegelschnitt $U = 0$ berühren, während zwei seiner Ecken einem andern Kegelschnitt $V = 0$ angehören.

Um die Aufgabe zu lösen, bilden wir die Gleichung des Tangentenpaars von $U = 0$ aus dem Punkt x', sodann die Gleichung der Geraden, welche die Durchschnittspunkte derselben mit $V = 0$ verbinden, endlich die Bedingung, dass eine dieser Geraden, die die Basis des fraglichen Dreiecks sein muss, den Kegelschnitt $V = 0$ berühre. Ist dann $P = 0$ die Gleichung der Polare von x' in Bezug auf $U = 0$ und U' das Resultat der Substitution von x' für x in U (die analoge Bedeutung hat das nachher zu verwendende V'), so ist die Gleichung des Tangentenpaars $UU' - P^2 = 0$; die Bedingung, unter welcher $UU' - P^2 + \lambda V = 0$ ein Paar gerade Linien repräsentirt, liefert zur Bestimmung der Durchschnittssehnen dieses Tangentenpaars mit dem Kegelschnitt die Relation $\lambda^2\Delta + 2\lambda F + \Delta U' V' = 0$. Um sodann die Bedingung zu finden, unter welcher eine dieser Sehnen den Kegelschnitt $U = 0$ berührt, bilden wir nach Art. 348 die Discriminante von $\mu U + (UU' - P^2 + \lambda V) = 0$ und stellen die Bedingung auf, unter welcher sie in μ gleiche Wurzeln hat; jene ist

$$\mu^2\Delta + \mu(2U'\Delta + 3\lambda\Theta) + \left\{U'^2\Delta + \lambda(3\Theta U + \Delta V) + 3\lambda^2\Theta'\right\} = 0$$

und diese giebt $3\lambda(4\Delta\Theta' - 3\Theta^2) + 4\Delta^2 V = 0$. Die Substitution des entsprechenden Werthes von λ in $\lambda^2\Delta' + 2\lambda F + \Delta U' V' = 0$ giebt die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$16\Delta^3\Delta' V - 24\Delta(4\Delta\Theta' - 3\Theta^2)F + 9U(4\Delta\Theta' - \Theta^2)^2 = 0.$$

Sie reducirt sich für $4\Delta\Theta' = 3\Theta^2$ auf $V = 0$, wie es sein muss.

Aufg. 11. Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, von dessen Seiten zwei den Kegelschnitt $U = 0$ berühren, während die dritte den andern $aU + bV = 0$ berührt und die beiden Basisecken sich in $V = 0$ bewegen.

Man findet nach der Methode des letzten Beispiels, dass der Ort der eine oder der andere von den Kegelschnitten ist, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten von $U = 0$ und $V = 0$ berühren, und die die Gleichung darstellt $\Delta\Delta'\lambda^2 V + 2\lambda\mu F + \mu^2 U = 0$, wenn $\lambda : \mu$ aus der Gleichung

$$a\left\{4\Delta\Delta' b - 3(3\Theta^2 - 4\Delta\Theta')a\right\}\lambda^2 + 2a(2\Delta a + 3\Theta b)\lambda\mu - b^2\mu^2 = 0$$

bestimmt wird.

Aufg. 12. Man soll den Ort der freien Ecke eines Polygons bestimmen, dessen sämmtliche Seiten den Kegelschnitt $U = 0$ berühren.*)

Diese Aufgabe reducirt sich auf die letztvorhergehende; denn die Verbindungslinie zweier Ecken des Polygons, die der freien Ecke benachbart sind, berührt einen Kegelschnitt von der Gleichung $aU + bV = 0$. Wenn λ', μ'; λ'', μ''; λ''', μ''' die den Polygonen von $(n-1)$, n und 1 $(n+1$

*) während seine übrigen Ecken in dem festen Kegelschnitt $V = 0$ liegen.

Seiten entsprechenden Werthe sind, so ist
$\lambda'''^2 = \mu'\mu''^2$, $\mu''' = \Delta'\lambda'\lambda''(\alpha\mu'' - \Delta'\beta\lambda'')$. In dem Falle des Dreiecks ist
$\lambda' = 4\Delta\Delta'$, $\mu' = 3\Delta'(3\Theta^2 - 4\Delta\Theta')$; im Falle des Vierecks wird
$\lambda'' = 9(3\Theta^2 - 4\Delta\Theta')^2$, $\mu'' = 8\Delta\Delta'\{8\Delta^2\Delta' + 9\Theta(3\Theta^2 - 4\Delta\Theta')\}$
und aus diesen ergeben sich Schritt für Schritt die Werthe für jedes andere Polygon.

Aufg. 13. Man soll das Kriterium angeben, welches entscheidet, ob ein bestimmter Punkt innerhalb oder ausserhalb eines Kegelschnitts liegt, d. h. ob die von ihm aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten reell sind oder nicht.

Aufl. Der Punkt liegt innerhalb, wenn Δ und S' einerlei Vorzeichen haben oder ihr Product positiv ist. Die Lage auf dem Kegelschnitt und das Zerfallen desselben in zwei Gerade machen die Antwort unbestimmt.

Aufg. 14. Das von den Polaren der Mittelpunkte der Seiten eines gegebenen Dreiecks in Bezug auf einen jeden eingeschriebenen Kegelschnitt gebildete Dreieck hat eine constante Fläche.

357. Die Theorie der Invarianten erlaubt die Ergebnisse der linearen Substitutionen an den Formen zweiten Grades in allgemeiner Form zu entwickeln und sie zur Lösung der wichtigsten Probleme, wie der Herstellung der Beziehung auf ein System harmonischer Pole zu verwenden. Indem wir sie untersuchen, knüpfen wir an das an, was im Art. 82 über die Substitutionen im Allgemeinen und die orthogonalen insbesondere gesagt ist.

Wir denken die allgemeine Gleichung zweiten Grades
$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 = 0$ durch die lineare Substitution
$x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3$, $x_2 = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3$,
$x_3 = \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3$ transformirt, und bezeichnen die Determinante der Substitution durch B, sowie ihre Unterdeterminante nach dem Element β_{ik} durch B_{ik}. Man erhält für die Transformirte

$$a_{11}(\beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3)^2 + a_{22}(\beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3)^2 + \text{etc.}$$
$$+ 2a_{12}(\beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3)(\beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3) = 0$$

und der Schreibart der allgemeinen Gleichung

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x_2$$
$$+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)x_3 = 0$$

entsprechend kann man sie in der Form

$$(p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + p_{13}y_3)(\beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3) +$$
$$(p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + p_{23}y_3)(\beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3) +$$
$$(p_{31}y_1 + p_{32}y_2 + p_{33}y_3)(\beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3) = 0$$

schreiben für $p_{ik} = a_{i1}\beta_{1k} + a_{i2}\beta_{2k} + a_{i3}\beta_{3k}$.

Sind dann c_{rs} die Coefficienten der transformirten Gleichung,

so ist $c_{rs} = p_{1r}\beta_{1s} + p_{2r}\beta_{2s} + p_{3r}\beta_{3s}$, ein Ausdruck, der für die Vertauschung von r und s seinen Werth nicht ändert.

Für die Beziehung des Kegelschnitts auf ein System harmonischer Pole muss für ungleiche r und s

$$c_{rs} \equiv p_{1r}\beta_{1s} + p_{2r}\beta_{2s} + p_{3r}\beta_{3s} = 0,$$

d. h. die Substitution ist drei Bedingungsgleichungen unterworfen.

Für $c_{rr} = p_{1r}\beta_{1r} + p_{2r}\beta_{2r} + p_{3r}\beta_{3r} = \lambda_r$ wird die transformirte Gleichung $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0$. Diese Transformation kann in unendlich vielen Arten vollzogen werden. **Unter den möglichen Substitutionen ist eine orthogonale** (Art. 82), denn es ist möglich, die sechs unbestimmt gebliebenen Coefficienten durch die sechs Relationen (a. a. O. p. 108) zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution zu bestimmen.

Ist die Substitution $x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3$, etc. orthogonal, so erhält man aus ihr wegen $B_{ik} = B\beta_{ik}$ *) von der allgemeinen Relation $By_k = B_{1k}x_1 + B_{2k}x_2 + B_{3k}x_3$ die Auflösung des Systems der Substitutionsgleichungen in der Form $y_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{21}x_2 + \beta_{31}x_3$, $y_2 = \beta_{12}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{32}x_3$, $y_3 = \beta_{13}x_1 + \beta_{23}x_2 + \beta_{33}x_3$ d. h. in der Form der transponirten Substitution. (Art. 82.) Man gelangt also durch diese von der transformirten Gleichung zur ursprünglichen Gleichung zurück und die Vergleichung entsprechender Coefficienten in dieser und in jener Entwickelung liefert Bedingungsgleichungen von der Form

$$a_{ik} = \lambda_1 \beta_{i1}\beta_{k1} + \lambda_2 \beta_{i2}\beta_{k2} + \lambda_3 \beta_{i3}\beta_{k3}.$$

Man bildet aus ihnen die Productensumme $a_{i1}\beta_{1k} + a_{i2}\beta_{2k} + a_{i3}\beta_{3k} = \lambda_k\beta_{ik}$, welche entsprechend $i = 1, 2, 3$ drei Relationen vertritt, aus denen durch Elimination der β_{1k}, β_{2k}, β_{3k} die Gleichung

$$f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_k, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda_k, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda_k \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung der λ hervorgeht. Die λ sind die drei Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$, welche stets reell sind**). Nennen wir dann

---

*) Man hat ebenso $\beta_{1i}B_{1k} + \beta_{2i}B_{2k} + \beta_{3i}B_{3k} = 0$ nach allgemeinen Gesetzen der Determinanten, wie nach denen der Determinante einer orthogonalen Substitution insbesondere $\beta_{1i}\beta_{1k} + \beta_{2i}\beta_{2k} + \beta_{3i}\beta_{3k} = 0$, somit $B_{ik} = m\beta_{ik}$ für m als eine Constante; erhält aber dadurch aus der allgemeinen Gleichung $\beta_{1k}B_{1k} + \beta_{2k}B_{2k} + \beta_{3k}B_{3k} = B$ die specielle $m(\beta_{1k}^2 + \beta_{2k}^2 + \beta_{3k}^2) = m = B$, also die Relation des Textes.

**) Man beweist die nothwendige Realität durch Bildung der Func-

A_1, A_2, A_3 die Unterdeterminanten der vorigen Determinante nach den Elementen $a_{11}-\lambda_k$, etc. so erhalten wir

$\beta_{1k} : \beta_{2k} : \beta_{3k} = \sqrt{A_{11}} : \sqrt{A_{22}} : \sqrt{A_{33}}$ **), und somit wegen $\beta_{1i}^2 + \beta_{2i}^2 + \beta_{3i}^2 = 1$ und für $A_1 + A_2 + A_3 = s$, $\beta_{ik}\sqrt{s} = \sqrt{A_i}$.

Aufg. Verfügt man über sechs Coefficienten der Substitution so, dass β_{11}, β_{22}, β_{33} gleich Eins und β_{21}, β_{31}, β_{32} gleich Null sind, so wird die Determinante der Substitution gleich Eins, ihre Unterdeterminanten nach den Elementen des Anfangsgliedes sind gleich Eins und alle übrigen gleich Null. Man erhält durch Vergleichung der Coefficienten der Originale und der transformirten Gleichung

$\lambda_r = p_{1r}\beta_{1r} + p_{2r}\beta_{2r} + p_{3r}\beta_{3r}$, $0 = p_{1r}\beta_{1s} + p_{2r}\beta_{2s} + p_{3r}\beta_{3s}$; also $p_{sr} = \frac{\lambda_r B_{sr}}{B} = a_{1s}\beta_{1r} + a_{2s}\beta_{2r} + a_{3s}\beta_{3r}$. Macht man in dieser Formel nach einander $s = 1, 2, \ldots r$, so erhält man das System

$a_{11}\beta_{1r} + a_{21}\beta_{2r} + a_{31}\beta_{3r} = 0$, $a_{12}\beta_{1r} + a_{22}\beta_{2r} + a_{32}\beta_{3r} = 0$, etc., $a_{1r}\beta_{1r} + a_{2r}\beta_{2r} + a_{3r}\beta_{3r} = \lambda_r$ mit $r = 1, 2, 3$. Setzt man die der Discriminante gleichgebildete Determinante

$\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{rr} = \Delta_r$, $(\Delta_0 = 1)$; so erhält man aus dem vorigen System

$$\Delta_r\beta_{rr} = \lambda_r\Delta_{r-1},\quad \Delta_r\beta_{sr} = \lambda_r\frac{d\Delta_r}{da_{sr}},\ \text{d. h.}\ \lambda_r = \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}},$$

$\beta_{sr} = \frac{1}{\Delta_{r-1}}\frac{d\Delta_r}{da_{sr}}$ $(s < r)$, wodurch Transformation und Transformirte zugleich bestimmt sind, nämlich jene mit

$$x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}y_2 + \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}y_3,\quad x_2 = y_2 + \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}y_3,$$

$x_3 = y_3$, und diese durch

$$a_{11}y_1^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}y_2^2 + \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}y_3^2 = 0$$

358. Wir untersuchen ferner die der **Beziehung von zwei Kegelschnitten auf das ihnen gemeinschaftliche System harmonischer Pole entsprechende Transformation**, welche mit Hilfe der Invarianten des Systems ausführbar ist.

Wir setzen die Gleichungen der Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ in der allgemeinen Form $a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 = 0$, $b_{11}x_1^2 + \ldots + 2b_{12}x_1x_2 = 0$ voraus und denken sie durch die linearen Substitutionen in die jener Beziehung entsprechende Form $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 = 0$, $\mu_1y_1^2 + \mu_2y_2^2 + \mu_3y_3^2 = 0$ übergeführt;

tion $f(-\lambda)$ und des Products $f(\lambda)f(-\lambda)$; man erhält eine Gleichung sechsten Grades in λ mit abwechselnden Zeichen und wesentlich positiven Coefficienten, die nach der Regel des Descartes keine negativen Werthe von λ^2 geben kann. (Vergl. „Vorlesungen" p. 25.)

**) Weil nach Art. 76 $\beta_{1k}:\beta_{2k}:\beta_{3k} = A_{i1}:A_{i2}:A_{i3}$ und nach dem Verschwinden der Determinante $f(\lambda)$ und ihrer Symmetrie $A_{i1}:A_{i2}:A_{i3} = \sqrt{A_{11}}:\sqrt{A_{22}}:\sqrt{A_{33}}$ wird (vergl. „Vorlesungen" Art. 23, p. 42).

wir dürfen dabei auch die μ implicite der y voraussetzen und die transformirte Form von $S'=0$ mit $y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$ annehmen. Die Aufgabe der Ermittelung der Werthe der Substitutionscoefficienten und der λ ist völlig bestimmt, denn den zwölf Unbekannten entsprechen nach den Identitäten der transformirten und der ursprünglichen Formen zwölf Bedingungsgleichungen.

Die Untersuchung der Discriminante Δ^* und der zugehörigen Formen Σ^* des Systems $S-\lambda S'=0$ führt zur Bestimmung sämmtlicher Unbekannten; jene ist

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11}, & a_{12}-\lambda b_{12}, & a_{13}-\lambda b_{13} \\ a_{21}-\lambda b_{21}, & a_{22}-\lambda b_{22}, & a_{23}-\lambda b_{23} \\ a_{31}-\lambda b_{31}, & a_{32}-\lambda b_{32}, & a_{33}-\lambda b_{33} \end{vmatrix} = \Delta - 3\lambda\Theta + 3\lambda^2\Theta' - \lambda^3\Delta' = f(\lambda)$$

und die Discriminante des transformirten Systems ist für B als die Substitutionsdeterminante nothwendig

$$B^2 f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda);$$

man sieht also, dass die cubische Gleichung $\Delta - 3\lambda\Theta + 3\lambda^2\Theta' - \lambda^3\Delta' = 0$*) (die Gleichung des Art. 346 mit $-\frac{1}{\lambda}$ für k) die Werthe von λ liefert, welche die Coefficienten in der transformirten Form sind.

Bildet man ferner die zugehörige Form Σ^* des Systems $\Sigma - 2\lambda_i\Phi + \lambda_i^2\Sigma'$ (Art. 353)

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \xi_1, & a_{11}-\lambda b_{11}, & a_{12}-\lambda b_{12}, & a_{13}-\lambda b_{13} \\ \xi_2, & a_{21}-\lambda b_{21}, & a_{22}-\lambda b_{22}, & a_{23}-\lambda b_{23} \\ \xi_3, & a_{31}-\lambda b_{31}, & a_{32}-\lambda b_{32}, & a_{33}-\lambda b_{33} \end{vmatrix},$$

so geht dieselbe durch die transponirte Substitution in die zugehörige Form des transformirten Systems

---

*) Sie kann auch direct aus den Systemen

$$\rho\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \quad \sigma\xi_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3,$$
$$\rho\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad \sigma\xi_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3,$$
$$\rho\xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \quad \sigma\xi_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3,$$

abgeleitet werden, welche die Beziehung auf das gemeinschaftliche harmonische System ausdrücken. Denn sie liefern $(a_{11}-\lambda b_{11})x_1+(a_{12}-\lambda b_{12})x_2+(a_{13}-\lambda b_{13})x_3=0$, etc. und damit die cubische Gleichung des Textes. Auch die weitere Behandlung des Problems schliesst sich daran an, weil $\mu x_i x_j = \Delta_{ij}$ ist.

$$B^2\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \eta_1, & \lambda_1-\lambda, & 0, & 0 \\ \eta_2, & 0, & \lambda_2-\lambda, & 0 \\ \eta_3, & 0, & 0, & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{d. h.}$$

$$= -(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\left\{\frac{\eta_1^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\eta_2^2}{\lambda_2-\lambda}+\frac{\eta_3^2}{\lambda_3-\lambda}\right\}$$

über. Denken wir dann die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die sich aus der cubischen Gleichung der Discriminante ergeben haben, in diese Gleichung nach einander substituirt, so erhalten wir das System $B^2\varphi(\lambda_1) = -(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\eta_1^2$, $B^2\varphi(\lambda_2) = -(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\eta_2^2$, $B^2\varphi(\lambda_3) = -(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\eta_3^2$. Die Vergleichung der beiden Ausdrücke von $f(\lambda)$ zeigt, dass der Coefficient von λ^3 in dem einen $(-1)^3\Delta' B^2$, im andern $(-1)^3$ ist und liefert daher $\Delta' B^2 = 1$ oder die Bestimmung von B^2. Damit bestimmen die vorigen drei Gleichungen die Werthe von η.

Die Substitutionen $\eta_1 = \beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2 + \beta_{31}\xi_3$, $\eta_2 = \beta_{12}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{32}\xi_3$, $\eta_3 = \beta_{13}\xi_1 + \beta_{23}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3$; und $x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3$, $x_2 = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3$, $x_3 = \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3$ machen die vorigen Gleichungen zu

$$\frac{\varphi(\lambda_1)}{\Delta'} = -(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\{\beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2 + \beta_{31}\xi_3\}^2, \text{ etc.}$$

Denkt man $\varphi(\lambda_1)$ durch Δ' und das Product der Differenzen von λ dividirt, und den Quotienten nach Potenzen der ξ geordnet, so liefert die Vergleichung der Coefficienten entsprechender Potenzen von ξ auf beiden Seiten die zur Bestimmung der β hinreichende Anzahl von Gleichungen. Das Product der Differenzen der λ, mit welchem zu dividiren war, ist aber wegen $B^2 f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)$ derselbe Ausdruck, welchen man erhält, indem man $B^2 f(\lambda)$ zuerst nach λ differentiirt und dann für λ jene Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ resp. einsetzt, d. h. $B^2 f'(\lambda_1)$ oder $\frac{f'(\lambda_1)}{\Delta'}$, etc. Die vorigen Bestimmungsgleichungen für die β nehmen also die Endgestalt an

$$-\frac{\varphi(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)} = (\beta_{11}\xi_1 + \beta_{21}\xi_2 + \beta_{31}\xi_3)^2, \quad -\frac{\varphi(\lambda_2)}{f'(\lambda_2)} = (\beta_{12}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{32}\xi_3)^2,$$

$-\frac{\varphi(\lambda_3)}{f'(\lambda_3)} = (\beta_{13}\xi_1 + \beta_{23}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3)^2$ *), oder in vollständig ent-

---

*) Diese Entwickelungen lassen sich ohne Veränderung auf quadratische Formen von n Veränderlichen ausdehnen.

wickelter Gestalt in den zugeordneten Formen ausgedrückt $\frac{\Sigma - 2\lambda_i \Phi + \lambda_i^2 \Sigma'}{f'(\lambda_i)} = \eta_i^2$. Die Substitutionscoefficienten selbst erhält man endlich ebenso wie folgt: Man hat aus den Relationen der zugeordneten Formen $\Sigma_\eta = B^2 \Sigma_\xi$, wenn man die den Coordinaten ξ und η entsprechenden Formen durch die angehängten Indices bezeichnet; ebenso $\Sigma'_\eta = B^2 \Sigma'_\xi$, $\Phi'_\eta = B^2 \Phi_\xi$ und erhält aus ihnen die η in Function der ξ, oder $\eta_i = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ und somit $\beta_{1i}\xi_1 + \beta_{2i}\xi_2 + \beta_{3i}\xi_3 = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ oder durch die successiven Substitutionen $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$; $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ die Werthe von $\beta_{1i} = \psi_i(1, 0, 0)$; $\beta_{2i} = \psi_i(0, 1, 0)$; $\beta_{3i} = \psi_i(0, 0, 1)$ und daher für unser Problem

$$\beta_{1i} = \sqrt{\frac{\Sigma(1, 0, 0) - 2\lambda_i \Phi(1, 0, 0) + \lambda_i^2 \Sigma'(1, 0, 0)}{f'(\lambda_i)}}$$

$$\beta_{2i} = \sqrt{\frac{\Sigma(0, 1, 0) - 2\lambda_i \Phi(0, 1, 0) + \lambda_i^2 \Sigma'(0, 1, 0)}{f'(\lambda_i)}}$$

$$\beta_{3i} = \sqrt{\frac{\Sigma(0, 0, 1) - 2\lambda_i \Phi(0, 0, 1) + \lambda_i^2 \Sigma'(0, 0, 1)}{f'(\lambda_i)}}.$$

Aufg. 1. Man soll die Gleichungen

$$S \equiv 9x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3 - 10x_3x_1 - 6x_1x_2 = 0,$$
$$S' \equiv 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_3x_1 + 2x_1x_2 = 0$$

auf die Normalform reduciren.

Man erhält für die Coefficienten A_{11}, A_{22} etc. der Tangentialgleichungen der Kegelschnitte die Werthe
$A_{11} = -4$, $A_{22} = -61$, $A_{33} = -36$; $A_{23} = 51$, $A_{31} = -3$, $A_{12} = 8$;
$B_{11} = 2$, $B_{22} = 9$, $B_{33} = 14$; $B_{23} = -11$, $B_{31} = 5$, $B_{12} = -4$;
für die Invarianten $\Delta = -45$, $\Delta' = 1$, $3\Theta = -49$, $3\Theta' = -3$;
also für die cubische Gleichung $f(\lambda) = 0$ $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 49\lambda - 45 = 0$
und für ihre Wurzeln $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -9$; also für die reducirten Gleichungen $5y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2 = 0$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$.

Es erübrigt die Bestimmung der Substitutionscoefficienten.

Man erhält $f'(\lambda_1) = -56$, $f'(\lambda_2) = 40$, $f'(\lambda_3) = -140$; ebenso
$\varphi(\lambda_1) = 56\xi_1^2 + 224\xi_2^2 + 224\xi_3^2 - 448\xi_2\xi_3 + 224\xi_3\xi_1 - 224\xi_1\xi_2$,
$\varphi(\lambda_2) = -40\xi_2^2 - 40\xi_3^2 + 80\xi_2\xi_3$,
$\varphi(\lambda_3) = 140\xi_1^2 + 560\xi_2^2 + 1260\xi_3^2 - 1680\xi_2\xi_3 + 840\xi_3\xi_1 - 560\xi_1\xi_2$,
also jene negativen Quotienten von $\varphi(\lambda_i)$ und $f'(\lambda_i)$ respective gleich
$\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 4\xi_3^2 - 8\xi_2\xi_3 + 4\xi_3\xi_1 - 4\xi_1\xi_2$, $\xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3$,
$\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 9\xi_3^2 - 12\xi_2\xi_3 + 6\xi_3\xi_1 - 4\xi_1\xi_2$, so dass die Bestimmungsgleichungen der Coefficienten werden

$\beta_{11}^2 = 1$, $\beta_{21}^2 = 4$, $\beta_{31}^2 = 4$, $\beta_{21}\beta_{31} = -4$, $\beta_{31}\beta_{11} = 2$, $\beta_{11}\beta_{21} = -2$;
$\beta_{12}^2 = 0$, $\beta_{22}^2 = 1$, $\beta_{32}^2 = 1$, $\beta_{22}\beta_{32} = -1$, $\beta_{32}\beta_{12} = 0$, $\beta_{12}\beta_{22} = 0$;
$\beta_{13}^2 = 1$, $\beta_{23}^2 = 4$, $\beta_{33}^2 = 9$, $\beta_{23}\beta_{33} = -6$, $\beta_{33}\beta_{13} = 3$, $\beta_{13}\beta_{23} = -2$;

und diese selbst $\beta_{11}=1$, $\beta_{12}=0$, $\beta_{13}=1$; $\beta_{21}=-2$, $\beta_{22}=1$, $\beta_{23}=-2$; $\beta_{31}=2$, $\beta_{32}=-1$, $\beta_{33}=3$. Die Determinante der Substitution ist $=1$, wie der Werth von Δ' es bedingt.

Aufg. 2. Die nämliche Reduction lässt sich unter Benutzung der cubischen Gleichung des Art. 346 an die Gleichung des covarianten Kegelschnitts $F=0$ anknüpfen, welche im Art. 356 Aufg. 1 gegeben worden ist. Für $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\equiv S$, $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0\equiv S'$ sind die a_{11}, a_{22}, a_{33} als Wurzeln der cubischen Gleichung
$\Delta k^3-3\Theta k^2+3\Theta' k-\Delta'=0$ bestimmt, weil $\Delta=1$, $3\Theta=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $3\Theta'=a_{22}a_{33}+$ etc., $\Delta'=a_{11}a_{22}a_{33}$ ist. Durch Auflösung der Gleichungen

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=S,\quad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=S',$$
$$a_{11}(a_{22}+a_{33})x_1^2+a_{22}(a_{33}+a_{11})x_2^2+a_{33}(a_{11}+a_{22})x_3^2=F$$

bestimmt man dann x_1^2, x_2^2, x_3^2 vermittelst der bekannten Functionen S, S', F. Genau gesprochen, hätte man die beiden gegebenen Gleichungen zuerst durch die Cubikwurzel aus Δ zu dividiren, weil man sie auf eine Form reducirt denkt, in welcher die Discriminante von S gleich Eins ist. Es kommt aber auf dasselbe hinaus, wenn man S, S' unverändert lässt und das aus den Coefficienten derselben berechnete F durch Δ dividirt.

Aufg. 3. Man soll die Gleichungen

$$3x^2-6xy+9y^2-2x+4y=0,\quad 5x^2-14xy+8y^2-6x-2=0$$

auf die Normalform reduciren.

Man beginnt zweckmässig mit der Berechnung der Coefficienten der Tangentialgleichung A_{11}, A_{22}, etc.; sie sind -4, -1, 18; -3, 3, -2 für die erste und -16, -19, -9; 21, 24, -14 für die zweite. Dann ergeben sich die Invarianten $\Delta=-9$, $3\Theta=-54$, $3\Theta'=-99$, $\Delta'=-54$ und die Wurzeln der cubischen Gleichung liefern $a_{11}=1$, $a_{22}=2$, $a_{33}=3$. Man berechnet sodann $F=-9(23x^2-50xy+44y^2-18x-12y-4)$ und schreibt endlich

$$X^2+Y^2+Z^2=3x^2-6xy+9y^2-2x+4y,$$
$$X^2+2Y^2+3Z^2=5x^2-14xy+8y^2-6x-2,$$
$$5X^2+8Y^2+9Z^2=23x^2-50xy+44y^2-18x+12y-4;$$

diese Gleichungen aber liefern durch die Combinationen

$$6S+S'-F,\quad F-3S-2S',\quad 2S+3S'-F$$

respective die Substitutionen

$$X^2=(3y+1)^2,\quad Y^2=(2x-y)^2,\quad Z^2=-(x+y+1)^2.$$

Aufg. 4. Man soll die Bedingung der doppelten Berührung von zwei Kegelschnitten untersuchen.

Im Falle der Berührung der beiden Kegelschnitte werden die Ausdrücke $\varphi(\lambda):\varphi'(\lambda_1)$ für die Doppelwurzel (Art. 348) der cubischen Gleichung unendlich gross, d. h. es ergiebt sich kein Dreieck der gemeinsamen harmonischen Pole. Für eine doppelte Berührung wird dasselbe unbestimmt, weil es für die Doppelwurzel $\varphi(\lambda)$ für beide Kegelschnitte den Werth Null haben muss; d. h. geometrisch, die Sehne der Berührung und ihr Pol sind eine Seite und die Gegenecke für alle Dreiecke jener Art, und die beiden andern Ecken liegen in der Sehne als ein Paar von conjugirten Punkten; und es heisst analytisch, dass in der Determinante ausser $f(\lambda)$ auch seine sämmtlichen Unterdeterminanten verschwinden, oder dass zugleich

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ und auch}$$

$$(a_{22} - \lambda b_{22})(a_{33} - \lambda b_{33}) = (a_{23} - \lambda b_{23})^2,$$
$$(a_{33} - \lambda b_{33})(a_{11} - \lambda b_{11}) = (a_{31} - \lambda b_{31})^2,$$
$$(a_{11} - \lambda b_{11})(a_{22} - \lambda b_{22}) = (a_{12} - \lambda b_{12})^2; \text{ d. h.}$$

$(a_{11}-\lambda b_{11}):(a_{12}-\lambda b_{12}):(a_{13}-\lambda b_{13}) = (a_{21}-\lambda b_{21}):(a_{22}-\lambda b_{22}):(a_{23}-\lambda b_{23})$ sind; die Elemente der Determinante verhalten sich somit wie die Quadrate und Producte von drei Grössen a_1, a_2, a_3 oder man erhält

$$a_{11} - \lambda b_{11} = m a_1^2, \quad a_{22} - \lambda b_{22} = m a_2^2, \quad a_{33} - \lambda b_{33} = m a_3^2$$
$$a_{12} - \lambda b_{12} = m a_1 a_2, \quad a_{23} - \lambda b_{23} = m a_2 a_3, \quad a_{31} - \lambda b_{31} = m a_3 a_1;$$

die Substitution dieser Werthe in die Gleichung $S = 0$ liefert aber $S \equiv \lambda S' + m(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2$ und führt auf die Gleichungsform des Art. 272 zurück.

Der Berührung zweiter Ordnung entsprechen drei gleiche Wurzeln und damit die analytischen Bedingungen $\Delta : \Theta = \Theta : \Theta' = \Theta' : \Delta'$.

Berührung dritter Ordnung verlangt die Berührung der Sehne der doppelten Berührung mit den Kegelschnitten, also das Verschwinden der zugeordneten Form des zweiten Kegelschnitts für die a_i ihrer Gleichung.

Aufg. 5. Man soll für das Paar der Kegelschnitte $5y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2 = 0$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ die Schnittpunkte und die gemeinschaftlichen Tangenten bestimmen.

Man erhält für die Schnittpunkte durch die Coexistenz der reducirten Punktgleichungen $y_1 = \pm m\sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}$, $y_2 = \pm m\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}$, $y_3 = \pm m\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}$, im gegebenen Falle also $y_1 = \pm m\sqrt{10}$, $y_2 = \pm mi\sqrt{14}$, $y_3 = \pm 2m$.

Für die Tangenten liefert die Coexistenz der Tangentialgleichungen $\frac{\eta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\eta_2^2}{\lambda_2} + \frac{\eta_3^2}{\lambda_3} = 0$, $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$ die Bestimmung

$$\eta_1 = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3}}, \quad \eta_2 = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1}}, \quad \eta_3 = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}};$$

also im gegebenen Falle $\eta_1 = \pm \frac{\mu}{3}\sqrt{10}$, $\eta_2 = \pm \frac{\mu i}{3}\sqrt{\frac{14}{5}}$, $\eta_3 = \pm 2\mu i\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Das Viereck von jenen und das Vierseit von diesen haben dasselbe Diagonaldreieck, nämlich das der Fundamentalpunkte.

Aufg. 6. Man soll die Gleichungen der gemeinsamen Punkte für die durch die allgemeinen Gleichungen bestimmten Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$ in schliesslicher Endform angeben.

Wir ermitteln die lineare Function der Wurzeln x_1, x_2, x_3 $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, was durch die der ihr äquivalenten (Art. 355) $\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3$ geschieht. Nun ist aus den transformirten Formen wie oben $y_1 : y_2 : y_3 = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3} : \sqrt{\lambda_3 - \lambda_1} : \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}$; also auch

$$\eta_1 y_1 + \text{etc.} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 =$$
$$= \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\Sigma - 2\lambda_1 \Phi + \lambda_1^2 \Sigma')}{\varphi'(\lambda_1)}} + \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\Sigma - 2\lambda_2 \Phi + \lambda_2^2 \Sigma')}{\varphi'(\lambda_2)}}$$
$$+ \sqrt{\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\Sigma - 2\lambda_3 \Phi + \lambda_3^2 \Sigma')}{\varphi'(\lambda_3)}}.$$

wo noch für $\varphi'(\lambda_i)$ sein Werth $(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)\Delta'^2$ gesetzt werden kann. Diese Function giebt, weil sie linear ist, die Werthe von $x_1 : x_2 : x_3$ für die successiven Substitutionen $\xi_1=1, \xi_2=0, \xi_3=0$; $\xi_1=0, \xi_2=1, \xi_3=0$; $\xi_1=0, \xi_2=0, \xi_3=1$ unter den Wurzelzeichen.

Aufg. 7. Man kann die Transformation auch in allgemeinster Form an die Covariante anknüpfen, welche man als zugeordnete Form von Φ erhält (während die zugeordneten Formen von Σ und Σ' wieder S und S' sind). In der transformirten Form ist $\Phi_\eta = (\lambda_2+\lambda_3)\eta_1^2 + (\lambda_3+\lambda_1)\eta_2^2 + (\lambda_1+\lambda_2)\eta_3^2$ und die entsprechende zugehörige Form Φ' (Art. 356, Aufg. 5)

$$\Phi_\eta = (\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)y_1^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)y_2^2 + (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)y_3^2 = 0$$

und man hat also wegen $B^2\Phi = \Phi'$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} B^2\Phi &= (\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)y_1^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)y_2^2 + (\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)y_3^2, \\ S &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2, \\ S' &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \end{aligned}$$

also durch Auflösung derselben

$$\begin{aligned} (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)y_1^2 &= B^2\Phi - (\lambda_2+\lambda_3)S - \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)S', \\ (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)y_2^2 &= B^2\Phi - (\lambda_3+\lambda_1)S - \lambda_2(\lambda_3+\lambda_1)S', \\ (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)y_3^2 &= B^2\Phi - (\lambda_1+\mu_2)S - \lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)S'; \end{aligned}$$

und da nach den vorigen Entwickelungen und wie oben

$$B^2\Delta' = 1, \quad \lambda_2+\lambda_3 = 3B^2\Theta' - \lambda_1, \text{ etc.}$$

$$(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\Delta'^2 y_i^2 = 2\Phi + (\lambda_i\Delta' - \Delta)(S - \lambda_i S') \quad \text{und}$$

$$y_i = \sqrt{\frac{\Phi(x_1, x_2, x_3) + (\lambda_i\Delta' - 3\Theta')(S - \lambda_i S')}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\Delta'^2}},$$ d. h. durch eine ganz analoge Schlussweise wie in der vorigen Aufgabe, weil y_i eine lineare Function $H_1(x_1, x_2, x_3)$ der x wird, die Coefficienten der inversen Substitution, d. h. derjenigen, welche man durch Auflösung der Substitutionsgleichungen $x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3$, $x_2 = \beta_{21}y_1 +$ etc., $x_3 = \beta_{31}y_1 +$ etc. erhält,

$$\beta_{1i}^* = \sqrt{\frac{\Phi(1,0,0) + (\lambda_i\Delta' - 3\Theta')\{S(1,0,0) - \lambda_i S'(1,0,0)\}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\Delta'^2}},$$

$$\beta_{2i}^* = \sqrt{\frac{\Phi(0,1,0) + (\lambda_i\Delta' - 3\Theta')\{S(0,1,0) - \lambda_i S'(0,1,0)\}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\Delta'^2}},$$

$$\beta_{3i}^* = \sqrt{\frac{\Phi(0,0,1) + (\lambda_i\Delta' - 3\Theta')\{S(0,0,1) - \lambda_i S'(0,0,1)\}}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_k)\Delta'^2}}.$$

Aufg. 8. Man bestimme die Gleichungen der Geraden, welche die gemeinschaftlichen Punkte von zwei Kegelschnitten verbinden, in.schliesslicher Endform.

Wenn man die Gleichungen $S=0$, $S'=0$ in den transformirten Formen $\lambda_1 y_1^2 +$ etc. $=0$, $y_1^2 +$ etc. $=0$ auflöst, so wird $y_1 : y_2 : y_3 = \sqrt{\lambda_2-\lambda_3} : \sqrt{\lambda_3-\lambda_1} : \sqrt{\lambda_1-\lambda_2}$ (vergl. Aufg. 6) und die Substitution dieser Werthe in den in der vorigen Aufg. gewonnenen Ausdruck für y_i giebt

$$\sqrt{\lambda_2-\lambda_3} : \sqrt{\lambda_3-\lambda_1} : \sqrt{\lambda_1-\lambda_2} = H_1(x_1,x_2,x_3) : H_2(x_1,x_2,x_3) : H_3(x_1,x_2,x_3)$$

welches lineare Gleichungen sind.

359. Wir untersuchen unter den Beziehungen von zwei Kegelschnitten zu einander mit Hilfe der Theorie der Invarianten noch die Aufgabe: Man soll die Bedingung aufstellen, unter welcher die Gerade $\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0$ den Kegelschnitt $S + (\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3)^2 = 0$ berührt. Die zugeordnete Form Σ liefert dieselbe durch die Substitution $a_{11} + \xi_1'^2$, $a_{22} + \xi_2'^2$, etc., $a_{12} + \xi_1'\xi_2'$ für a_{11}, a_{22}, etc., a_{12}; sie ist also

$$\begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \xi_1, & a_{11}+\xi_1'^2, & a_{12}+\xi_1'\xi_2', & a_{13}+\xi_1'\xi_3' \\ \xi_2, & a_{21}+\xi_2'\xi_1', & a_{22}+\xi_2'^2, & a_{23}+\xi_2'\xi_3' \\ \xi_3, & a_{31}+\xi_3'\xi_1', & a_{32}+\xi_3'\xi_2', & a_{33}+\xi_3'^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und zerfällt in}$$

Partialdeterminanten, deren erste Σ selbst ist, während die drei, welche je zwei Reihen der $\xi_i'\xi_j'$ enthalten, identisch verschwinden, weil zwei gleiche Verticalreihen in sie eintreten, und die drei, in die nur eine Reihe $\xi_i'\xi_j'$ eintritt, entwickelt ein Aggregat von Gliedern geben, welches sich von dem Polynom S nur dadurch unterscheidet, dass für die x_i die Differenzen $(\xi_k\xi_j' - \xi_j\xi_k')$ in sie eintreten; die zugeordnete Form des Systems giebt also die Gleichung

$$\Sigma + \left\{a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2')^2 + \ldots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_3\xi_1')(\xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2')\right\} = 0.$$

Dieselbe kann in anderer Form geschrieben werden, wenn man daran anknüpft (Art. 326), dass die Relation

$$(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')$$
$$- \left\{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1')\right\}^2$$
$$= A_{11}(x_2x_3' - x_3x_2')^2 + \ldots + 2A_{12}(x_1x_3' - x_3x_1')(x_2x_3' - x_3x_2')$$

besteht. Man findet in ganz derselben Weise, dass

$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')$$
$$- \left\{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')\right\}^2$$
$$= \Delta\left\{a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2')^2 + \ldots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_3\xi_1')(\xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2')\right\}$$

ist und erkennt nach Art. 321 f. in $\left\{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')\right\}$ die der P analoge Function, durch deren Verschwinden bedingt ist, dass die beiden Geraden $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ und $\xi_1' x_1 + \ldots = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$ harmonische Polaren sind; denn sie ist auch

$$= A_{11}\xi_1\xi_1' + A_{22}\xi_2\xi_2' + A_{33}\xi_3\xi_3' + A_{23}(\xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2')$$
$$+ A_{31}(\xi_3\xi_1' + \xi_1\xi_3') + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1').$$

Bezeichnen wir also diese Function durch Π und die zugeordnete Form $A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2'$ durch Σ', so kann unter gleichzeitiger Substitution des vorher gewonnenen Werthes von

$a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_3\xi_2')^2 +$ etc. die oben gewonnene Bedingung in der Form $(\Delta + \Sigma')\Sigma = \Pi^2$ geschrieben werden. Entsprechend den in der Aufg. 1 des Art. 356 gegebenen Erklärungen von der Polarcurve eines Kegelschnitts bezüglich eines andern Kegelschnitts kann man die ξ als Coordinaten eines Punktes der Polarcurve ansehen und hat dann in der letztgeschriebenen Form unserer Gleichung den Beweis für den Satz: Die Polarcurven von zwei Kegelschnitten, welche mit einander in doppelter Berührung stehen, sind selbst zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung mit einander.

Dieselbe Gleichung kann endlich in eine für gewisse Anwendungen bequeme neue Form dadurch gebracht werden, dass man statt der Coordinaten ξ der Geraden $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ die Coordinaten ihres in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$ genommenen Pols einführt und die Bedingung bildet, unter welcher die durch $P' = 0$, d. i. $a_{11}x_1x_1' + \ldots = 0$ gegebene Gerade oder die Polare von x' den Kegelschnitt $S + P''^2 = 0$ berührt. Die Polare von x' berührt $S = 0$, wenn x' in der Curve liegt und wenn wir in Σ für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Differentiale S_1, S_2, S_3, d. h. die Coefficienten der x_1, x_2, x_3 respective in der Gleichung der Polare substituiren, so erhalten wir in der That das Product $\Delta S'$ *). Es sind ferner zwei gerade Linien in Bezug auf den Kegelschnitt $S = 0$ harmonische Polaren, wenn ihre Pole in Bezug auf ihn harmonische Pole sind; und in der That liefert die der vorigen gleiche Substitution für die ξ in Π das Product ΔR, wenn R das Resultat der Substitution der Coordinaten des einen der Punkte x', x'' in die Gleichung der Polare des andern bezeichnet. In Folge alles dessen wird die Bedingung, unter welcher die Gerade $P' = 0$ den Kegelschnitt $S + P''^2 = 0$ berührt, in der Form $(1 + S'')S' = R^2$ erhalten.

Man kann endlich zur Bildung der Bedingung weitergehen, unter welcher die beiden Kegelschnitte

$$S + (\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3)^2 = 0, \quad S + (\xi_1'' x_1 + \xi_2'' x_2 + \xi_3'' x_3)^2 = 0$$

einander berühren.

Denn diese Kegelschnitte berühren einander, wenn eine der gemeinschaftlichen Sehnen

---

*) Wir bemerken, dass man damit die Form einer Determinante für die allgemeine homogene Gleichung des Kegelschnitts gewonnen hat.

$$(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3) \pm (\xi_1''x_1 + \xi_2''x_2 + \xi_3''x_3) = 0$$

einen der Kegelschnitte berührt; und man erhält daher die gesuchte Bedingung, indem man in der Bedingung $(\Delta + \Sigma)\Sigma = \Pi^2$ für ξ_1, ξ_2, ξ_3 respective $\xi_1' \pm \xi_1''$, etc. substituirt. Man erhält $(\Delta + \Sigma')(\Sigma' \pm 2\Pi + \Sigma'') = (\Sigma' \pm \Pi)^2$ und reducirt diess zu der mehr symmetrischen Form $(\Delta + \Sigma')(\Delta + \Sigma'') = (\Delta \pm \Pi)^2$.

Man bildet ebenso aus der Bedingung $(1 + S'')S' = R^2$ die Bedingung der Berührung der Kegelschnitte $S + P'^2 = 0$, $S + P''^2 = 0$ in der Form $(1 + S')(1 + S'') = (1 \pm R)^2$.

Aufg. 1. Man soll einen Kegelschnitt $S + P^2 = 0$ so bestimmen, dass er mit dem Kegelschnitt $S = 0$ eine doppelte Berührung hat und zugleich die Kegelschnitte $S + P'^2 = 0$, $S + P''^2 = 0$, $S + P'''^2 = 0$ doppelt berührt, die selbst mit $S = 0$ in doppelter Berührung sind.

Denken wir den Punkt x als den Pol der Berührung zwischen $S = 0$ und $S + P^2 = 0$, so gelten die Relationen $(1 + S)(1 + S') = (1 + P')^2$, $(1 + S)(1 + S'') = (1 + P'')^2$, $(1 + S)(1 + S''') = (1 + P''')^2$, in welchen S', S'', S''' bekannte Constanten sind und S, P', P'', P''' die Coordinaten des gesuchten Punktes x_1, x_2, x_3 enthalten. Sei $1 + S = k^2$, $1 + S' = k'^2$, $1 + S'' = k''^2$, $1 + S''' = k'''^2$, so ist $kk' = 1 + P'$, $kk'' = 1 + P''$, $kk''' = 1 + P'''$. Dabei ist zu bemerken, dass P', P'', P''' je mit doppeltem Zeichen zu schreiben wären und dass in Folge der Quadratwurzelziehung auch die k', k'', k''' doppelte Zeichen erhalten und man erkennt, dass diese Zeichenverschiedenheiten die Existenz von zweiunddreissig Auflösungen des Problems anzeigen.

Die letztgeschriebenen Gleichungen geben $k(k' - k'') = P' - P''$, $k(k'' - k''') = P'' - P'''$ und somit durch Elimination von k $P'(k'' - k''') + P''(k''' - k') + P'''(k' - k'') = 0$, die Gleichung einer geraden Linie, in welcher der in Bezug auf $S = 0$ genommene Pol der Berührungssehne des gesuchten Kegelschnitts liegen muss. Durch die Werthe $P' = P'' = P'''$ wird die Gleichung erfüllt, d. h. der durch diese Relationen gegebene Punkt, eines der Radicalcentra der Kegelschnitte $S + P'^2 = 0$, $S + P''^2 = 0$, $S + P'''^2 = 0$ liegt in ihr. (Vergl. Art. 279.) Auch die Relationen $P' : k' = P'' : k'' = P''' : k'''$ erfüllen die Gleichung und folgende Ueberlegungen erweisen die geometrische Bedeutung derselben: Die Gleichungen von $S + P'^2 = 0$, $S + P''^2 = 0$ in Tangentialcoordinaten sind respective

$$(1 + S')\Sigma = \Delta(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2,$$
$$(1 + S'')\Sigma = \Delta(\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'')^2$$

und durch $\frac{\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3'}{k'} \pm \frac{\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3''}{k''}$ werden daher Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von $S + P'^2 = 0$, $S + P''^2 = 0$ dargestellt, d. h. die Coordinaten dieser Punkte sind $\frac{x_1'}{k'} \pm \frac{x_1''}{k''}$, etc. oder die Polaren derselben in Bezug auf $S = 0$ haben die

Gleichungen $\frac{P'}{k'} \pm \frac{P''}{k''} = 0$. Daraus folgt, dass $P':k' = P'':k'' = P''':k'''$ den in Bezug auf $S = 0$ genommenen Pol einer Axe der Aehnlichkeit der drei gegebenen Kegelschnitte bezeichnet. (Vergl. Art. 279.) Man hat also den Satz: **Der Pol der gesuchten Berührungssehne liegt in einer der geraden Linien, welche eines der vier Radicalcentra mit dem in Bezug auf $S = 0$ genommenen Pol einer der vier Aehnlichkeitsaxen verbinden.** Diess ist die allgemeine Form des am Ende des Art. 148 gegebenen Satzes.

Zur Vervollständigung der Auflösung suchen wir auch die Coordinaten des Punktes zu bestimmen, in welchem $S + P^2 = 0$ und $S + P'^2 = 0$ sich berühren. Da dieser Punkt ein Centrum der Aehnlichkeit der beiden Kegelschnitte ist, so sind seine Coordinaten $\frac{x_1}{k} - \frac{x_1'}{k'}$, etc. und wir müssen $x_1 + \frac{k}{k'} x_1'$ für x_1, etc. in die Gleichungen $kk' = 1 + P'$, etc. substituiren, wodurch wir erhalten

$$kk' = 1 + P' + \frac{k}{k'} S', \quad kk'' = 1 + P'' + \frac{k}{k''} R, \quad kk''' = 1 + P''' + \frac{k}{k'} R',$$

wenn wir durch R, R' die Resultate andeuten, die aus der Substitution von x_1'', x_2'', x_3''; x_1''', x_2''', x_3''' respective in die Gleichung der Polare von x' hervorgehen. Dann ist

$$k(k' - k'') = P' - P'' + \frac{k}{k'}(S' - R), \quad k(k' - k''') = P' - P''' + \frac{k}{k'}(S' - R')$$

und durch Elimination von k erhalten wir in der Form

$$P'\left\{k'' - \frac{R}{k'} - \left(k''' - \frac{R'}{k'}\right)\right\} + P''\left\{k''' - \frac{R'}{k'} - \left(k' - \frac{S'}{k'}\right)\right\}$$
$$+ P'''\left\{k' - \frac{S'}{k'} - \left(k'' - \frac{R}{k'}\right)\right\} = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche den gesuchten Berührungspunkt enthält. Dieselbe verbindet ein Radicalcentrum mit demjenigen Punkte, in welchem P', P'', P''' respective zu $k' - \frac{S'}{k'}$, $k'' - \frac{R}{k'}$, $k''' - \frac{R'}{k'}$ oder zu 1, $k'k'' - R$, $k'k''' - R'$ proportional sind. Wenn wir aber die Gleichungen der Polaren der drei Centra der Aehnlichkeit in Bezug auf den Kegelschnitt $S + P'^2 = 0$ bilden, wie oben, so erhalten wir $(k'k'' - R)P' = P''$, $(k'k''' - R')P' = P'''$, etc. und erkennen daraus, dass die Linie, welche wir zu construiren wünschen, eines der vier Radicalcentra mit dem Pole verbindet, welcher einer der vier Aehnlichkeitsaxen in Bezug auf den Kegelschnitt $S + P'^2 = 0$ entspricht. Aus Sätzen, welche unter den Anwendungen der Methode der reciproken Polaren in einem folgenden Kapitel gegeben werden sollen, lässt sich dieselbe Construction auch ganz ebenso geometrisch ableiten, wie es im Art. 151 für das Problem des Appollonius geschehen ist. Die sechszehn geraden Linien, welche man so erhält, schneiden den Kegelschnitt $S + P'^2 = 0$ in den zweiunddreissig Punkten, in welchen ihn die verschiedenen den Bedingungen des Problems genügenden Kegelschnitte berühren.

Aufg. 2. Die vier Kegelschnitte, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt $S = 0$ eine doppelte Berührung bilden und durch drei gegebene Punkte gehen, werden sämmtlich von einem andern Kegelschnitt berührt, der selbst mit $S = 0$ eine doppelte Berührung hat.

Sei
$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos A_1 - 2x_3x_1 \cos A_2 - 2x_1x_2 \cos A_3 = 0$, so sind die vier gedachten Kegelschnitte durch $S = (x_1 \pm x_2 \pm x_3)^2$ bestimmt und diese werden alle durch
$S = \{x_1 \cos(A_2 - A_3) + x_2 \cos(A_3 - A_1) + x_3 \cos(A_1 - A_2)\}^2$ berührt.

360. Die Theorie der Kegelschnitte ist mit der Betrachtung der Beziehungen von zwei Kegelschnitten auf einander, von welchen die letzten Untersuchungen handelten, nicht erschöpft; vielmehr ist dazu noch die Untersuchung der Beziehungen nöthig, welche in einem durch drei Kegelschnitte bestimmten System stattfinden. Zugleich greift aber diese Untersuchung überall in die Theorie der Curven dritter Ordnung oder Classe hinüber, welche wir hier ausschliessen müssen. Wir müssen uns auf die Entwickelung dessen beschränken, was ohne Kenntniss der Theorie der Curven dritter Ordnung erledigt werden kann und sich an das Frühere anschliesst.

Wir gehen dazu aus von dem Problem der **Bestimmung des Ortes derjenigen Punkte, deren Polaren in Bezug auf drei gegebene Kegelschnitte $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ sich in einem Punkte schneiden.** Für den Punkt x sind die Gleichungen der Polaren $S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 = 0$, $S_1' x_1 + S_2' x_2 + S_3' x_3 = 0$, $S_1'' x_1 + S_2'' x_2 + S_3'' x_3 = 0$ und die Elimination der x liefert die Gleichung des Ortes durch das Verschwinden der Determinante der S_i in der Form

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & S_3 \\ S_1', & S_2', & S_3' \\ S_1'', & S_2'', & S_3'' \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } S_1(S_2'S_3'' - S_2''S_3') + S_2(S_3'S_1'' - S_3''S_1') + S_3(S_1'S_2'' - S_1''S_2') = 0.$$

Man nennt sie die Jacobi'sche Determinante der drei Kegelschnitte und die durch sie dargestellte Curve dritter Ordnung die Jacobi'sche Curve derselben. Sie ist die der Determinante der Doppelpunkte einer quadratischen Involution entsprechende Covariante der Kegelschnitte.

Wenn die Polaren eines Punktes in Bezug auf $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ sich in einem Punkte schneiden, so geht die Polare in Bezug auf $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$ durch denselben Punkt. Die Jacobi'sche Curve ist auch der Ort der Durchschnittspunkte sol-

cher Paare von geraden Linien, welche durch die Gleichung $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$ dargestellt werden können. Dieselbe geht also auch durch die Schnittpunkte der Diagonalen und der Gegenseitenpaare der Vierecke, die von den gemeinschaftlichen Punkten der Paare der Kegelschnitte gebildet werden.

Aufg. 1. Man soll einen Kegelschnitt durch vier feste Punkte so bestimmen, dass er einen gegebenen Kegelschnitt $S'' = 0$ berührt.

Wir denken die vier festen Punkte als Durchschnittspunkte von zwei Kegelschnitten $S=0$, $S'=0$ gegeben und erkennen aus der Bedingung des Art. 348 für die Berührung von zwei Kegelschnitten $S=0$, $S''=0$, indem wir in ihr für a_{11}, etc. $a_{11} + kb_{11}$, etc. substituiren, dass dem Problem sechs Auflösungen entsprechen; denn dieselbe liefert eine Gleichung, die in k vom sechsten Grade ist. Die Jacobi'sche Curve der drei Kegelschnitte bestimmt mit $S'' = 0$ die sechs Punkte, in welchen dieser von den sechs Kegelschnitten berührt wird, die der Aufgabe genügen; denn die Polare des Berührungspunktes in Bezug auf $S'' = 0$ geht, weil sie auch die Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt von der Gleichung $\lambda S + \mu S' = 0$ ist, durch den Durchschnittspunkt der Polaren in Bezug auf $S = 0$ und $S' = 0$.

Aufg. 2. Wenn drei Kegelschnitte ein gemeinschaftliches System harmonischer Pole besitzen, so degenerirt ihre Jacobi'sche Curve in das System von drei geraden Linien.

Für $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, $b_{11}x_1^2 + \text{etc.} = 0$, $c_{11}x_1^2 + \text{etc.} = 0$ wird die Gleichung der Jacobi'schen Determinante auf $x_1 x_2 x_3 = 0$ reducirt.

Aus der 1. Aufg. des Art. 348 erhellt, dass der covariante Kegelschnitt $F = 0$ mit den beiden gegebenen Kegelschnitten $S = 0$, $S' = 0$ ein solches System harmonischer Pole gemein hat; es ergiebt sich daraus die Methode zur Bestimmung dieses Dreiecks. Man bildet die Function F und darnach die Jacobi'sche Determinante von S, S' und F. Indem man hiermit das Ergebniss der Aufg. 1 des Art. 356 vergleicht, erhält man die Identität

$$J^3 = F^3 - 3F^2(\Theta S' + \Theta' S) + 3F\{\Delta'\Theta S^2 + \Delta\Theta' S'^2 + (3\Theta\Theta' - \Delta\Delta')SS'\}$$
$$- \Delta\Delta'(\Delta' S^3 - \Delta S'^3) + 3SS'^2\{\Delta'(2\Delta\Theta' - 3\Theta^2) + \Delta(2\Delta'\Theta - 3\Theta'^2)\}.$$

Aufg. 3. Wenn drei Kegelschnitte durch dieselben zwei Punkte gehen, so degenerirt ihre Jacobi'sche Curve in eine Gerade und einen Kegelschnitt, welche durch diese zwei Punkte gehen. Denn offenbar erfüllt jeder Punkt in der Verbindungslinie der beiden Punkte die Bedingungen des Problems, welches dieselbe liefert. Die analytische Bestätigung ergiebt sich leicht. Diess ist der Fall von drei Kreisen, als welche durch die imaginären Kreispunkte im Unendlichen gehen müssen; der Kegelschnitt, welcher der Jacobi'schen Curve angehört, ist selbst ein Kreis und zwar der Orthogonalkreis der drei Kreise. Die Polaren jedes Punktes in der Peripherie desselben in Bezug auf die gegebenen Kreise schneiden sich am andern Ende des durch ihn gehenden Durchmessers. Die Gleichung

des Orthogonalkreises giebt den Satz: Für jeden Punkt des Orthogonal kreises ist die Summe der Producte Null, welche die Längen der von ihm ausgehenden Tangenten der drei Kreise mit den Flächen der Dreiecke bestimmen, welche den Punkt zur Spitze und die Centrallinie der beiden andern Kreise respective zur Basis haben.

Aufg. 4. Die Jacobi'sche Curve degenerirt auch in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wenn eines der Polynome S ein vollständiges Quadrat L^2 ist. Denn dann ist L ein Factor in der Gleichung des Ortes. Es folgt daraus, dass es möglich ist, vier Kegelschnitte so zu bestimmen, dass sie einen gegebenen Kegelschnitt $S = 0$ in den Punkten seines Durchschnitts mit der Geraden $L = 0$ und überdiess einen andern Kegelschnitt $S'' = 0$ berühren. Denn der Durchschnitt des Kegelschnitts der Jacobi'schen Curve mit $S'' = 0$ bestimmt die Berührungspunkte.

Wenn insbesondere die gegebenen Kegelschnitte als ein Kegelschnitt, ein Kreis und die doppelt zählende unendlich entfernte Gerade angenommen werden, so geht die Jacobi'sche Curve durch die Fusspunkte der Normalen, welche aus dem Centrum des Kreises an den gegebenen Kegelschnitt gezogen werden können.

361. Die Discriminante der Gleichung $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$ liefert als Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ, μ, ν Invarianten des Systems der Kegelschnitte.

Mit Ausnahme des Coefficienten von $\lambda\mu$ gehören sie alle zur Classe der früher betrachteten Invarianten; in diesem wird jedes Glied $a_{11} a_{22} a_{33}$, etc. der Discriminante von $S = 0$ durch eine Summe wie

$$a_{11}b_{22}c_{33} + a_{11}b_{33}c_{22} + b_{11}c_{22}a_{33} + b_{11}c_{33}a_{22} + c_{11}a_{22}b_{33} + c_{11}a_{33}b_{22}, \text{ etc.}$$

ersetzt.

Die Frage nach denjenigen Geraden, welche die drei Kegelschnitte in Punkten einer Involution schneiden, führt auf eine Contravariante vom dritten Grade. Diess Alles kann aber nur mit der Theorie der Curven dritten Grades zusammen erschöpft werden. Wir bemerken nur noch, dass einige der Eigenschaften des Systems von drei Kegelschnitten durch Anwendung von Vierliniencoordinaten (Art. 313) mit Vortheil untersucht werden können, nämlich indem man sie auf vier Linien $x_1 = 0, \ldots, x_4 = 0$ so bezieht, dass ihre Gleichungen die Form

$S \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 = 0$, $S' \equiv b_{11} x_1^2 + \text{etc.} = 0$, $S'' \equiv c_{11} x_1^2 + \text{etc.} = 0$ annehmen. Diess ist immer in unendlich vielen Arten möglich, weil jede der eben geschriebenen Gleichungen drei Constanten explicite und jede der linearen Functionen x_i zwei Constanten implicite enthält, so dass siebenzehn Constanten zur Disposition sind, während S, S', S'' zusammen nur fünfzehn

unabhängige Constanten enthalten. Zwischen den vier Geraden besteht stets die Relation $x_4 = \lambda_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \nu_3 x_3$, die, wenn wir die λ, μ, ν implicite voraussetzen, die symmetrische Form $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ annimmt.

Wir suchen nach diesen Voraussetzungen die Bedingung auf, unter welcher die drei Kegelschnitte einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben. Indem man die Gleichungen $S=0$, $S'=0$, $S''=0$ nach x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 auflöst und die vier Determinanten $\Sigma \pm a_{22} b_{33} c_{44}$, $\Sigma \pm a_{44} b_{33} c_{11}$, $\Sigma \pm a_{44} b_{11} c_{22}$, $\Sigma \pm a_{22} b_{11} c_{33}$ durch A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet, erhält man x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 proportional zu A_1, A_2, A_3, A_4 und erhält durch Substitution in $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ die fragliche Bedingung in der Form $\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3} + \sqrt{A_4} = 0$ oder

$$(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 - 2A_2A_3 - 2A_3A_1 - 2A_1A_2 - 2A_1A_4 \\ - 2A_2A_4 - 2A_3A_4)^2 = 64 A_1A_2A_3A_4.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Invariante des Systems, welche in den Coefficienten der Gleichung jedes Kegelschnitts vom Grade vier ist. Ihr Verschwinden drückt aus, dass es möglich sei, die Coefficienten λ, μ, ν so zu bestimmen, dass $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$ ein vollständiges Quadrat werde. Die linke Seite ist eine Invariante, in welche die Coefficienten jedes Kegelschnitts nur im zweiten Grade eingehen.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Von der analytischen Grundlage der metrischen Relationen und der Theorie der projectivischen Verwandtschaften.

362. Die Untersuchungen über die allgemeine Gleichung zweiten Grades und über die Theorie der Invarianten und Covarianten in den letzten drei Kapiteln haben zur Entwickelung der Methode gedient, durch welche auf rein analytischem Wege geometrische Wahrheiten gefunden werden können. Die Eigenschaften der homogenen Formen und das Instrument der Deter-

minanten fördern sie zumeist und verleihen ihren Ergebnissen jenen Charakter algebraischer Allgemeinheit, der vielleicht der unterscheidende Hauptcharakter der neueren Forschungen genannt werden darf. Was den Kegelschnitt im Allgemeinen betrifft, ist so zu erkennen; aber die speciellen Eigenthümlichkeiten jener individuellen Kegelschnitte, wie die Parabel, der Kreis, die gleichseitige Hyperbel, sämmtlich Curven, die durch besondere metrische Relationen charakterisirt sind, sind in dieser Discussion nicht hervorgetreten, die metrischen sind überhaupt gegen die projectivischen Relationen zurückgetreten, welche durch Substitution nicht gestört werden. In dem Folgenden ist darum zunächst aufzuweisen, wie die vorigen Untersuchungen zu metrischen Relationen und wie sie zu einer Metrik in der Ebene überhaupt führen können.

Wir knüpfen damit an das Hauptproblem des vorigen Kapitels von der Herstellung der Beziehung zweier Kegelschnitte auf das gemeinsame System harmonischer Pole im Art. 358 wieder an, indem wir es specialisiren.

Die Bestimmung des Polardreiecks wird vereinfacht, wenn eine seiner Ecken im Vorhinein bekannt ist. Solches findet statt für den wichtigen Fall concentrischer Kegelschnitte; die dem gemeinsamen Pol im Centrum entsprechende Gegenseite (Polare) ist die unendlich entfernte Gerade; die beiden andern Seiten des Polarsystems sind das einzige Paar von conjugirten Durchmessern, welches die beiden Kegelschnitte gemein haben. Die Bestimmung des Polarsystems reducirt sich auf die Bestimmung dieses Paares. Wenn insbesondere der eine der beiden concentrischen Kegelschnitte ein Kreis ist, so sind alle Paare seiner conjugirten Durchmesser rectangulär und das gemeinschaftliche Paar ist das Paar der Axen des Kegelschnitts. Die Entwickelung, welche diesen Ueberlegungen entspricht, soll in diesem Art. gegeben werden.

Wir haben im Art. 163 gesehen, dass die Gleichungen von zwei auf den Mittelpunkt bezogenen Kegelschnitten in der Form $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1$, $b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 1$ darstellbar sind. Ihre Beziehung auf das gemeinschaftliche Paar der conjugirten Durchmesser entspricht der Transformation in $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Um sie zu vollziehen, hat man nach den Entwickelungen des Art. 358 die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22} \end{vmatrix} = 0$ oder

$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - 2\lambda \{a_{11}b_{22} + c_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}\} + \lambda^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0$ zu bestimmen; sie sind λ_1 und λ_2; man hat
$f'(\lambda) = -2\{a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} - \lambda(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\}$, setzen wir $= -2(A - \lambda C)$. Sind dann die zu benutzenden Substitutionen $x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2$, $x_2 = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2$ und also die transponirten $\xi_1 = \beta_{11}\eta_1 + \beta_{21}\eta_2$, $\xi_2 = \beta_{12}\eta_1 + \beta_{22}\eta_2$, so bilden wir

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0, & \eta_1, & \eta_2 \\ \eta_1, & a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12} \\ \eta_2, & a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22} \end{vmatrix}$$

und erhalten die nach η identischen Gleichungen $\sqrt{\frac{\varphi(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)}} = \beta_{11}\eta_1 + \beta_{21}\eta_2$, $\sqrt{\frac{\varphi(\lambda_2)}{f'(\lambda_2)}} = \beta_{12}\eta_1 + \beta_{22}\eta_2$; sie liefern gemäss der entwickelten Form der vorigen Determinante, wonach $\frac{\varphi(\lambda)}{f'(\lambda)} = \frac{(a_{22} - \lambda b_{22})\eta_1^2 + (a_{11} - \lambda b_{11})\eta_2^2 - 2(a_{12} - \lambda b_{12})\eta_1\eta_2}{2(A - \lambda C)}$ ist, und unter Einführung der Wurzeln λ_1, λ_2 für die Substitutionscoefficienten die Werthe

$$\beta_{11}^2 = \frac{a_{22} - \lambda_1 b_{22}}{2(A - \lambda_1 C)}, \quad \beta_{12}^2 = \frac{a_{22} - \lambda_2 b_{22}}{2(A - \lambda_2 C)}, \quad \beta_{21}^2 = \frac{a_{11} - \lambda_1 b_{11}}{2(A - \lambda_1 C)}, \quad \beta_{22}^2 = \frac{a_{11} - \lambda_2 b_{11}}{2(A - \lambda_2 C)};$$

und $\beta_{11}\beta_{21} = -\frac{a_{12} - \lambda_1 b_{12}}{A - \lambda_1 C}$, $\beta_{12}\beta_{22} = -\frac{a_{12} - \lambda_2 b_{12}}{A - \lambda_2 C}$ zur Bestimmung der Zeichen. Der Voraussetzung $f'(\lambda) = 0$ entspricht ein Ausnahmefall; die Gleichung der λ hat dann gleiche Wurzeln, d. h. es ist $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})^2$. Da die Coordinaten der Schnittpunkte beider Curven im allgemeinen Falle dieses Artikels und in den Coordinaten der Transformation durch $y_1 = \pm\sqrt{\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}$, $y_2 = \pm\sqrt{\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$ gegeben sind, so fallen für $\lambda_1 = \lambda_2$ die Schnittpunkte in unendliche Entfernung; die beiden Curven sind concentrische Hyperbeln, die eine Asymptote gemein haben. Für $f'(\lambda) = 0$ und $\varphi(\lambda) = 0$ als gleichzeitig erfüllt oder für das Verschwinden der Unterdeterminanten von $f(\lambda)$ sind $a_{11} = \lambda b_{11}$, $a_{22} = \lambda b_{22}$, $a_{12} = \lambda b_{12}$, d. h. die Kegelschnitte sind ähnlich.

Für den Fall des Kreises, d. i. die Bestimmung der Axen des Kegelschnitts $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1$, hat man $b_{11} = b_{22} = 1$ und $b_{12} = 0$, d. h.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2, \text{ eine}$$

Gleichung, welche stets reelle Wurzeln hat, weil

$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$ ist; ferner

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0, \eta_1 & , \eta_2 \\ \eta_1, a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ \eta_2, a_{21} & , a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{22} - \lambda)\eta_1^2 + (a_{11} - \lambda)\eta_2^2 - 2a_{12}\eta_1\eta_2;$$

also $\beta_{1i}\eta_1 + \beta_{2i}\eta_2 = \sqrt{\frac{(a_{22} - \lambda_i)\eta_1^2 + (a_{11} - \lambda_i)\eta_2^2 - 2a_{12}\eta_1\eta_2}{2\lambda_i - a_{11} - a_{22}}}$,

wo noch für den Nenner respective $\lambda_1 - \lambda_2$ oder $\lambda_2 - \lambda_1$ zu sètzen statthaft ist. Den speciellen Annahmen $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ entspricht die Unbestimmtheit des Problems; dann sind beide Curven Kreise.

Wenn man die Substitution $x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2$, $x_2 = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2$ in die Kreisgleichung $x_1^2 + x_2^2 = 1$ vollzieht, so ergiebt die Identität der linken Seite mit $y_1^2 + y_2^2$ die Bedingungen $\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 = 1$, $\beta_{12}^2 + \beta_{22}^2 = 1$, $\beta_{11}\beta_{12} + \beta_{21}\beta_{22} = 0$, d. h. für $\beta_{11} = \cos\varphi$, $\beta_{21} = \sin\varphi$, $\beta_{12} = \cos\psi$, $\beta_{22} = \sin\psi$ und $\cos(\varphi - \psi) = 0$ oder $\psi = 90^0 - \varphi$ und somit $\beta_{12} = -\sin\varphi$, $\beta_{22} = \cos\varphi$, so dass die Transformationsgleichungen die Form der für rechtwinklige Systeme bekannten annehmen und φ der Winkel der Hauptaxe gegen das gegebene Coordinatensystem ist. Man findet

$\tan 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}$. (Art. 103, 164.) Die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$ oder $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$ sind die reciproken Werthe der Quadrate der Halbaxen des Kegelschnitts; darum sind $a_{11} + a_{22}$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ Invarianten der Beziehung auf rechtwinklige Systeme um den Mittelpunkt, etc. (Art. 165—167.)

Aufg. Die Durchschnittspunkte von zwei concentrischen Kegelschnitten liegen in zwei Durchmessern, welche mit dem Paar der gemeinsamen conjugirten Durchmesser ein harmonisches Büschel bilden und die gemeinschaftlichen Tangenten bilden ein Parallelogramm, dessen Ecken auf diesen Durchmessern liegen.

363. Mit Hilfe der Theorie der Invarianten können leicht die Aequivalente zu gewissen in Cartesischen Coordinaten wohlbekannten und in der Theorie der Kegelschnitte wichtigen Functionen in trimetrischen Coordinaten untersucht werden.

So ist in Cartesischen Coordinaten die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte geht, allgemein $x \pm yi + c = 0$ und die

gerade Linie $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ geht somit durch einen dieser Punkte, wenn $\xi^2 + \eta^2 = 0$ ist, oder diess ist die Tangentialgleichung dieser Punkte. Ist dann $\Sigma = 0$ die Tangentialgleichung eines Kegelschnitts, so kann man die Discriminante von $\Sigma + k(\xi^2 + \eta^2) = 0$ bilden, d. h. die Grenzfälle der Kegelschnitte untersuchen, welche dem Vierseit eingeschrieben sind, das die von den besagten Kreispunkten an den gegebenen Kegelschnitt gezogenen Tangenten mit einander bilden. Aber es ist

$$\Sigma + k\Sigma' = (A_{11} + kB_{11})\xi_1^2 + \ldots + 2(A_{12} + kB_{12})\xi_1\xi_2 = 0$$

und die Discriminante davon also

$$\begin{vmatrix} A_{11} + kB_{11}, & A_{12} + kB_{12}, & A_{13} + kB_{13} \\ A_{21} + kB_{21}, & A_{22} + kB_{22}, & A_{23} + kB_{23} \\ A_{31} + kB_{31}, & A_{32} + kB_{32}, & A_{33} + kB_{33} \end{vmatrix};$$

sie zerfällt nach den Summanden ihrer Elemente in sieben Partialdeterminanten wie die entsprechende in Art. 346 und da nach einem im Art. 80 bewiesenen Satze die Unterdeterminanten einer aus den A_{ij} gebildeten Determinante die Producte der Originaldeterminante in die ihnen entsprechenden Elemente dieser letzteren, die Determinanten der A_{ij} oder B_{ij} selbst aber gleich den Quadraten der Determinanten der a_{ij} oder b_{ij} sind, so liefern sie mit den Bezeichnungen des Art. 346 die Entwickelung

$$\Delta^2 + k\Delta\{a_{11}B_{11} + a_{22}B_{22} + a_{33}B_{33} + 2a_{23}B_{23} + 2a_{31}B_{31} + 2a_{12}B_{12}\}$$
$$+ k^2\Delta'\{A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + \text{etc.}\} + k^3\Delta'^2 \text{ oder}$$
$$\Delta^2 + 3k\Delta\Theta' + 3k^2\Delta'\Theta + k^3\Delta'^2.$$

Und da insbesondere dem Kegelschnitt $\xi^2 + \eta^2 = 0$ die Werthe $B_{11} = B_{22} = 1$ und $B_{33} = 0$, $B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0$ entsprechen, so werden für das betrachtete specielle System die Factoren von $k\Delta$ und $k^2\Delta'$ auf $(a_{11} + a_{22})$ reducirt, und — weil in der zugeordneten Form von $\xi^2 + \eta^2$ das einzige Glied ζ^2 existirt, also $b_{33} = 1$ ist — auf $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, während $\Delta' = 0$ ist; oder man erhält $\Delta^2 + k\Delta(a_{11} + a_{22}) + k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ *) und erkennt in den Werthen von $3\Theta'$ und von 3Θ die Functionen wieder, durch deren Verschwinden die gleichseitige Hyperbel und die Parabel charakterisirt werden. (Art. 96, 182.) Da sie Invarianten sind, so schliesst man, dass für jedes mögliche Coordinatensystem das Verschwinden

*) Die Reduction der Discriminante auf die zweite Potenz in k zeigt an, dass von den drei Paaren von Durchschnittspunkten der gemeinsamen Tangenten des Systems das eine mit den Kreispunkten selbst zusammenfällt.

der Invarianten Θ' und Θ für das von einem Kegelschnitt mit den beiden imaginären Kreispunkten gebildete System die Bedingung giebt, unter welcher jener Kegelschnitt respective eine gleichseitige Hyperbel oder eine Parabel ist. Wenn die Gleichung $\Delta^2 + k\Delta(a_{11} + a_{22}) + k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$ gleiche Wurzeln in k besitzt*), so zeigt diess an, dass die Kreispunkte selbst dem betrachteten Kegelschnitt angehören, da dann die von ihnen ausgehenden Tangenten nur ein zusammenfallendes Paar von Schnittpunkten haben. Die Bedingung $(a_{11} + a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, welche für keine andern reellen Werthe als $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ erfüllt werden kann, ist daher die charakteristische Bedingung für den Kreis (Art. 103) und es ist kein Kegelschnitt möglich, der nur einen der Kreispunkte enthielte.

Die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 0$ schliesst zugleich ein (Art. 34), dass die Länge der Senkrechten unendlich gross ist, welche man von einem beliebigen Punkte auf eine Gerade fällt, die durch einen der imaginären Kreispunkte geht; man erhält die äquivalente Bedingung in trimetrischen Coordinaten, indem man den Nenner in dem Ausdruck der Länge der Normalen (Art. 61) gleich Null setzt. Die allgemeine Gleichung der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte in Tangentialcoordinaten ist somit

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - 2\xi_3\xi_1 \cos A_2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A_3 = 0$$

und die zugeordnete Form derselben

$$\xi_1^2 \sin^2 A_1 + \text{etc.} + 2\xi_2\xi_3 \sin A_2 \sin A_3 + \text{etc.} = 0.$$

Indem man für das von ihnen mit einem durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt gebildete System die Invarianten Θ und Θ' bildet, erhält man die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung eine gleichseitige Hyperbel darstellt, $\Theta' = 0$ in der Form $a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23}\cos A_1 - 2a_{31}\cos A_2 - 2a_{12}\cos A_3 = 0$; weil die Coefficienten der Gleichung der Kreispunkte die Grössen B_{11}, B_{22}, etc. sind; und die Bedingung, unter welcher die Curve eine Parabel ist, $\Theta = 0$ in der Form

$$A_{11}\sin^2 A_1 + A_{22}\sin^2 A_2 + A_{33}\sin^2 A_3 + 2A_{23}\sin A_2 \sin A_3$$
$$+ 2A_{31}\sin A_3 \sin A_1 + 2A_{12}\sin A_1 \sin A_2 = 0,$$

nach den Coefficienten der zugeordneten Form der Gleichung der Kreispunkte.

Unter der Bedingung $3\Theta'^2 = 4\Theta$, welche in verschiedenen

---

*) Sie sind $= (a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33})$. (Vergl. Art. 117.)

Arten in eine Summe von Quadraten umgeformt werden kann, ist die Curve, welche die allgemeine Gleichung darstellt, ein Kreis.

Die Bedingung $\xi^2 + \eta^2 = 0$ enthält auch den paradox erscheinenden Satz, dass jede nach einem der imaginären Kreispunkte gehende Gerade zu sich selbst rechtwinklig ist; wir haben die Aufklärung dieser Paradoxie bereits in der Auffassung der Schenkel (des rechten Winkels) als eines Paares von Strahlen, die zu den imaginären Kreispunkten harmonisch conjugirt sind, gewonnen, zu welcher die Betrachtung der projectivischen Gebilde geführt hat; sie begründet sich analytisch auch aus der Formel der Aufg. 4 des Art. 61 für die Tangente des Winkels von zwei Geraden, denn das Verschwinden ihres Nenners für ein Paar sich deckende Gerade führt auf die allgemeine Gleichung der Kreispunkte zurück. Dieser Umstand erklärt das Auftreten gewisser scheinbar der Frage fremder Factoren in den Gleichungen von geometrischen Oertern. So findet man durch sie die Erklärung des Umstands, dass in die Gleichung des Ortes der Fusspunkte der Senkrechten von einem Brennpunkt (α, β) auf die Tangente der Factor $\{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2\}$ eintritt; er repräsentirt die durch diesen Brennpunkt gehenden Tangenten selbst, die mit ihren Normalen zusammenfallen und daher zum fraglichen Ort gehören.

Aufg. 1. Wann stellt $a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2 = 0$ eine gleichseitige Hyperbel dar? Für $a_{23} \cos A_1 + a_{31} \cos A_2 + a_{12} \cos A_3 = 0$. Sie enthält daher den Höhenschnittpunkt des Dreiecks. (Art. 61, Aufg. 3.)

Für $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ giebt $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$ die gleichseitige Hyperbel. Sie geht durch die Centra der Berührungskreise des Fundamentaldreiecks.

Aufg. 2. Wann repräsentirt $(a_1 x_1)^{\frac{1}{2}} + (a_2 x_2)^{\frac{1}{2}} + (a_3 x_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ eine Parabel? Für $a_1 s_2 s_3 + a_{22} s_3 s_1 + a_{33} s_1 s_2 = 0$.

364. Die Covariante $F = 0$, gebildet in Bezug auf das aus einem Kegelschnitt und zwei Punkten bestehende System, bezeichnet den Ort eines Punktes, für welchen das Paar seiner Tangenten an den Kegelschnitt zu dem Paar seiner Verbindungslinien mit jenen festen Punkten harmonisch conjugirt ist. Ist das Punktepaar speciell das Paar der imaginären Kreispunkte, so bezeichnet $F = 0$ den Ort des Durchschnittspunktes der Paare rechtwinkliger Tangenten. Da für $\xi^2 + \eta^2 = 0$ als (Tangential-) Gleichung des zweiten Kegelschnitts $B_{11} = B_{22} = 1$ und alle an-

dern B gleich Null sind, so ist nach dem im Art. 354 gegebenen Werthe jetzt F durch $A_{33}(x_1^2+x_2^2)-2A_{13}x_1+2A_{23}x_2+A_{11}+A_{22}=0$ vertreten. Diess ist die allgemeine Gleichung des Ortes der Schnittpunkte rectangulärer Tangenten in Cartesischen Coordinaten. Für $A_{33}=0$ oder $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$ erhält man die Parabel und die Covariante $F=0$ giebt ihre Directrix mit $2(A_{13}x_1+A_{23}x_2)=A_{11}+A_{22}$. In trimetrischen Punktcoordinaten findet man die allgemeine Gleichung jenes Ortes in der Form

$$\begin{aligned}&(A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos A_1)\,x_1^2+(A_{33}+A_{11}+2A_{31}\cos A_2)\,x_2^2\\&+(A_{11}+A_{22}+2A_{12}\cos A_3)\,x_3^2\\&+2\,(A_{11}\cos A_1-A_{23}-A_{13}\cos A_3-A_{12}\cos A_2)\,x_2x_3\\&+2\,(A_{22}\cos A_2-A_{31}-A_{21}\cos A_1-A_{23}\cos A_3)\,x_3x_1\\&+2\,(A_{33}\cos A_3-A_{12}-A_{32}\cos A_2-A_{31}\cos A_1)\,x_1x_2=0;\end{aligned}$$

dass sie einen Kreis repräsentirt, kann gezeigt werden (vergl. Art. 158), indem man sie auf die Form

$$\begin{aligned}&(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)\times\\&\left\{\frac{A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos A_1}{\sin A_1}x_1+\frac{A_{33}+A_{11}+2A_{31}\cos A_2}{\sin A_2}x_2+\frac{A_{11}+A_{22}+2A_{12}\cos A_3}{\sin A_3}\right.\\&=(A_{11}\sin^2A_1+A_{22}\sin^2A_2+A_{33}\sin^2A_3+2A_{23}\sin A_2\sin A_3\\&+2A_{31}\sin A_3\sin A_1+2A_{12}\sin A_1\sin A_2)\frac{x_2x_3\sin A_1+x_3x_1\sin A_2+x_1x_2\sin A_3}{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}\end{aligned}$$

bringt. Wenn der erste Factor rechts verschwindet, so ist (Art. 360) die Curve eine Parabel und unsere Gleichung repräsentirt ihre Directrix. Auch hier erscheint die Gleichung der unendlich entfernten Geraden im Orte, als eine Linie, die auf sich selbst rechtwinklig ist.

Aufg. 1. Man zeige, dass die Directrix der durch $(a_1x_1)^{\frac12}+(a_2x_2)^{\frac12}+(a_3x_3)^{\frac12}=0$ dargestellten Parabel durch $a_1x_1\tan A_2\tan A_3+a_2x_2\tan A_3\tan A_1+a_3x_3\tan A_1\tan A_2=0$ gegeben ist.

Aufg. 2. Der Ort der Durchschnittspunkte rechtwinkliger Tangentenpaare für alle die Kegelschnitte, welche vier gemeinsame Tangenten besitzen, ist ein System von Kreisen mit derselben Radicalaxe.

Denn die Gleichung dieses Ortes ist eine lineare Function der Coefficienten der Tangentialgleichung.

Aufg. 3. Die Gleichung $\sin A_1(S_2K_3-S_3K_2)+\sin A_2(S_3K_1-S_1K_3)+\sin A_3(S_1K_2-S_2K_1)=0$, in welcher $S_1,\ldots$ die partiellen Differentiale der Gleichung des gegebenen Kegelschnitts und $K_1,\ldots$ die entsprechenden Differentiale für die Gleichung des Ortes der Schnittpunkte seiner orthogonalen Tangenten bezeichnen, drückt das Product der Gleichung der Axen des Kegelschnitts in die Constante $(x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3)$ aus.

Denn sie ist die Bedingung für die Coordinaten eines Punktes, dessen Polaren in Bezug auf diesen Kreis und den Kegelschnitt einander parallel sind.

365. Die Gleichung $\Sigma + k\Sigma' = 0$ bezeichnet im Allgemeinen einen die vier gemeinschaftlichen Tangenten von $\Sigma = 0$, $\Sigma' = 0$ berührenden Kegelschnitt und falls k so bestimmt wird, dass $\Sigma + k\Sigma' = 0$, so sind diese Punkte zwei Gegenecken des Vierecks der gemeinsamen Tangenten. In dem speciellen Falle, in welchem $\Sigma' = 0$ das Paar der imaginären Kreispunkte bezeichnet, wird durch $\Sigma + k\Sigma' = 0$ für die entsprechende Bestimmung von k das Paar der Brennpunkte dargestellt. (Art. 310.)

Wenn also die Brennpunkte eines Kegelschnitts bestimmt werden sollen, der durch eine numerische Gleichung in Cartesischen Coordinaten gegeben ist, so bestimmen wir zuerst k aus der quadratischen Gleichung $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^2 + \Delta(a_{11} + a_{22})k + \Delta^2 = 0$ *); substituiren wir einen seiner Werthe in $\Sigma + k(\xi^2 + \eta^2) = 0$, so zerfällt diese Gleichung in lineare Factoren $(\xi x' + \eta y' + \zeta z')\ (\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'')$ und die Brennpunkte sind durch $x' : z'$, $y' : z'$; $x'' : z''$, $y'' : z''$ bestimmt. Der eine Werth von k giebt die beiden reellen, der andere zwei imaginäre Brennpunkte. Dasselbe Verfahren ist auf die Gleichung in trimetrischen Coordinaten anwendbar.

Im Allgemeinen repräsentirt $\Sigma + k(\xi^2 + \eta^2) = 0$ einen mit dem gegebenen confocalen Kegelschnitt durch seine Tangentialgleichung. Bildet man nach der Regel des Art. 316 die entsprechende Gleichung in Cartesischen Coordinaten, so erhält man die allgemeine Gleichung eines mit dem gegebenen confocalen Kegelschnitts in der Form

$$\Delta S + k\left\{A_{33}(x_1^2 + x_2^2) - 2A_{13}x_1 - 2A_{23}x_2 + A_{11} + A_{22}\right\} + k^2 = 0.$$

Man erhält aus ihr die Gleichung der Enveloppe des Systems, d. h. der gemeinschaftlichen Tangenten als

$$\left\{A_{33}(x_1^2 + x_2^2) - 2A_{13}x_1 - 2A_{23}x_2 + A_{11} + A_{22}\right\}^2 = 4\Delta S.$$

Durch Zerlegung derselben in das Factorenpaar

$$\left\{(x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2\right\}\left\{(x_1 - \alpha')^2 + (x_2 - \beta')^2\right\}$$ würde man die Coordinaten der Brennpunkte α, β; α', β' ebenfalls erhalten.

Allgemein entspricht der Gleichung

$$\Sigma + k(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - \text{etc.}) = 0$$

*) Sie hat gleiche Wurzeln für den Fall des Kreises und wird linear für den Fall der Parabel.

die Gleichung in Punktcoordinaten

$$\Delta S + k^2 \{(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos A_1)\, x_1^2 + \ldots + 2\,(A_{11}\cos A_1 - A_{23} - A_{13}\cos A_3 - A_{12}\cos A_2)\, x_2 x_3 + \ldots\} + k^2 \{x_1 \sin A_1 + \ldots\}^2 = 0.$$

Wenn k einen der aus dieser quadratischen Gleichung entspringenden Werthe erhält, so liefert die zu $\Sigma + k\,(\xi_1^2 + \ldots) = 0$ entsprechende Gleichung in Punktcoordinaten das Quadrat der Gleichung einer der Axen des Kegelschnitts.

Aufg. 1. Man bestimme die Brennpunkte von

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 8y + 11 = 0.$$

Die quadratische Gleichung in k ist $3k^2 + 4k\Delta + \Delta^2 = 0$ und ihre Wurzeln sind $k = -\Delta$ und $k = -\frac{1}{3}\Delta$; $\Delta = -9$. Für den Werth 3 wird $6\xi^2 + 21\eta^2 + 3\zeta^2 + 18\eta\zeta + 12\zeta\xi + 30\xi\eta + 3(\xi^2 + \eta^2) = 3(\xi + 2\eta + \zeta)(3\xi + 4\eta + \zeta)$; diess liefert die Brennpunkte 1, 2; 3, 4. Der Werth 9 giebt die imaginären Brennpunkte $2 \pm i$, $3 \mp i$.

Aufg. 2. Dem Kegelschnitt $2x^2 + 4xy - y^2 + 24y + 6 = 0$ entsprechen die Coordinaten der reellen Brennpunkte $-1, -2$; $-7, 10$ und die Coordinaten der imaginären Brennpunkte $-(4 \pm 6i)$ und $(4 \mp 3i)$.

Aufg. 3. Man soll die Coordinaten des Brennpunktes einer Parabel bestimmen, welche durch eine Gleichung in Cartesischen Coordinaten gegeben ist.

Die quadratische Gleichung wird linear und

$$(a_{11} + a_{22})\{A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{31}\zeta\xi + 2A_{12}\xi\eta\} - \Delta(\xi^2 + \eta^2)$$

ist in Factoren zerlegbar; dieselben müssen sein

$$(a_{11} + a_{22})(2A_{13}\xi + 2A_{23}\eta) \text{ und } \frac{(a_{11} + a_{22})A_{11} - \Delta}{2(a_{11} + a_{22})A_{13}}\xi + \frac{(a_{11} + a_{22})A_{22} - \Delta}{2(a_{11} + a_{22})A_{23}}\eta + \zeta.$$

Der erste Factor liefert den unendlich fernen Brennpunkt und zeigt, dass die Axe der Curve zu $A_{23}x_1 - A_{13}x_2 = 0$ parallel ist. Der zweite Factor zeigt, dass die Coefficienten seiner Glieder in ξ und η die Coordinaten des endlichen Brennpunkts sind.

Aufg. 4. Man soll die Coordinaten des Brennpunkts einer durch die Gleichung in trimetrischen Coordinaten gegebenen Parabel bestimmen. Die das Paar der Brennpunkte repräsentirende Gleichung ist

$$3\Theta'\Sigma = \Delta(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3\cos A_1 - 2\xi_3\xi_1\cos A_2 - 2\xi_1\xi_2\cos A_3).$$

Die Coordinaten des unendlich entfernten Brennpunkts sind aus Art. 324 bekannt als Coordinaten des Pols der unendlich entfernten Geraden; daher sind die des endlichen Brennpunkts

$$\frac{3\Theta' A_{11} - \Delta}{A_{11}\sin A_1 + A_{12}\sin A_2 + A_{13}\sin A_3},\quad \frac{3\Theta' A_{22} - \Delta}{A_{21}\sin A_1 + A_{22}\sin A_2 + A_{23}\sin A_3},$$
$$\frac{3\Theta' A_{33} - \Delta}{A_{31}\sin A_1 + A_{32}\sin A_2 + A_{33}\sin A_3}.$$

Aufg. 5. Man kann die Brennpunkte mit Hilfe des Satzes bestimmen, wonach das Rechteck der Entfernungen eines Brennpunkts von zwei parallelen Tangenten constant ist. (Art. 195.)

Denn eine zur Fundamentallinie $x_1 = 0$ parallele Gerade $(\lambda - s_1)\,x_1 + M = 0$ (Art. 63, 64) berührt den durch die allgemeine

Gleichung dargestellten Kegelschnitt für

$$(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)\lambda^2+2\left\{(a_{23}a_{31}-a_{12}a_{33})s_2+(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})s_3\right\}\lambda$$
$$+(a_{33}a_{11}-a_{13}^2)s_2^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)s_3^2+2(a_{13}a_{12}-a_{23}a_{11})s_2s_3=0$$

und die Substitution des aus $(\lambda - s_1)\,x_1 + M = 0$ entspringenden Werthes von λ führt sie über in $x_1^2\Sigma^s - 2Mx_1\Sigma_1^s + M^2\Sigma_{11}^s = 0$ für Σ^s als die Determinante oder linke Seite der Bedingung der Berührung des Kegelschnitts mit der unendlich entfernten Geraden und Σ_1^s, Σ_{11}^s als ihre Unterdeterminanten

$$a_{12}(a_{23}s_3-a_{33}s_2)+a_{22}(a_{33}s_1-a_{13}s_3)+a_{23}(a_{13}s_2-a_{23}s_1)$$

und $(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)$ respective.

Die parallelen Tangenten zu den Fundamentallinien $x_2=0$, $x_3=0$ geben analoge Gleichungen $x_2^2\Sigma^s - 2Mx_2\Sigma_2^s + M^2\Sigma_{22}^s = 0$, $x_3^2\Sigma^s - 2Mx_3\Sigma_3^s + M^2\Sigma_{33}^s = 0$, in denen Σ_2^s und Σ_3^s, Σ_{22}^s und Σ_{33}^s die nach s_2, s_3 ebenso gebildeten Unterdeterminanten von Σ^s bezeichneten, wie Σ_1^s, Σ_{11}^s nach s_1. Sind dann x_1', x_1'' die Wurzeln der ersten, x_2', x_2'' die der zweiten und x_3', x_3'' die der dritten unter ihnen; so sind für x_1, x_2, x_3 respective als die entsprechenden Coordinaten des Brennpunktes die Differenzen $x_1 - x_1'$, $x_1 - x_1''$; $x_2 - x_2'$, $x_2 - x_2''$; $x_3 - x_3'$, $x_3 - x_3''$ die Abstände desselben von den drei Paaren paralleler Tangenten; und man hat nach dem citirten Satze die Gleichheit ihrer Producte, also die Relationen

$$x_1^2-(x_1'+x_1'')\,x_1+x_1'x_1''=x_2^2-(x_2'+x_2'')\,x_2+x_2'x_2''$$
$$=x_3^2-(x_3'+x_3'')\,x_3+x_3'x_3'';$$

d. h. die Gleichungen

$$x_1^2\Sigma^s-2Mx_1\Sigma_1^s+M^2\Sigma_{11}^s=x_2^2\Sigma^s-2Mx_2\Sigma_2^s+M^2\Sigma_{22}^s$$
$$=x_3^2\Sigma^s-2Mx_3\Sigma_3^s+M^2\Sigma_{22}^s$$

liefern die Coordinaten der Brennpunkte des Kegelschnitts. Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, dass jede von ihnen den Ort eines Punktes bezeichnet, für welchen die Fusspunkte der Normalen auf die vier den bezüglichen Fundamentallinien parallelen Tangenten des Kegelschnitts in einem Kreise liegen.

Für die Parabel ist $\Sigma^s = 0$ und man erhält nur einen Brennpunkt.

Aufg. 6. Für die auf ein System harmonischer Pole bezogene Parabel $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$, für welche $a_{11}a_{22}s_3^2 + a_{22}a_{33}s_1^2 + a_{33}a_{11}s_2^2 = 0$ ist, werden die Bestimmungsgleichungen des Brennpunktes

$s_1x_1 : s_2x_2 : s_3x_3 = (a_{22} + a_{33}) : (a_{33} + a_{11}) : (a_{11} + a_{22})$ und daher

$$s_1^2(s_3x_3+s_1x_1-s_2x_2)(s_1x_1+s_2x_2-s_3x_3)+s_2^2(s_1x_1+s_2x_2-s_3x_3)$$
$$(s_2x_2+s_3x_3-s_1x_1)+s_3^2(s_2x_2+s_3x_3-s_1x_1)(s_3x_3+s_1x_1-s_2x_2)=0.$$

Man hat daher den Satz: Der Ort der Brennpunkte aller Parabeln, welche ein gemeinschaftliches System harmonischer Pole haben, ist der durch die Mittelpunkte der Seiten dieses Dreiecks gehende Kreis.

Aufg. 7. Auch die Längen der Halbaxen lassen sich durch die vorigen Gleichungen bestimmen; denn für r als die Länge einer solchen ist jedes der drei in sie eintretenden quadratischen Polynome $= r^2\Sigma^s$ (Art. 195); die Elimination zwischen den durch diesen Werth verbundenen

Gleichungen und $s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = M$ liefert für sie die Gleichung $s_1 (r^2 + X_1)^{\frac{1}{2}} \pm s_2 (r^2 + X_2)^{\frac{1}{2}} \pm s_3 (r^2 + X_3)^{\frac{1}{2}} = 0$ mit

$$\frac{X_1}{a_{22}s_3^2 - 2a_{23}s_2s_3 + a_{33}s_2^2} = \frac{X_2}{a_{33}s_1^2 - 2a_{13}s_3s_1 + a_{11}s_3^2} = \frac{X_3}{a_{11}s_2^2 - 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_1^2}$$

$$= -\frac{M^2}{(\Sigma s)^2} \begin{vmatrix} a_{23}, & a_{33}, & a_{22} \\ a_{33}, & a_{31}, & a_{11} \\ a_{22}, & a_{11}, & a_{12} \end{vmatrix}.$$

In der That hat für $X_1 = X_2 = X_3$ diese Gleichung in r gleiche Wurzeln und die Gleichheit der Nenner derselben Grössen in den vorigen Relationen stimmt mit den Bedingungen des Kreises überein. (Art. 158.) Die Bestimmungsgleichung für r^2 erhält die Form $Ar^4 + 2Br^2 + C = 0$ mit den Coefficientenwerthen

$A = s_1^4 + \ldots - 2s_2^2 s_3^2 - \ldots = -s(s - 2s_1)(s - 2s_2)(s - 2s_3)$, $(s = s_1 + s_2 + s_3)$;
$B = -2s_1 s_2 s_3 (s_1 X_1 \cos A_1 + \ldots)$, $C = s_1^4 X_1^2 + \ldots - 2s_2^2 s_3^2 X_2 X_3 - \ldots$,
und hat in r^2 stets reelle Wurzeln. Die Untersuchung derselben auf ihre Gleichheit, auf die Gleichheit ihrer Zeichen oder die Entgegensetzung derselben und ihre Gleichheit bei entgegengesetzten Zeichen liefert die bekannten Unterscheidungszeichen der Kegelschnitte wieder.

Aufg. 8. Wenn ein Kegelschnitt einem Dreieck eingeschrieben und die Summe der Quadrate seiner Halbaxen constant ist, so liegt sein Centrum immer auf einem aus dem Höhendurchschnittspunkt des Dreiecks beschriebenen Kreise.

Aufg. 9. Wenn der gegebene Kegelschnitt auf seine Hauptaxen bezogen ist, so dass $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ seine Gleichung wird, so erhält man

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2}, \; A_{11} = -\frac{1}{b^2}, \; A_{22} = -\frac{1}{a^2}, \; A_{33} = \frac{1}{a^2 b^2}, \; A_{13} = A_{23} = 0$$

und die Gleichung des confocalen Systems in der Form

$$-\frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + k\left\{\frac{1}{a^2 b^2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right\} + k^2 = 0 \text{ oder}$$

$$x^2\left\{b^2 - a^2 b^2 k\right\} + y^2\left\{a^2 - a^2 b^2 k\right\} = a^4 b^4 k^2 - a^4 b^2 k - a^2 b^4 k + a^2 b^2$$

und somit $\frac{x^2}{a^2 - a^2 b^2 k} + \frac{y^2}{b^2 - a^2 b^2 k} = 1$; man kann überdiess $a^2 b^2 k$ als eine Constante durch λ bezeichnen.

Dass durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte des confocalen Systems gehen, folgt schon aus der allgemeinen Natur desselben; man zeige, dass sie immer eine Ellipse und eine Hyperbel sind und dass sie sich rechtwinklig durchschneiden. (Art. 196.)

Wenn λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so entstehen alle Kegelschnitte des Systems und den Grenzwerthen $-\infty$, b^2, a^2 entsprechen als solche der concentrische Kreis mit unendlich grossem Halbmesser, die Axe x als Grenze der Ellipsen, deren Excentricität stetig mit λ gewachsen ist, und die Axe y als Grenze der Hyperbeln, welche allen Werthen von λ zwischen b^2 und a^2 entsprechen; für $\lambda > a^2$ erhält man nur imaginäre Kegelschnitte.

366. Die Bedingung, unter welcher zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander sind (Art. 61),

$$\xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_3' - (\xi_2\xi_3' + \xi_3\xi_2')\cos A_1 - (\xi_3\xi_1' + \xi_1\xi_3')\cos A_2 - (\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')\cos A_3 = 0,$$

ist identisch mit der Bedingung (Art. 324), unter welcher diese Geraden zu dem Kegelschnitt

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3\cos A_1 - 2\xi_3\xi_1\cos A_2 - 2\xi_1\xi_2\cos A_3 = 0$$

harmonische Polaren sind; d. h. die Beziehung der Rechtwinkligkeit ist ein besonderer Fall von der Beziehung zwischen harmonischen Polaren in Bezug auf einen festen Kegelschnitt. So tritt sie auch in die Sätze ein; es ist z. B. ein specieller Fall des Satzes von dem Durchschneiden der Verbindungslinien der entsprechenden Ecken zweier in Bezug auf denselben Kegelschnitt zu einander conjugirter Dreiecke in einem Punkte, dass die Höhenperpendikel eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Die Charakteristik der individuellen Kegelschnitte, des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel, sowie des Grenzfalles der Parabel, die Beziehung des Kegelschnittes auf seine Hauptaxen, die Bestimmung der Brennpunkte und der Directrixen, alle diese metrischen Charaktere, welche der Kegelschnittstheorie angehören, sind als abhängig von dem analytischen Ausdruck derselben imaginären Kreispunkte erkannt worden und überall ist hervorgetreten, dass dieselben nur die speciellen Vertreter eines festen Kegelschnitts überhaupt sind, den man zur Einheit des Maasses benutzt. Dass darauf alle Metrik beruht, sowohl die der Gebilde erster Stufe oder der homogenen Formen mit zwei Veränderlichen als die des ebenen Systems überhaupt oder der homogenen Formen mit drei Veränderlichen, soll im Folgenden kurz nachgewiesen werden.

Wenn $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ oder $U = 0$ ein gegebenes festes Paar von Elementen ist, so kann die Gleichung eines beliebigen andern Paares von Elementen desselben Gebildes (erster Stufe, vergl. Art. 336) in doppelter Art in die Form $(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) + k(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2)^2 = 0$ oder $U + kL^2 = 0$ dargestellt werden; die durch die beiden Werthe von L oder $\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 = 0$ bestimmten Elemente sind die Doppelelemente der durch das erste mit dem zweiten Paar bestimmten Involution. In Erinnerung an die Bedeutung der Gleichung $S + L^2 = 0$ in der Theorie der Kegelschnitte, welche das System der den Kegelschnitt $S = 0$ doppelt berührenden oder

ihm eingeschriebenen Kegelschnitte bezeichnet, kann man sagen, das Paar $U'=0$ sei dem Paar $U=0$ eingeschrieben und die Elemente $L_1=0$, $L_2=0$ (den beiden möglichen Werthen von L entsprechend) können als Centrum und Axe der Einschreibung bezeichnet werden; das eine von ihnen ist das conjugirt harmonische des andern in Bezug auf das gegebene Elementenpaar; wird also eines durch $x_1x_2'-x_2x_1'=0$ dargestellt (wo die x' Constanten sind), so ist das andere nothwendig

$$a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2' = 0.$$

Wenn man nun in der Gleichung des Art. 326 $SS'-P^2=0$, die im Art. 359 wiederholt und ganz in Bezug auf das hier entsprechende Problem gebraucht worden ist, alle x_3 enthaltenden Glieder verschwinden lässt, so erhält man die Identität

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2)(a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2)$$
$$-\left\{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2'\right\}^2$$
$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(x_1x_2'-x_2x_1')^2$$

und erkennt aus ihr, dass das eingeschriebene Elementenpaar für θ als eine Constante in den beiden Formen

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2)(a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2)\sin^2\theta$$
$$-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(x_1x_2'-x_2x_1')^2 = 0,$$
$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2)(a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2)\cos^2\theta$$
$$-\left\{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2'\right\}^2 = 0$$

dargestellt werden kann, jenachdem von den Elementen

$$x_1x_2'-x_2x_1'=0,\quad a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2' = 0$$

das erste oder das zweite als Axe der Einschreibung angesehen wird. Behält man die Bezeichnungen S, S' und P bei, so kann man die obige Identität in der Determinantenform

$\begin{vmatrix} S, & P \\ P, & S' \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ x_1', & x_2' \end{vmatrix}$ schreiben und durch Inbetrachtnahme einer dritten Reihe x_1'', x_2'', wo S'' das entsprechende S und P', P'' die mit x und x' zusammen gebildeten Polar- oder harmonischen Gleichungen bezeichnen, also

$$P'' = a_{11}x_1'x_1'' + a_{12}(x_1'x_2'' + x_2'x_1'') + a_{22}x_1''x_2'',$$

erhält man, da die Determinante rechts verschwindet,

$$\begin{vmatrix} S, & P, & P' \\ P, & S', & P'' \\ P', & P'', & S'' \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } SS'S'' + 2PP'P'' - SP''^2 - S'P'^2 - S''P^2 = 0;$$

weil aber $SS'\cos^2\theta = P^2$, $SS''\cos^2\theta'' = P'^2$, $S'S''\cos^2\theta' = P''^2$

ist, so wird diess durch Division mit $SS'S''$ in $\{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''\} = 0$ übergeführt, d. h. in $(\cos\theta\cos\theta' - \cos\theta'')^2 = (1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta')$ und $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta''$ und liefert also die Relation

$$\text{arc.}\left(\cos = \frac{P}{\sqrt{SS'}}\right) + \text{arc.}\left(\cos = \frac{P''}{\sqrt{S'S''}}\right) = \text{arc.}\left(\cos = \frac{P'}{\sqrt{SS''}}\right).$$

367. An die Formeln des vorigen Artikels schliessen sich die folgenden Erklärungen: Denkt man unter den Elementen eines geometrischen Gebildes erster Stufe ein Paar **E**, **E*** als unveränderlich — man nenne es das absolute Paar — so kann jedes Paar von Elementen dieses Gebildes als ihm eingeschrieben angesehen werden und bestimmt dann mit ihm zwei Elemente als Doppelelemente der erzeugten Involution, nach dem Vorigen zu benennen als Centrum und Axe der Einschreibung. Insofern das betrachtete Paar dem absoluten eingeschrieben ist, wollen wir es ein Kreispaar nennen und jene Doppelelemente der Involution, die das absolute und das Kreispaar zugleich harmonisch theilen, sollen Centrum und Axe des Kreispaares heissen, mit der Bestimmung, dass jedem von ihnen in derselben Betrachtung derselbe Name (Centrum oder Axe) verbleibe. Aus dem Centrum und dem einen Element des Kreispaares bestimmt sich das andere Element desselben in einziger Weise; denn zuerst liefert das Centrum die Axe als das ihm in Bezug auf das absolute Paar harmonisch entsprechende Element, und das zweite Element des Kreispaars als das harmonisch conjugirte des ersten in Bezug auf Centrum und Axe. Dann ist für alles Weitere der Begriff der Aequidistanz der Elemente grundlegend und wir setzen ihn so fest: Die zwei Elemente eines Kreispaares sind äquidistant vom Centrum.

Die Metrik der Gebilde erster Stufe gründet sich dann mathematisch auf folgenden Prozess: Sind E^0, E' zwei Elemente des Gebildes und wird ein drittes Element E'' desselben Gebildes so bestimmt, dass E^0, E'' ein Kreispaar vom Centrum E' bilden; sodann E''' so, dass E' und E''' ein Kreispaar vom Centrum E''; E'''' so, dass E'' und E'''' ein Kreispaar vom Centrum E''' sind, etc.; ferner andererseits ein Element $E^{\backprime}$ so dass E', $E^{\backprime}$ ein Kreispaar vom Centrum E^0; $E^{\backprime\backprime}$ so dass $E^{\backprime\backprime}$, E^0 ein Kreispaar vom Centrum $E^{\backprime}$ sind, etc. — so hat in der Reihe ..., $E^{\backprime\backprime\backprime}$, $E^{\backprime\backprime}$, $E^{\backprime}$,

E^0, E', E'', E''', ... jedes Element von den ihm nächstbenachbarten Elementen gleiche Entfernung in entgegengesetztem Sinn. Wenn die Elemente E, E' einander unendlich nahe waren, so wird das ganze Feld des Elementargebildes in eine stetige Folge von unendlich kleinen und einander gleichen Elementardistanzen getheilt; die Zahl derselben, welche zwischen irgend zwei Elementen des Gebildes eingeschlossen ist, giebt für dieselben das Maass ihrer Distanz. Für drei auf einander folgende Elemente E, E', E'' gilt dabei die Relation Dist. (E, E') + Dist. (E', E'') = Dist. (E, E'').

Ist das absolute Paar $\mathbf{E}, \mathbf{E}^*$ durch $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0$ dargestellt, so hat das Kreispaar vom Centrum x' die Gleichung

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots)(a_{11}x_1'^2 + \ldots)\cos^2\Theta -$$
$$\{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2'\}^2 = 0$$

und sind x, x'' die beiden Elemente desselben, so hat man

$$\frac{a_{11}x_1x_1'+a_{12}(x_1x_2'+x_1'x_2)+a_{22}x_2x_2'}{\sqrt{(a_{11}x_1^2+\ldots)(a_{11}x_1'^2+\ldots)}} = \frac{a_{11}x_1'x_1''+a_{12}(x_1'x_2''+x_1''x_2')+a_{22}x_2'x_2''}{\sqrt{(a_{11}x_1'^2+\ldots)(a_{11}x_1''^2+\ldots)}}$$

als Ausdruck der Wahrheit, dass x'' und x von x' gleich weit entfernt sind. In Folge dessen ist die Distanz der Elemente x und x' eine Function von

$$\frac{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) + a_{22}x_2x_2'}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \ldots)(a_{11}x_1'^2 + \ldots)}},$$

deren Form durch die Forderung bedingt ist, dass für die geordneten Elemente E, E', E'' die Relation besteht

Dist. (E, E') + Dist. (E', E'') = Dist. (E, E'').

Nach der Schlussformel des vorigen Artikels wird derselben Genüge geleistet, wenn man voraussetzt, dass die Distanz von x zu x' einem Bogen gleich sei, der den letzterhaltenen Ausdruck zu seinem cosinus hat, so dass die Entfernung der Elemente x, x' durch

$$\text{arc.}\left\{\cos = \frac{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{22}x_2x_2'}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \ldots)(a_{11}x_1'^2 + \ldots)}}\right\},$$

und was nach dem vorigen Art. damit gleichbedeutend ist, durch

$$\text{arc.}\left\{\sin = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x_1x_2' - x_1'x_2)^2}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \ldots)(a_{11}x_1'^2 + \ldots)}}\right\}$$ ausgedrückt wird.

Die beiden Formen der Gleichung des Kreispaares

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots)(a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2)\cos^2\theta$$
$$- \{a_{11}x_1x_1' + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1') + a_{23}x_2x_2'\}^2 = 0$$ und

$(a_{11}x_1^2+\ldots)\,(a_{11}x_1'^2+\ldots)\sin^2\theta-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(x_1x_2'-x_2x_1')^2=0$ sagen dann gleichmässig aus, dass die Entfernungen der beiden Elemente desselben vom Centrum dem Bogen θ gleich sind, oder dass θ der Radius dieses Kreises ist.

Insbesondere hat man für $\theta=0$ die Relation $x_1x_2'-x_1'x_2=0$ d. h. die beiden Elemente fallen zusammen, und für $\theta=\frac{\pi}{2}$ ergiebt sich $a_{11}x_1x_1'+a_{12}(x_1x_2'+x_2x_1')+a_{22}x_2x_2'=0$ d. h. die Elemente x und x' bestimmen mit den Elementen des absoluten Paares ein harmonisches System. Die Distanz zwischen zwei in Bezug auf das absolute Paar harmonischen Elementen ist daher ein Quadrant und der Quadrant soll die Einheit der Distanz sein.

Wenn insbesondere das absolute Paar in ein doppeltes Element zusammenfällt (vergl. Art. 369), so fällt das harmonisch conjugirte eines beliebigen Elements in Bezug auf dasselbe mit ihm zusammen und man erkennt, dass jedes Paar von Elementen als ein Kreispaar betrachtet werden kann, welches das harmonisch conjugirte Element des Absoluten zum Centrum hat. Darnach kann wie vorher das Feld eines Grundgebildes erster Stufe in unendlich kleine gleiche Elementardistanzen zerlegt und die Entfernung von zwei Elementen des Gebildes durch die Anzahl jener Elementardistanzen gemessen werden, die zwischen ihnen liegen. Aber die Einheit der Distanz ist willkürlich, denn der Begriff des Quadranten hat keinen Inhalt mehr. In diesem Falle ist $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, d. h. die Distanz ist als ein Bogen vom sinus Null gegeben; durch Uebergang vom Bogen zum sinus und Unterdrückung des verschwindenden Factors erhält man für $(b_1x_1-b_2x_2)^2=0$ als das absolute Doppelelement die Distanz von x und $x'=\dfrac{x_1x_2'-x_2x_1'}{(b_1x_1-b_2x_2)\,(b_1x_1'-b_2x_2')}$ und durch Einführung eines willkürlichen Factors

$$\frac{(b_1c_2-b_2c_1)\,(x_1x_2'-x_2x_1')}{(b_1x_1-b_2x_2)\,(b_1x_1'-b_2x_2')},\ \text{d. i.}\ \frac{c_1x_1-c_2x_2}{b_1x_1-b_2x_2}-\frac{c_1x_1'-c_2x_2'}{b_1x_1'-b_2x_2'}.$$

368. Das System der einen gegebenen Kegelschnitt $S=0$ doppelt berührenden oder ihm eingeschriebenen Kegelschnitte war in Punktcoordinaten durch $S+kL^2=0$ für L als ein lineares Polynom und in Liniencoordinaten durch $\Sigma+\lambda\Pi^2=0$ ausgedrückt; wenn $\Sigma=0$ die Tangentialgleichung des Kegelschnitts und $\Pi=0$ die Gleichung des gemeinschaftlichen Pols

der Berührungssehnen — **des Centrums der Einschreibung** — in Liniencoordinaten bezeichnet, d. h. nach dem Früheren wenn $\Sigma \equiv A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2$, $\Pi \equiv A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_2\xi_1')$ ist, für die Gleichung der Berührungssehne $L \equiv \xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3 = 0$, d. i. **der Axe der Einschreibung**. Nach Art. 359 ist jene Tangentialgleichung auf Grund der Identität

$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')$$
$$- \{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2)\}^2$$
$$= \Delta\{a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3) + \ldots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)\}$$

in den beiden Formen darstellbar

$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)$$
$$+ \lambda\{a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3) + \ldots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)\} = 0,$$
$$\{\Delta + \lambda(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\}(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)$$
$$- \lambda\{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2)\}^2 = 0.$$

Sind dagegen x' die Coordinaten des Centrums, so ist die Gleichung der Axe ~~durch~~ $a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) = 0$ und in Folge der Identität des Art. 326, d. i.

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')$$
$$- \{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2)\}^2$$
$$= A_{11}(x_2x_3' - x_2'x_3)^2 + \ldots + 2A_{12}(x_1x_3' - x_1'x_3)(x_2x_3' - x_2'x_3),$$

sind $(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')\cos^2\theta$

$$- \{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2)\}^2 = 0,$$
$$(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2')\sin^2\theta$$
$$- \{A_{11}(x_2x_3' - x_2'x_3)^2 + \ldots + 2A_{12}(x_1x_3' - x_1'x_3)(x_2x_3' - x_2'x_3)\} = 0$$

zwei äquivalente Formen des eingeschriebenen Kegelschnitts für den Punkt x' als Centrum und daher die Linie von den Coordinaten ξ' ($= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3'$, etc. respective) als Axe der Einschreibung. Dann ist

$$A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2\xi_1'\xi_2' = \Delta(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2').$$

Damit endlich aber

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')\cos^2\theta$$
$$- \{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2)\}^2 = 0$$

mit der vorausgesetzten Form

$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 + \lambda(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3)^2 = 0$ oder mit
$a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 + \lambda\{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2)\}^2 = 0$

übereinstimme, muss $\lambda = \dfrac{-1}{(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')\cos^2\theta}$

sein oder $\lambda = \dfrac{-\Delta}{(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\cos^2\theta}$. Dann ent-

springt aus den obigen äquivalenten Formen der Punktgleichung das Paar der Formen der Tangentialgleichung desselben eingeschriebenen Kegelschnitts

$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\sin^2\theta$$
$$- \{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2)\} = 0,$$
$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\cos^2\theta$$
$$- \Delta\{a_{11}(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)^2 + \ldots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3' - \xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3' - \xi_2'\xi_3)\}^2 = 0.$$

Mit den Symbolen $a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 \equiv S$, $a_{11}x_1'^2 + \ldots \equiv S'$, $a_{11}x_1''^2 + \ldots \equiv S''$, $a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2) \equiv P$,

$$a_{11}x_1x_1'' + \ldots + a_{12}(x_1x_2'' + x_1''x_2) \equiv P',$$
$$a_{11}x_1'x_1'' + \ldots + a_{12}(x_1x_2'' + x_1''x_2') \equiv P''$$

erhält man die Identität $\begin{vmatrix} S, & P, & P' \\ P, & S', & P'' \\ P', & P'', & S'' \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \end{vmatrix}$ und

daher für drei Punkte in gerader Linie, als für welche die rechtsstehende Determinante verschwindet, wieder wie im Art. 366

$$S(S'S'' - P''^2) + P(P''P' - PS'') + P'(PP'' - P'S') = 0$$

d. h. nach den vorher entwickelten Relationen

$$\text{arc.}\cos\left(= \frac{P}{\sqrt{SS'}}\right) + \text{arc.}\cos\left(= \frac{P''}{\sqrt{S'S''}}\right) = \text{arc.}\cos\left(= \frac{P'}{\sqrt{SS''}}\right).$$

369. An die Formeln des vorigen Artikels schliessen sich dann wieder die folgenden Erklärungen: Man denke einen Kegelschnitt innerhalb des ebenen Systems als unveränderlich — wir nennen ihn den **absoluten Kegelschnitt** — so kommt zunächst die Theorie der Art. 366, 367 in folgenden Zusammenhang mit demselben. Jedes Gebilde erster Stufe hat mit dem absoluten Kegelschnitt zwei Elemente gemein — nämlich eine Punktreihe das Paar der Schnittpunkte, ein Strahlbüschel das Paar der berührenden Strahlen — welche das absolute Paar dieses Gebildes liefern. Insbesondere wird für die Tangenten des absoluten Kegelschnitts als Träger von Reihen das Paar der absoluten Elemente ein Paar zusammenfallender Punkte und für die Punkte des absoluten Kegelschnitts als Träger von Büscheln ein Paar zusammenfallender Strahlen. Die Theorie der Distanzen für jedes einzelne von allen diesen Gebilden erster Stufe ist in den genannten Artikeln begründet und es bleibt nur die Vergleichbarkeit derselben von einem Gebilde zum andern zu begründen. Diess geschieht aber einfach durch die Voraussetzung, **dass die Einheit der Distanz für dieselben, der Quadrant, von einem Gebilde zum**

andern und für alle Gebilde des Systems dieselbe Grösse sei — eine Voraussetzung, die darin schon im Vorigen stillschweigend gemacht ist, dass der Quadrant durch das Symbol $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet wurde. Nennt man dann den Pol einer Geraden in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt den absoluten Pol, die Polare eines Punktes in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt die absolute Polare, so gilt nach den vorigen Formeln das Gesetz, dass die Distanz von zwei Punkten oder von zwei Geraden der Distanz der absoluten Polaren oder der absoluten Pole derselben respective gleich ist. Als Definition für den Begriff der Entfernung eines Punktes von einer Geraden dient dann die Bestimmung, dass dieselbe das Complement der Entfernung der absoluten Polare des Punktes von der Geraden oder das Complement der Entfernung des absoluten Pols der Geraden vom Punkte ist; dann ist die Entfernung des Punktes und seiner absoluten Polare oder der Geraden und ihres absoluten Pols ein Quadrant, das Complement von Null.

Mittelst des absoluten Kegelschnitts wird jede geradlinige Punktreihe und jedes punktförmige Strahlbüschel in eine unendliche Reihe unendlich kleiner Elementardistanzen getheilt, die einander gleich sind: ihre Zahl zwischen zwei Punkten der Reihe oder zwischen zwei Strahlen des Büschels misst die Distanz zwischen diesen Punkten oder Strahlen. Mittelst des Quadranten vergleicht man die Distanz zweier Linien mit der Distanz zweier Punkte; die Distanz eines Punktes von einer Geraden kann ebenso als Distanz von zwei Punkten wie als Distanz von zwei Geraden dargestellt werden.

Nennt man dann einen dem absoluten Kegelschnitt eingeschriebenen Kegelschnitt einen Kreis und das Centrum und die Axe der Einschreibung das Centrum und die Axe des Kreises, so sind offenbar alle Punkte des Kreises äquidistant vom Centrum und alle Tangenten desselben äquidistant von der Axe desselben und die letztere Entfernung ist das Complement der ersteren.

370. Damit ergiebt sich die analytische Ausdrucksform der gewonnenen Begriffe. Ist $a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2 = 0$ die Gleichung des absoluten Kegelschnitts in Punktcoordinaten, also $A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0$ seine Gleichung in Liniencoordinaten, so ist die Gleichung des Kreises vom Centrum x' in Punktcoordinaten entweder

$$(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')\cos^2\theta$$
$$-\{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_1'x_2)\}^2 = 0 \text{ oder}$$
$$(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')\sin^2\theta$$
$$-\{A_{11}(x_2x_3'-x_2'x_3)^2 + \ldots + A_{12}(x_1x_3'-x_3x_1')(x_2x_3'-x_3x_2')\}=0$$

und nach dem ganz analogen Gedankengange wie im Art. 367 erhält man die Distanz der Punkte x, x' in einer der beiden Formen

$$\text{arc.}\left\{\cos = \frac{a_{11}x_1x_1' + \ldots + a_{12}(x_1x_2' + x_2x_1')}{\sqrt{(a_{11}x_1^2+\ldots+2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2+\ldots+2a_{12}x_1'x_2')}}\right\} \text{oder}$$

$$\text{arc.}\left\{\sin = \sqrt{\frac{A_{11}(x_2x_3'-x_2'x_3)^2+\ldots+2A_{12}(x_1x_3'-x_1'x_3)(x_2x_3'-x_2'x_3)}{(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(a_{11}x_1'^2 + \ldots + 2a_{12}x_1'x_2')}}\right\}$$

und nach der am Schluss des vorigen Artikels gewonnenen Relation für die Distanzen von drei Punkten in einer geraden Linie

$$\text{Dist.}(E, E') + \text{Dist.}(E', E'') = \text{Dist.}(E, E'').$$

Sind dagegen ξ' die Liniencoordinaten der Axe der Einschreibung, so ist die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten

$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\sin^2\theta$$
$$-\{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2)\}^2 = 0 \text{ oder}$$
$$(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')\cos^2\theta$$
$$-\Delta\{a_{11}(\xi_2\xi_3'-\xi_2'\xi_3)^2 + \ldots + 2a_{12}(\xi_1\xi_3'-\xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3'-\xi_2'\xi_3)\}=0$$

und die Distanz der geraden Linien von den Coordinaten ξ, ξ' ist daher

$$\text{arc.}\left\{\cos = \frac{A_{11}\xi_1\xi_1' + \ldots + A_{12}(\xi_1\xi_2' + \xi_1'\xi_2)}{\sqrt{(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')}}\right\}$$

oder

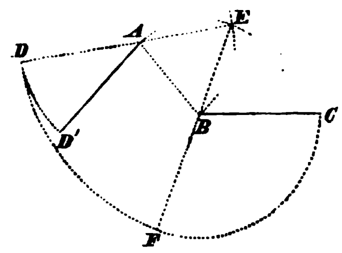
$$\text{arc.}\left\{\sin = \sqrt{\frac{\Delta[a_{11}(\xi_2\xi_3'-\xi_2'\xi_3)^2+\ldots+2a_{12}(\xi_1\xi_3'-\xi_1'\xi_3)(\xi_2\xi_3'-\xi_2'\xi_3)]}{(A_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')}}\right\}.$$

Indem man endlich in den ersten von den Formeln dieser und der vorigen Gruppe die x' durch $A_{11}\xi_1' + A_{12}\xi_2' + A_{13}\xi_3'$, etc. oder die ξ' durch $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, etc. und zugleich arc. cos durch arc. sin ersetzt, erhält man für die Distanz des Punktes x von der Linie ξ' den Ausdruck

$$\text{arc.}\left\{\sin = \frac{(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2 + \xi_3'x_3)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2)(A_{11}\xi_1'^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1'\xi_2')}}\right\}.$$

371. Wenn man den **absoluten Kegelschnitt** als in **ein Punktepaar degenerirt** denkt, so vertritt die Verbindungslinie derselben den absoluten Kegelschnitt als Ort, denn sie enthält alle die Punkte, von welchen aus an ihn zwei zusammenfallende Tangenten gehen; eine geradlinige Punktreihe hat daher mit ihm nur ein Paar zusammenfallender Punkte gemein und die

Metrik aller geradlinigen Reihen des Systems kommt daher auf den speciellen Fall zurück, dessen im Art. 367 am Schlusse gedacht ist und der für einen wirklichen absoluten Kegelschnitt nur für diejenigen Reihen eintritt, deren Träger diesen berühren. Weil dagegen jeder Punkt des ebenen Systems — mit alleiniger Ausnahme derer, die in den absoluten Geraden liegen — mit den beiden Punkten des absoluten Kegelschnitts ein Paar von Tangenten d. h. Verbindungslinien bestimmt, so bleibt die Metrik des Strahlbüschels durch die allgemeinen Formeln des Art. 367 gegeben. Die Vergleichbarkeit der Distanzen von Punkten in verschiedenen Geraden fällt hinweg mit dem Verschwinden des Quadranten als der allgemeinen Einheit der Distanz. Nennt man aber einen durch die beiden Punkte des absoluten gehenden d. h. demselben eingeschriebenen Kegelschnitt einen Kreis, so kann derselbe zur Vergleichung solcher Distanzen in verschiedenen Geraden dienen. Der Pol der absoluten Linie in Bezug auf ihn oder der Durchschnittspunkt der von den Punkten des absoluten Kegelschnitts an ihn gehenden Tangenten wird sein Centrum, jene Linie seine Axe der Einschreibung genannt und es wird vorausgesetzt, dass alle Punkte des Kreises äquidistant sind von seinem Centrum. Die Construction des Euklid, um durch einen Punkt A eine Linie AD oder AD' von gleicher Länge mit der begrenzten geraden Linie BC zu ziehen, gilt nach den hier gemachten Voraussetzungen: Man zieht AB, construirt über ihr das gleichseitige Dreieck ABE, verlängert seine Seiten EA, EB über A und B hinaus, um von B aus auf die letztere $BF = BC$ abzutragen und dann aus E mit dem Kreise durch F die erstere in D zu schneiden. Denn durch sein Centrum und einen seiner Punkte ist jeder Kreis bestimmt, weil die beiden Geraden vom Centrum nach den Punkten des absoluten Kegelschnitts zwei Tangenten sammt ihren Berührungspunkten, also mit jenem Punkte fünf Elemente bestimmen, denen nur ein Kegelschnitt entspricht.



Da aber die Längeneinheit in der Metrik der geradlinigen Punktreihe unbestimmt ist, so fällt die Möglichkeit einer Vergleichung der Distanzen innerhalb der Reihe mit solchen innerhalb des Büschels hinweg.

Die Distanz eines Punktes von einer Geraden kann aber mit der Distanz zweier Punkte verglichen werden, sobald man festsetzt, dass sie die Distanz desjenigen Punktes der Geraden von ihm ist, in welchem der zum absoluten Punktepaar mit der Geraden conjugirt harmonische Strahl sie schneidet, welcher von dem Punkte ausgeht.

Wenn die Coordinaten der beiden Punkte des absoluten Kegelschnitts durch y' und y'' bezeichnet sind, so wird seine Gleichung in Liniencoordinaten

$$2(y_1'\xi_1 + y_2'\xi_2 + y_3'\xi_3)(y_1''\xi_1 + y_2''\xi_2 + y_3''\xi_3) = 0,$$

die A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12} erhalten die respectiven Werthe $2y_1'y_1''$, $2y_2'y_2''$, $2y_3'y_3''$, $y_2'y_3''+y_2''y_3'$, $y_3'y_1''+y_3''y_1'$, $y_1'y_2''+y_1''y_2'$; $\varDelta$ wird gleich Null. Die Gleichung der absoluten Linie ist

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix} = 0; \quad \varDelta(a_{11}x_1^2 + \ldots + 2a_{12}x_1x_2) = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix}^2$$

entspricht in der That dem vorausgesetzten Falle. (Vergl. Anm. Art. 359.)

Aufg. 1. Für die Distanz zweier Punkte x, x' erhält man den Quotienten von

$$4\left\{\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ y_1', & y_2', & y_3' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{ durch } \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1', & y_2', & y_2' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1', & x_2', & x_3' \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Aufg. 2. Für die Distanz der beiden geraden Linien ξ, ξ' folgt

$$\cos = \frac{(y_1'\xi_1+y_2'\xi_2+y_3'\xi_3)(y_1''\xi_1'+y_2''\xi_2'+y_3''\xi_3')+(y_1'\xi_1'+\ldots)(y_1''\xi_1+\ldots)}{\sqrt{2(y_1'\xi_1+\ldots)(y_1''\xi_1+\ldots)}\sqrt{2(y_1'\xi_1'+\ldots)(y_1''\xi_1'+\ldots)}}$$

oder

$$\text{arc.} = \frac{(y_2'y_3''-y_3'y_2'')(\xi_2\xi_3'-\xi_2'\xi_3)+(y_3'y_1''-y_1'y_3'')(\xi_3\xi_1'-\xi_3'\xi_1)+(y_1'y_2''-y_2'y_1'')(\xi_1\xi_2'-\xi_1'\xi_2)}{\sqrt{2(y_1'\xi_1+\ldots)(y_1''\xi_1+\ldots)}\sqrt{2(y_1'\xi_1'+\ldots)(y_1''\xi_1'+\ldots)}}.$$

Aufg. 3. Die Entfernung des Punktes x von der Geraden ξ' endlich ist durch Uebergang vom Bogen zum sinus und Unterdrückung des verschwindenden Factors gleich dem Quotienten von $(\xi_1'x_1 + \xi_2'x_2+\xi_3'x_3)$

$$\text{durch das Product } \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix} \sqrt{2(y_1'\xi_1' + \ldots)(y_1''\xi_1' + \ldots)}.$$

Aufg. 4. Wenn man die Tangentialgleichung des absoluten Kegelschnitts in der Form

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - 2\xi_3\xi_1 \cos A_2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A_3 = 0$$

voraussetzt (Art. 363), welches sind die speciellen Formen, die die vorigen Relationen annehmen? Man kann dann setzen: $y_1' = y_1'' = 1$, $y_2' = -\cos A_3 - i\sin A_3$, $y_3' = -\cos A_2 + i\sin A_2$, $y_2'' = -\cos A_3 + i\sin A_3$, $y_3'' = -\cos A_2 - i\sin A_2$ wo $i = \sqrt{-1}$ ist, und erhält bekannte Formeln.

Aufg. 5. Setzt man $y_1':y_2':y_3'=1:i:0$, $y_1'':y_2'':y_3''=1:-i:0$ so ist die Gleichung des absoluten Kegelschnitts auf $\xi_1^2+\xi_2^2=0$ oder $\xi^2+\eta^2=0$ reducirt oder er besteht aus den zwei Punkten, in welchen das Linienpaar (oder der Kreis vom Radius Null nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch) $x^2+y^2=0$ die unendlich entfernte Gerade $z=0\,.\,x+0\,.\,y+1=0$ schneidet; der durch $x^2+y^2=0$ dargestellte Ort muss nach der Definition des Art. 369 ein Kreis genannt werden, weil er durch das Punktepaar des absoluten Kegelschnitts geht. Die Substitution liefert als Ausdruck der Distanz der Punkte x, y und x', y' wegen der Reduction der Determinantenproducte auf $[y-y'+i(x-x')][y-y'-i(x-x')]$ und $4i^2$ die bekannte Formel

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Aufg. 6. Ebenso erhält man für die Distanz der Linien $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$

$$\text{arc.}\left\{\cos=\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,.\,\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}\right\}\text{ oder arc.}\left\{\sin=\frac{\xi\eta'-\xi'\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}\right\}.$$

Und der Abstand des Punktes x, y von der geraden Linie ξ', η', ζ' ist

$$=\frac{\xi'x+\eta'y+\zeta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}.$$

In der elementaren Metrik des ebenen Systems bilden also die imaginären Kreispunkte im Unendlichen den absoluten Kegelschnitt und liefern das Maass aller geometrischen Grössen. Damit schliessen sich die Entwickelungen der letzten Art. und die der Art. 363—365 zu einem Ganzen zusammen. Die Einheit des Längenmaasses ist willkürlich, die Maasseinheit im Strahlbüschel, d. h. die der Winkelgrössen, ist der rechte Winkel, das harmonische Paar des absoluten Kegelschnitts. Diese Ungleichartigkeit stört die Dualität metrischer Gesetze in der Geometrie der Ebene*).

372. Die Frage nach dem Flächeninhalt der Kegelschnitte ist zwar im Kap. XIV als Beispiel von der Methode des unendlich Kleinen behandelt worden; aber es erübrigt ihre Erledigung für die allgemeinen Gleichungen und in trimetrischen Coordinaten im Anschluss an die Ergebnisse des Art. 66 und die Theorien der letzten Abschnitte. Wir erledigen sie in den folgenden Aufgaben.

Aufg. 1. Man soll den Inhalt der vom Kegelschnitt $a_{11}x_1^2+\ldots+2a_{12}x_1x_2=0$ mit der Geraden $a_1x_1+\ldots=0$ eingeschlossenen Fläche ausdrücken.

Wir denken die trimetrischen Coordinaten als die normalen Abstände

*) Sie verschwindet in der Geometrie der Kugel und diese zeigt darum auch die vollständige ungestörte Herrschaft des Gesetzes der Dualität.

von den Fundamentallinien, so dass $s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = M$ der doppelte Inhalt ihres Dreiecks ist. Wenn dann die Gerade den Kegelschnitt in zwei Punkten y, z schneidet, d. h. wenn $\Sigma_a^a = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0 \end{vmatrix}$ positiv ist*), so liefert die Elimination der Veränderlichen x zwischen der Gleichung der Geraden, der des Kegelschnitts und der Gleichung $\xi_1 x_1 + \ldots = 0$ die Bedingung $\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_1, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_2, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_3, & \xi_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$ oder setzen wir $\Sigma_{a\xi}^{a\xi} = 0$ und entwickelt

$$\mathbf{A}_{11}\xi_1^2 + \mathbf{A}_{22}\xi_2^2 + \mathbf{A}_{33}\xi_3^2 + 2\mathbf{A}_{23}\xi_2\xi_3 + 2\mathbf{A}_{31}\xi_3\xi_1 + 2\mathbf{A}_{12}\xi_1\xi_2 = 0$$

für die durch die Schnittpunkte y, z gehenden Geraden, so dass

$$\mathbf{A}_{11}\xi_1^2 + \ldots + 2\mathbf{A}_{12}\xi_1\xi_2 = (\xi_1 y_1 + \ldots)(\xi_1 z_1 + \ldots)$$

sein muss und daher die Relationen gelten $\mathbf{A}_{11} : \mathbf{A}_{22} : \mathbf{A}_{33} : 2\mathbf{A}_{23} : 2\mathbf{A}_{31} : 2\mathbf{A}_{12}$ $= y_1 z_1 : y_2 z_2 : y_3 z_3 : (y_2 z_3 + y_3 z_2) : (y_3 z_1 + y_1 z_3) : (y_1 z_2 + y_2 z_1)$. Setzt man $A_{11} : y_1 z_1 = \text{etc.} = \delta$, so hat man überdiess $s_1 y_1 + \ldots = M$, $s_1 z_1 + \ldots = M$ und erhält durch Multiplication

$\delta M^2 = \mathbf{A}_{11} s_1^2 + \mathbf{A}_{22} s_2^2 + \ldots + 2\mathbf{A}_{12} s_1 s_2$; die rechts stehende Grösse giebt durch ihr Verschwinden die Bedingung, unter welcher die gegebene Gerade einer Asymptote des Kegelschnitts parallel ist und da sie nach dem Vorigen durch Σ_{as}^{as} bezeichnet werden kann, so ist $\delta M^2 = \Sigma_{as}^{as}$ und mittelst der vorher gefundenen stetigen Proportion $\delta^2 (y_2 z_3 - y_3 z_2)^2 = 4(\mathbf{A}_{23}^2 - \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{33}) = 4 a_1^2 \cdot \Sigma_a^a$, also

$$y_2 z_3 - y_3 z_2 = \frac{2M^2(\Sigma_a^a)^{\frac{1}{2}}}{\Sigma_{as}^{as}} a_1;$$ auf gleiche Weise folgen die Werthe

$$y_3 z_1 - y_1 z_3 = \frac{2M^2(\Sigma_a^a)^{\frac{1}{2}}}{\Sigma_{as}^{as}} a_2, \quad y_1 z_2 - y_2 z_1 = \frac{2M^2(\Sigma_a^a)^{\frac{1}{2}}}{\Sigma_{as}^{as}} a_3.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck des Art. 66 für die Entfernung zweier Punkte

$$\varrho^2 = \frac{s_1^2 s_2^2 s_3^2}{M^4} \left\{ (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + \ldots - 2(y_2 z_3 - y_3 z_2)(y_3 z_1 - y_1 z_3)\cos A_3 - \ldots \right\},$$

so erhält man für die Länge der Sehne yz den Ausdruck

$$\varrho^2 = 4 s_1^2 s_2^2 s_3^2 \frac{\Sigma_a^a}{(\Sigma_{as}^{as})^2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos A_1 - 2a_3 a_1 \cos A_2 - 2a_1 a_2 \cos A_3).$$

---

*) Nach derselben Bezeichnung wäre die Gleichung des Kegelschnitts in Tangentialcoordinaten $\Sigma = 0$ (Art. 324) durch $\Sigma_\xi^\xi = 0$ wiederzugeben; die Indices bezeichnen den Saum, welcher so zu sagen an der Discriminante rechts und unten angebracht ist; die nachher vorkommenden Doppelindices bezeichnen analog die Säumung mit zwei Reihen.

Hier giebt die Parenthese durch ihr Verschwinden die Bedingung, unter welcher die gegebene Gerade $a_1 x_1 + \ldots = 0$ durch einen der unendlich fernen imaginären Kreispunkte geht; ersetzen wir sie also durch K_a^a.

Ist dann ferner $a_1 x_1 + \ldots - \lambda(s_1 x_1 + \ldots) = 0$ eine zur gegebenen Geraden parallele Sehne, so kann der Ausdruck für die Distanz ihrer Schnittpunkte durch Substitution von $a_1 - \lambda s_1$, $a_2 - \lambda s_2$, $a_3 - \lambda s_3$ in das Σ_a^a und K_a^a des vorigen Ausdrucks erhalten werden und liefert dann

$$\varrho_1^2 = \frac{4 s_1^2 s_2^2 s_3^2}{(\Sigma_{as}^{as})^2} \left\{\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s + \lambda^2 \Sigma_s^s\right\}\left\{K_a^a - 2\lambda K_a^s + \lambda^2 K_s^s\right\},$$

mit den Symbolbedeutungen

$$K_s^s \equiv s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2 s_2 s_3 \cos A_1 - 2 s_3 s_1 \cos A_2 - 2 s_1 s_2 \cos A_3,$$

$$K_a^s \equiv a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 - (a_2 s_3 + a_3 s_2)\cos A_1 - (a_3 s_1 + a_1 s_3)\cos A_2 - (a_1 s_2 + a_2 s_1)\cos A_3,$$

$$\Sigma_s^s \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & 0 \end{vmatrix}; \quad \Sigma_a^s \equiv \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & s_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & s_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & s_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

Den normalen Abstand ε der Geraden $a_1 x_1 + \ldots - \lambda(s_1 x_1 + \ldots) = 0$ von der unendlich nahe benachbarten Parallelen $a_1 x_1 + \ldots - (\lambda + d\lambda)(s_1 x_1 + \ldots) = 0$ liefert die Formel

$$\varepsilon = \frac{M . d\lambda}{\left\{K_a^a - 2\lambda K_a^s + \lambda^2 K_s^s\right\}^{\frac{1}{2}}}$$ (vergl. Art. 371) und das Flächenelement, welches von ihnen mit der Kegelschnittlinie bestimmt wird, ist daher gemessen durch das Product

$$\varrho_1 \varepsilon = \frac{2 s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as}} \left\{\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s + \lambda^2 \Sigma_s^s\right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda.$$

Für die Ellipse, d. h. $\Sigma_s^s < 0$ giebt die Integration den unbestimmten Inhalt

$$= \frac{s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as}(-\Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} -(\lambda \Sigma_s^s - \Sigma_a^s)(-\Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}(\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s + \lambda^2 \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}} \\ -(\Sigma_a^{s2} - \Sigma_a^a \Sigma_s^s) \operatorname{arc}\left[\sin = \dfrac{\lambda \Sigma_s^s - \Sigma_a^s}{(\Sigma_a^{s2} - \Sigma_a^a \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}}\right] \end{array} \right\} + \text{const.};$$

dagegen für die Hyperbel d. h. $\Sigma_s^s > 0$

$$= \frac{s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as}(\Sigma_s^s)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} (\lambda \Sigma_s^s - \Sigma_a^s)\, \Sigma_s^{s\frac{1}{2}} (\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s + \lambda^2 \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}} + \\ (\Sigma_a^a \Sigma_s^s - \Sigma_a^{s2}) \log\left[(\lambda \Sigma_s^s - \Sigma_a^s) + \Sigma_s^{s\frac{1}{2}} (\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s + \lambda^2 \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}\right] \end{array} \right\} + \text{const.}$$

Für die Parabel vereinfacht sich durch $\Sigma_s^s = 0$ derselbe Ausdruck

$$= -\frac{2 s_1 s_2 s_3 M}{3 \Sigma_{as}^{as} \Sigma_a^s} \left\{\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s\right\}^{\frac{3}{2}} + \text{const.}$$

Aufg. 2. Wenn die Gerade $a_1 x_1 + \ldots - \lambda(s_1 x_1 + \ldots) = 0$ den Kegelschnitt berührt, so ist $\Sigma_a^a - 2\lambda \Sigma_a^s + \lambda^2 \Sigma_s^s = 0$ und man erhält daraus zwei Werthe λ_1, λ_2 des Parameters λ, welche der Berührung entsprechen. Sie sind $(\lambda_1, \lambda_2) = \dfrac{\Sigma_a^s \pm (\Sigma_a^{s2} - \Sigma_a^a \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}}{\Sigma_s^s}$ und daher immer reell

für die Ellipse und für die Hyperbel, wenn $\Sigma_a^{s2} - \Sigma_a^a \Sigma_s^s > 0$ ist oder die gegebene Gerade mit ihr zwei Punkte gemein hat, die nicht durch das Unendliche getrennt sind. Wenn man dann von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \lambda_1$ integrirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation $\Delta \Sigma_{as}^{as} = \Sigma_a^a \Sigma_s^s - \Sigma_a^{s2}$ (für Δ als Discriminante des Kegelschnitts)

$$\frac{s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as}(-\Sigma_s^s)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \Sigma_a^s (-\Sigma_a^a \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}} - \Delta \Sigma_{as}^{as} \text{ arc.} \left[\sin = \left(\frac{\Sigma_a^a \Sigma_s^s}{\Delta \Sigma_{as}^{as}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Aufg. 3. Die Integration zwischen $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ giebt für den Inhalt der Ellipse den Ausdruck $\frac{s_1 s_2 s_3 \pi M \Delta}{(-\Sigma_s^s)^{\frac{3}{2}}}$. Derselbe wird für $\Delta = 0$ gleich Null und für $\Sigma_s^s = 0$, d. h. den Grenzfall der Parabel, unendlich gross.

Aufg. 4. Für das hyperbolische Segment giebt die Integration zwischen $\lambda = 0$, $\lambda = \lambda_2$

$$\frac{s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as} \Sigma_s^{s\,\frac{3}{2}}} \left\{ \Sigma_a^s (\Sigma_a^a \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} (\Sigma_a^{s2} - \Sigma_a^a \Sigma_s^s) \log \frac{\Sigma_a^s + (\Sigma_a^a \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}}{\Sigma_a^s - (\Sigma_a^a \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Aufg. 5. Für das parabolische Segment liefert die Integration von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \Sigma_a^a : 2 \Sigma_a^s$ den Ausdruck $\dfrac{2 s_1 s_2 s_3 M \Sigma_a^{a\,\frac{3}{2}} \Delta}{3 \Sigma_a^{s3}}$.

Aufg. 6. Setzt man den Kegelschnitt als ein Paar von Geraden voraus, so sind Σ_a^a und Σ_s^s positiv und wegen $\Delta = 0$ ist $\Sigma_a^{s2} = \Sigma_a^a \Sigma_s^s$; das Flächenelement erhält den Ausdruck

$$\varrho_1 \varepsilon = \frac{2 s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as}} \left\{ (\Sigma_a^a)^{\frac{1}{2}} - \lambda (\Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}} \right\} d\lambda$$

und die Integration von $\lambda = 0$ bis $\lambda = (\Sigma_a^a : \Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}$ giebt den Inhalt des Dreiecks, welches diese Geraden mit der Linie $a_1 x_1 + \ldots = 0$ bilden, in der Form $- \frac{s_1 s_2 s_3 M}{\Sigma_{as}^{as}} \cdot \frac{\Sigma_a^a}{(\Sigma_s^s)^{\frac{1}{2}}}$.

Haben die den Kegelschnitt bildenden Geraden die Gleichungen $b_1 x_1 + \ldots = 0$, $c_1 x_1 + \ldots = 0$, so sind

$$\Sigma_a^a = \tfrac{1}{4} \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & a_1 \\ b_2, & c_2, & a_2 \\ b_3, & c_3, & a_3 \end{vmatrix}^2, \quad \Sigma_s^s = \tfrac{1}{4} \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & s_1 \\ b_2, & c_2, & s_2 \\ b_3, & c_3, & s_3 \end{vmatrix}^2, \quad \Sigma_{as}^{as} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & s_1 \\ a_2, & b_2, & s_2 \\ a_3, & b_3, & s_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1, & c_1, & s_1 \\ a_2, & c_2, & s_2 \\ a_3, & c_3, & s_3 \end{vmatrix}$$

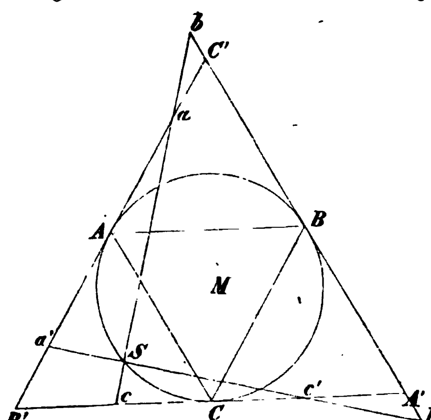
und man erhält für die von drei Geraden $a_1 x_1 + \ldots = 0$, $b_1 x_1 + \ldots = 0$, $c_1 x_1 + \ldots = 0$ eingeschlossene Fläche (wie in Art. 75)

$$\frac{s_1 s_2 s_3 M}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} s_1, & b_1, & c_1 \\ s_2, & b_2, & c_2 \\ s_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1, & c_1, & a_1 \\ s_2, & c_2, & a_2 \\ s_3, & c_3, & a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1, & a_1, & b_1 \\ s_2, & a_2, & b_2 \\ s_3, & a_3, & b_3 \end{vmatrix}}.$$

373. Die Erkenntniss der wahren Natur der metrischen Relationen gestattet ferner in verschiedenen Fällen, die wahrhaft all-

gemeine Gestalt von geometrischen Sätzen aufzufinden, welche durch darein eingehende metrische Relationen aus jener Sphäre von Wahrheiten ausgeschlossen sind, die das Princip der Dualität verbindet. So ist es in dem Falle des Satzes (Art. 162, Aufg. 4) von der Berührung der einem Dreieck eingeschriebenen Kreise mit dem Kreise, welcher die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks enthält. Wir haben bereits auf dem analytischen Wege im Art. 359, Aufg. 2 die allgemeinere Form bewiesen, welche demselben zukommt: Die vier Kegelschnitte, welche dieselben drei Punkte oder Tangenten haben und zugleich einen festen Kegelschnitt doppelt berühren, werden sämmtlich von einem Kegelschnitt berührt, der mit dem gegebenen Kegelschnitt auch in doppelter Berührung ist. Die Auffassung der imaginären Kreispunkte als eines Kegelschnitts, welcher mit den eingeschriebenen Kegelschnitten eine doppelte Berührung hat, führt ohne Weiteres zu ihr. Wenn der gemeinschaftlich berührende Kreis die Höhenfusspunkte des Dreiecks enthält, so erkennt man, dass der gemeinschaftlich berührende Kegelschnitt durch die Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Geraden aus den respectiven Gegenecken geht, welche ihnen in Bezug auf den festen Kegelschnitt conjugirt sind, etc.

Aufg. 1. Man hat den elementaren Satz: Wenn man durch den Scheitel S eines rechten Winkels einen Kreis und an ihn drei Tangenten so legt, dass die zwischen dem Berührungspunkt und den Schenkeln des rechten Winkels enthaltenen Segmente einer jeden (Aa, Aa'; Bb, Bb'; Cc, Cc') von gleicher Länge sind, so bilden die drei Berührungspunkte und also auch die drei Tangenten ein gleichseitiges Dreieck. Darnach ist der Kreis dem Tangentendreieck eingeschrieben und berührt seine Seiten in ihren Mittelpunkten, d. h. in den conjugirt harmonischen zu den unendlich fernen Punkten der Seiten; somit ist die unendlich entfernte Gerade die Harmonikale desjenigen Punktes in Bezug auf das Dreieck, (in Art. 60, Aufg. 2 ist LMN die Harmonikale von O in Bezug auf das Dreieck ABC), in welchem sich die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Gegenecken schneiden (Art.



159) und sie ist zugleich seine Polare in Bezug auf den Kreis. Die Schenkel des Winkels bSb' bilden mit den in jener unendlich entfernten Geraden gelegenen Punkten der Curve ein harmonisches System.

Denken wir dann einen Kegelschnitt, der irgend drei Gerade berührt, so ist die Polare des Durchschnittspunktes der drei von den Berührungspunkten nach den Gegenecken des umgeschriebenen Dreiecks gezogenen Geraden wieder zugleich die Harmonikale desselben in Bezug auf das Dreieck; sie schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, mit welchen jene Geraden ein harmonisches System bilden, die die Schenkel des rechten Winkels vertreten. Statt dass sie in den Dreiecksseiten Punkte bestimmen, welche mit den Ecken den Berührungspunkt zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, erzeugen sie nun mit diesen Involutionen, für welche dieser Berührungspunkt ein Doppelpunkt ist. Solche zwei gerade Linien also schneiden sich immer in der Peripherie des eingeschriebenen Kegelschnitts; ihre Schnittpunkte bilden mit den Seiten des Dreiecks, den respectiven Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnitts und den Punkten in der Polare je ein harmonisches System, ihre Schnittpunkte mit je einer Seite liegen in einem Kegelschnitt, der den entsprechenden Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnitts zum Pol jener Polare hat und für welchen und den eingeschriebenen Kegelschnitt sie eine gemeinsame Sehne ist.

Endlich aber darf man die Schenkel des rechten Winkels durch eine Curve zweiter Ordnung ersetzen; denn die drei Punktepaare in den Seiten des Dreiecks, welche mit den Ecken Involutionen bestimmen, die den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnitts zum Doppelpunkt haben, liegen in einem Kegelschnitt, der die Polare zu der ihm mit jener gemeinsamen Sehne hat. Dann gilt der Satz: Für jede Gerade, welche mit diesen Kegelschnitten eine harmonische Theilung bestimmt, liegt der in Bezug auf den einen genommenen Pol in dem andern.

Aufg. 2. Wenn zwei Kegelschnitte $S=0$ und $S'=0$ und das gemeinschaftliche sich selbst conjugirte Dreieck sowie auf dem ersten von ihnen zwei Punkte A, B und ihre Tangenten AT, BT sowie die zu diesen in Bezug auf den zweiten Kegelschnitt $S'=0$ harmonisch conjugirten Geraden AT', BT' gegeben sind, so bestimmt die Harmonikale von T in Bezug auf das sich selbst conjugirte Dreieck in S zwei Punkte c und d, für welche die zu ihren Tangenten in Bezug auf S' harmonisch conjugirten Geraden durch denselben Punkt T' gehen.

Denn in Bezug auf den ersten der Kegelschnitte $S\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, $S'\equiv\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2=0$ sind die Geraden $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$, $b_1x_1+\ldots=0$ harmonisch conjugirt, wenn $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ ist; ist also x' einer der betrachteten Punkte von $S=0$, so ist die zu seiner Tangente harmonische Gerade durch

$$(\lambda_2-\lambda_3)x_2'x_3'x_1+(\lambda_3-\lambda_1)x_3'x_1'x_2+(\lambda_1-\lambda_2)x_1'x_2'x_3=0$$

dargestellt und schneidet die den Punkten x'', x''' entsprechenden Geraden derselben Art, wenn

$$\begin{vmatrix} x_2'x_3', & x_3'x_1', & x_1'x_2' \\ x_2''x_3'', & x_3''x_1'', & x_1''x_2'' \\ x_2'''x_3''', & x_3'''x_1''', & x_1'''x_2''' \end{vmatrix}=0 \text{ ist.} \quad \begin{vmatrix} x_1'^2, & x_2'^2, & x_3'^2 \\ x_1''^2, & x_2''^2, & x_3''^2 \\ x_1'''^2, & x_2'''^2, & x_3'''^2 \end{vmatrix}=0$$

entspricht der Lage der Punkte x', x'', x''' auf dem Kegelschnitt $S'=0$ und da die Summe dieser letzteren und der doppelten ersten Determinante dem Producte von

$$\left\{x_1'(x_2''x_3'''+x_2'''x_3'')+x_1''(x_2'''x_3'+x_2'x_3''')+x_1'''(x_2'x_3''+x_2''x_3')\right\}$$

in die Determinante $\begin{vmatrix} x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \\ x_1''', & x_2''', & x_3''' \end{vmatrix}$ gleich ist, so muss die erste von diesen Grössen gleich Null sein, weil die letzte es nicht sein kann. Die Gleichung der die Punkte x', x'' verbindenden Geraden liefert aber für die Coordinaten ihres Pols T in Bezug auf den Kegelschnitt $S'=0$

$$\frac{x_2'x_3''-x_2''x_3'}{\lambda_1}:\frac{x_3'x_1''-x_3''x_1'}{\lambda_2}:\frac{x_1'x_2''-x_1''x_2'}{\lambda_3},$$

d. h. da nach den Gleichungen $\lambda_1 x_1'^2+\ldots=0$, $\lambda_1 x_1''^2+\ldots=0$ die Relation

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(x_2'^2x_3''^2-x_2''^2x_3'^2):(x_3'^2x_1''^2-x_3''^2x_1'^2):(x_1'^2x_2''^2-x_1''^2x_2'^2)$$

besteht, auch $\frac{1}{x_2'x_3''+x_2''x_3'}:\frac{1}{x_3'x_1''+x_3''x_1'}:\frac{1}{x_1'x_2''+x_1''x_2'}$. Die Harmonikale dieses Punktes in Bezug auf das Fundamentaldreieck ist daher durch

$$x_1(x_2'x_3''+x_2''x_3')+x_2(x_3'x_1''+x_3''x_1')+x_3(x_1'x_2''+x_1''x_2')=0$$

und da sie für die Substitution der Coordinaten x''' an Stelle von x in die oben aufgestellte Relation übergeht, so enthält diese Gerade den Punkt c, welchem ein analoger Beweis auch den Punkt d beifügt.

Denkt man den Kegelschnitt $S=0$ in das Paar der imaginären Kreispunkte degenerirt, so werden die in Bezug auf ihn den Tangenten von $S'=0$ in A und B, C und D harmonisch conjugirten Geraden zu den Normalen von S' in A und B, C und D; das gemeinschaftliche System harmonischer Pole liefert das Centrum und die unendlich fernen Punkte der Axen von S' und die Harmonikale des Pols T von AB in Bezug auf dasselbe wird als die Verbindungslinie der Punkte erkannt, welche in den Axen auf den entgegengesetzten Seiten vom Centrum die Abstände des Punktes T haben; diese Linie bestimmt auf S' das Paar von Punkten C, D, deren Normalen mit den in A und B in demselben Punkte T' zusammentreffen.

374. Wenn man die Normale eines Kegelschnitts $U=0$ in einem seiner Punkte X als die der Tangente in Bezug auf einen andern festen — den absoluten — Kegelschnitt $V=0$ conjugirte Gerade auffasst, so besteht das Problem, die Normalen von einem beliebigen Punkte x aus an den Kegelschnitt $U=0$ zu ziehen, darin, den Punkt X desselben so zu bestimmen, dass die Gerade xX durch den Pol der Tangente in X an $U=0$ in Bezug auf $V=0$ geht. In dieser Fassung ist das Problem der allgemeinen analytischen Behandlung bequem zugänglich.

Sind u, v die Werthe der homogenen Functionen zweiten Grades U, V, welche man erhält, wenn man die X durch die x ersetzt, und bezeichnen U_1, V_1, u_1, v_1, etc. die nach X_1, x_1, etc

gebildeten und durch zwei dividirten Differentiale derselben*), so hat man $U=0$; $v_1=\lambda U_1+\mu V_1$, $v_2=\lambda U_2+\mu V_2$, $v_3=\lambda U_3+\mu V_3$ als die Gleichungen des Problems. Die entwickelte Form der letzteren drei Gleichungen ist für a_{ik} und b_{ik} als Coefficienten von u und v

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3=(\lambda a_{11}+\mu b_{11})X_1+(\lambda a_{12}+\mu b_{12})X_2+(\lambda a_{13}+\mu b_{13})X_3,$$
$$b_{12}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3=(\lambda a_{12}+\mu b_{12})X_1+(\lambda a_{22}+\mu b_{22})X_2+(\lambda a_{23}+\mu b_{23})X_3,$$
$$b_{13}x_1+b_{23}x_2+b_{33}x_3=(\lambda a_{13}+\mu b_{13})X_1+(\lambda a_{23}+\mu b_{23})X_2+(\lambda a_{33}+\mu b_{33})X_3$$

und wenn man die aus den Elementen $\lambda u_{ik}+\mu v_{ik}$ oder $\lambda a_{ik}+\mu b_{ik}$ gebildete Determinante mit Δ bezeichnet, so liefern sie durch Auflösung $\Delta X_1=v_1\Delta_{11}+v_2\Delta_{12}+v_3\Delta_{13}$, $\Delta X_2=v_1\Delta_{21}+v_2\Delta_{22}+v_3\Delta_{23}$, $\Delta X_3=v_1\Delta_{31}+v_2\Delta_{32}+v_3\Delta_{33}$ und durch Substitution in $U=0$ die Endgleichung $\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik}v_p\Delta_{ip}v_q\Delta_{kq}=0$. Nach der Determinantenrelation $\Delta_{ip}\Delta_{kq}=\Delta_{ik}\Delta_{pq}-\Delta\Delta_{ik,pq}$ geht sie in $\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik}\Sigma\Sigma v_pv_q\Delta_{pq}-\Delta\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik}v_pv_q\Delta_{ik,pq}=0$ über; da u_{ik} als Differentialquotient von $\lambda u_{ik}+\mu v_{ik}$ nach λ angesehen werden kann, so ist

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik}=\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda},\quad \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik}v_pv_q\Delta_{ik,pq}=\frac{\partial(\Sigma\Sigma v_pv_q\Delta_{pq})}{\partial\lambda}$$ und die

Endgleichung wird für $\Omega=\Sigma\Sigma v_pv_q\Delta_{pq}$ in die Form $\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}-\Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=0$ übergeführt. Sie bezeichnet für x als Veränderliche einen Kegelschnitt von folgender Entstehung: Er ist der Ort der in Bezug auf den Kegelschnitt $v=0$ genommenen Pole der Geraden, welche für die Punkte von $u=0$ die Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt $\lambda u+\mu v=0$ sind, der durch die gemeinschaftlichen Punkte von $u=0$ und $v=0$ hindurchgeht.

Die Gleichung $\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}-\Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=0$ ist biquadratisch in $\lambda:\mu$ und die nähere Discussion derselben führt auf die vollständige Lösung des Problems der Normalen. Da dieselbe das genauere Studium gewisser Curven höherer Ordnungen einschliesst, so beschränken wir uns hier auf die Angabe einiger in den Zusammenhang dieser Untersuchungen eingreifender Resultate. Die bezeichnete Discussion knüpft sich (vergl. Art. 340) an die Discriminante der Gleichung und man weist zuerst nach, dass dieselbe in zwei Factoren vom sechsten Grade zerfällt, von denen der erste das vollständige Quadrat eines in lineare Factoren zerlegbaren Aus-

*) In Fortsetzung derselben Bezeichnungsweise sind u_{ik}, etc. die Coefficienten von u, etc.

drucks ist. Auch ist ihre biquadratische Invariante ein vollständiges Quadrat. Man erkennt dadurch, dass der Ort derjenigen Punkte, für welche zwei Lösungen des Problems zusammenfallen, aus dem doppelt gezählten gemeinsamen Polardreieck der beiden Kegelschnitte $u = 0$, $v = 0$ und aus einer Curve sechster Ordnung G besteht. Projicirt man beide Kegelschnitte so, dass sie confocal werden, so wird jenes Dreieck von den Axen der Kegelschnitte mit der unendlich entfernten Geraden gebildet und diese Curve wird die Evolute des Kegelschnitts $u = 0$.

Diese Curve G hat in den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks sechs Rückkehrpunkte, für welche diese Seiten selbst ihre Tangenten sind, und diese Rückkehrpunkte liegen auf einem Kegelschnitt h, der mit u und v dasselbe System harmonischer Pole hat. Die Curven G und h sind Glieder einer Curvenfamilie, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden dem Problem entsprechenden Geraden ein Büschel von bestimmtem Doppelverhältniss bilden; jedem gegebenen Doppelverhältniss entsprechen zwei Curven der Familie und alle Curven derselben haben dieselben sechs Rückkehrpunkte; für den Fall der Normalen oder der confocalen Kegelschnitte liegen zwei von ihnen im Unendlichen und die vier andern sind die Spitzen der Evolute. Die Curve G und das gemeinsame Polardreieck entsprechen den Werthen $0, 1, \infty$ für das Doppelverhältniss; für den Werth -1 oder das harmonische Büschel fallen beide Curven in eine zusammen und ebenso für den Werth $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, im letzteren Falle in den dreifach zählenden Kegelschnitt h. In den Rückkehrpunkten fallen je drei, in den Ecken des gemeinsamen Polardreiecks zweimal je zwei Lösungen des Problems zusammen; auch hat die Curve G vier Doppelpunkte, die die nämliche Eigenschaft besitzen. Wenn man die Functionen u, v in Tangentialcoordinaten gegeben denkt und die Gerade sucht, deren Pole in Bezug auf u und v mit x in einer Geraden liegen, so erhält man für u_i, v_i als die halben Differentiale der u, v nach den ξ die Gleichungen des Problems

$$\lambda u_1 + \mu v_1 = x_1, \quad \lambda u_2 + \mu v_2 = x_2, \quad \lambda u_3 + \mu v_3 = x_3; \quad u = 0.$$

Nach diesen Gleichungen bleibt das Problem ungeändert, wenn man $v + \lambda u$ an die Stelle von v setzt, d. h. wenn man für v irgend einen der Kegelschnitte setzt, welche mit u und v demselben Vierseit eingeschrieben sind. Darum können auch die bei-

den imaginären Kreispunkte im Unendlichen ohne alle Aenderung den confocalen Kegelschnitt v vertreten, um die Lösung des Normalenproblems aus der allgemeinen abzuleiten.

375. In allem Vorhergehenden ist das ebene System als eines und die Theorie der linearen Substitutionen als das Mittel betrachtet worden, dieses System auf verschiedene Weise auf feste Elemente zu beziehen. Aber schon im Art. 83 ist hervorgehoben worden, dass die Resultate der Substitutionen noch einer zweiten ganz veränderten Auffassung fähig sind, indem man die ursprüngliche und die transformirte Gleichung nicht als zwei Ausdrücke einer Curve in Bezug auf verschiedene Coordinatensysteme, sondern als die Ausdrücke von zwei Curven in Bezug auf das nämliche Coordinatensystem ansieht. Dass man diese Curven als einander projectivisch oder collinear verwandt bezeichnet, und welches die Grundcharaktere dieser Verwandtschaft (Collineation) sind, ist schon im Art. 83 gezeigt worden; hier soll einiges Weitere über diese Beziehung entwickelt werden.

Wir nehmen an, die Punkte des einen Systems seien durch die Coordinaten x und die des andern durch die Coordinaten y bezeichnet, zwischen beiden aber bestehen die der allgemeinen linearen Substitution entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3,\\ \mu y_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3,\\ \mu y_3 &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3;\end{aligned}$$

und wenn ebenso ξ, η die Coordinaten entsprechender gerader Linien beider Systeme bezeichnen, so giebt die transponirte Substitution oder

$$\begin{aligned}\varrho \xi_1 &= \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \alpha_{31}\eta_3,\\ \varrho \xi_2 &= \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{32}\eta_3,\\ \varrho \xi_3 &= \alpha_{13}\eta_1 + \alpha_{23}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3\end{aligned}$$

ihren Zusammenhang.

Vier Paare entsprechender Punkte und ebenso vier Paare entsprechender Linien würden zur Bestimmung der Systeme genügen, weil sie zwölf Gleichungen zur Berechnung der μ (ϱ) und α liefern. In diesem System entsprechen einige Punkte und einige Gerade sich selbst; man erhält zu ihrer Bestimmung durch $y = x$, $\xi = \eta$ für beide Fälle die cubische Gleichung

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\mu, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}-\mu, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\varrho, & \alpha_{21}, & \alpha_{31} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}-\varrho, & \alpha_{32} \\ \alpha_{13}, & \alpha_{23}, & \alpha_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

und man hat $\xi_i x_k = \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ik}}$ zur Bestimmung der Werthe der x und ξ bis auf einen Factor, der sich aus dem gegebenen Inhalt des Fundamentaldreiecks bestimmt. Die Anzahl dieser Punkte und Linien ist also gleich drei. Sind μ, μ' zwei verschiedene Wurzeln dieser cubischen Gleichung, so hat man gleichzeitig

$$\begin{aligned}
(\alpha_{11} - \mu)\,\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3 &= 0,\\
\alpha_{12}\,\xi_1 + (\alpha_{22} - \mu)\,\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3 &= 0,\\
\alpha_{13}\,\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + (\alpha_{33} - \mu)\,\xi_3 &= 0;\\
(\alpha_{11} - \mu')x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3' &= 0,\\
\alpha_{21}x_1' + (\alpha_{22} - \mu')x_2' + \alpha_{23}x_3' &= 0,\\
\alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + (\alpha_{33} - \mu')x_3' &= 0
\end{aligned}$$

und erhält daraus $(\mu' - \mu)\,(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3') = 0$, d. h. da $(\mu' - \mu)$ im Allgemeinen nicht Null sein kann, $\xi_1 x_1' + \ldots = 0$ oder die sich selbst entsprechenden Geraden sind die Verbindungslinien der sich selbst entsprechenden Punkte.

Aus denselben Grundgleichungen folgt, dass zwei Systeme, die mit demselben dritten System collinear sind, unter einander in Collinearverwandtschaft stehen.

376. Legt man das Dreieck der Doppelpunkte und Doppellinien als Coordinatendreieck zu Grunde, so erhält man die einfachen Relationen $\mu y_1 = \alpha_1 x_1$, $\mu y_2 = \alpha_2 x_2$, $\mu y_3 = \alpha_3 x_3$; $\varrho \xi_1 = \alpha_1 \eta_1$, $\varrho \xi_2 = \alpha_2 \eta_2$, $\varrho \xi_3 = \alpha_3 \eta_3$ und erkennt daraus, dass die drei Doppelelemente und ein anderes Paar entsprechender Elemente das ganze System der beiden projectivisch verwandten Gebilde zweiter Stufe bestimmen.

Wenn $L_x = 0$, $M_x = 0$ zwei Gerade des Systems x sind, und $L_y = 0$, $M_y = 0$ die zwei entsprechenden Geraden des Systems y bezeichnen, so entspricht dem Büschel $L_x + \lambda M_x = 0$ das ihm projectivische Büschel (Art. 59) $L_y + \lambda M_y = 0$ und der Durchschnittsort der entsprechenden Strahlen beider Büschel ist ein durch $L_x M_y - L_y M_x = 0$ dargestellter Kegelschnitt, welcher durch die drei Ecken des Fundamentaldreiecks geht, da für $x = y$ seine Gleichung erfüllt wird. Ebenso umhüllen die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von zwei einander entsprechenden projectivischen Reihen einen Kegelschnitt, welcher dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist.

Die Projectivität entsprechender Büschel und Reihen erlaubt die lineare Construction collinear-verwandter Systeme aus vier

Paaren entsprechender Elemente. Sind a, b, c, d; a', b', c', d' die entsprechenden Punkte und e, f; e', f' die Schnittpunkte von ab, cd; ad, bc und $a'b', c'd'$; $a'd', b'c'$ respective, die einander gleichfalls entsprechen, so bestimmt ein beliebiger Punkt p des einen Systems an den Scheiteln e, f die vierten Strahlen der Büschel $\{e\,.\,acfp\}$, $\{f\,.\,acep\}$, welche mit den durch den entsprechenden Punkt p' des andern Systems an den Scheiteln e', f' bestimmten Büscheln projectivisch sind; daraus erhält man die lineare Construction der Strahlen $e'p'$, $f'p'$ (Art. 300) und damit den Punkt p'. Ebenso bestimmt sich eine Gerade, die einer gegebenen Geraden des andern Systems entspricht.

Aufg. Wenn x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Seiten der Dreiecke abc, $a'b'c'$ bezeichnen, auf welche als Fundamentaldreiecke die beiden Systeme bezogen sind, so entsprechen den Büscheln aus den entsprechenden Ecken $x_1 + \lambda x_2 = 0$, $y_1 + \lambda y_2 = 0$; $x_2 + \mu x_3 = 0$, $y_2 + \mu y_3 = 0$; $x_3 + \nu x_1 = 0$, $y_3 + \nu y_1 = 0$ die Kegelschnitte $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, $x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0$, $x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0$ als Orte der Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen. Diese enthalten respective die Schnittpunkte von $bc, b'c'$; $ca, c'a'$; $cd, c'd'$ und die Punkte c, c'; die von $ca, c'a'$; $ab, a'b'$; $ad, a'd'$ und a, a'; von $ab, a'b'$; $bc, b'c'$; $bd, b'd'$ und b, b'. Sie sind dadurch bestimmt und jeder Punkt p', welcher dem p entspricht, lässt sich mit Hilfe derselben linear bestimmen wie vorher.

Diese drei Kegelschnitte besitzen drei allen gemeinsame Schnittpunkte, denn die Gleichung eines jeden unter ihnen ist eine Folge der Gleichungen der beiden andern; und jeder von ihnen hat mit einem zweiten von ihnen einen Schnittpunkt gemein, den der dritte nicht enthält; die Punkte $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$, $x_3 = y_3 = 0$ gehören respective nur je dem dritten und ersten, ersten und zweiten, zweiten und dritten dieser Kegelschnitte an. Diese drei Punkte fallen mit ihren entsprechenden zusammen und ebenso die geraden Verbindungslinien derselben.

377. Wenn die cubische Gleichung des Art. 374 oder

$$\mu^3 - \mu^2(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) + \mu\{R_{11} + R_{22} + R_{33}\} - R = 0$$

(für R als Determinante der Substitution und R_{ii} als die dem Element α_{ii} entsprechende Unterdeterminante derselben) in μ zwei gleiche Wurzeln hat, so fallen zwei von den Eckpunkten des sich selbst entsprechenden Dreiecks und somit auch zwei von seinen Seiten zusammen und bilden eine Doppelecke und eine Doppelseite; das eine der beiden im vorigen Artikel erwähnten Kegelschnittssysteme geht durch die Einzelecke und berührt die Einzelseite in den vereinigten Punkten, das andere aber berührt die Einzelseite und berührt die Doppelseite im Doppeleckpunkte.

Wenn überdiess für die Doppelwurzel $\mu_1 = \mu_2 = m$ die Unter-

determinanten von D verschwinden, so wird die Lage des betreffenden Doppelpunktes unbestimmt (vergl. Art. 325); es giebt dann nach dem Werthe der ungleichen Wurzel von $D=0$ einen einzelnen sich selbst entsprechenden Punkt und ausser ihm unendlich viele andere, welche die einzige Seite des sich selbst entsprechenden Dreiecks bilden. Ausser dieser aber existiren unzählig viele sich selbst entsprechende Gerade des Systems, welche ein Strahlbüschel aus dem festen Eckpunkte bilden. Man kann dann setzen

$$\begin{aligned} \alpha_{11}-m &= p_1 a_1, & \alpha_{21} &= p_2 a_1, & \alpha_{31} &= p_3 a_1, \\ \alpha_{12} &= p_1 a_2, & \alpha_{22}-m &= p_2 a_2, & \alpha_{32} &= p_3 a_2, \\ \alpha_{13} &= p_1 a_3, & \alpha_{23} &= p_2 a_3, & \alpha_{33}-m &= p_3 a_3 \end{aligned}$$

und die Transformationsformeln werden

$$\begin{aligned} \mu y_1 &= m x_1 + p_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3), & \varrho\xi_1 &= m\eta_1 + a_1(p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + p_3\eta_3), \\ \mu y_2 &= m x_2 + p_2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3), & \varrho\xi_2 &= m\eta_2 + a_2(p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + p_3\eta_3), \\ \mu y_3 &= m x_3 + p_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3), & \varrho\xi_3 &= m\eta_3 + a_3(p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + p_3\eta_3). \end{aligned}$$

Die Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ ist die Gleichung der sich Punkt für Punkt selbst entsprechenden Geraden und $p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + p_3\eta_3 = 0$ die Gleichung des Scheitels des sich selbst entsprechenden Büschels.

Die so auf einander bezogenen collinearen Systeme bezeichnet man als in collinearer (perspectivischer) Lage und nennt die Punkt für Punkt sich selbst entsprechende Gerade die Axe und den Scheitel des sich selbst entsprechenden Strahlbüschels das Centrum der Collineation.

Da jeder Punkt der Collineationsaxe sich selbst entspricht, so schneiden sich entsprechende Gerade der collinearen Systeme in ihr und jeder ihrer Punkte ist der Scheitel von zwei projectivischen Strahlbüscheln, deren Doppelstrahlen die Axe der Collineation und der nach dem Centrum derselben gehende Strahl sind; in Folge dessen bestimmt jedes Paar von entsprechenden Geraden mit der Collineationsaxe und dem nach dem Centrum gehenden Strahl ein Büschel von unveränderlichem Doppelverhältniss. (Art. 299.) Und da jeder Strahl aus dem Centrum sich selbst entspricht, so liegen entsprechende Punkte der collinearen Systeme mit dem Centrum in einer Geraden und jeder das Centrum enthaltende Strahl ist somit der Träger von zwei projectivischen Reihen, deren Doppelpunkte das Centrum selbst und der Durchschnittspunkt mit der Collineationsaxe sind; in Folge dessen bestimmt jedes Paar entsprechender Punkte mit dem Centrum und

dem Schnittpunkt seines Trägers mit der Axe eine Reihe von constantem Doppelverhältniss.

Wenn diese projectivischen Doppelreihen oder Büschel in Involution sind, so entsprechen die Punkte und Geraden beider Systeme einander vertauschungsfähig, d. i. jedem Element des ebenen Systems entspricht das nämliche andere, ob man es zu dem einen oder dem andern der zwei collinearen Systeme rechnet; dann ist der constante Werth jener Doppelverhältnisse gleich -1.

Mit den aus obigen Substitutionsgleichungen hervorgehenden Relationen

$$\mu(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3)=(m+a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3)\,(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3),$$
$$\varrho\,(p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3)=(m+a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3)\,(p_1\eta_1+p_2\eta_2+p_3\eta_3),$$

oder auch nach den Zerlegungen, welche die Determinante der Substitution, die der gemeinschaftliche Nenner der Auflösungen nach x_i ist, und die Zähler dieser Werthe (Art. 76) im vorausgesetzten Falle erlauben, erhält man

$$m\,(m+P)\,x_1=\mu(m+P)\,y_1-\mu p_1\,(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3),$$
$$m\,(m+P)\,x_2=\mu(m+P)\,y_2-\mu p_2\,(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3),$$
$$m\,(m+P)\,x_3=\mu(m+P)\,y_3-\mu p_3\,(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3);$$

mit den entsprechenden Werthen der η für $P=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3$;

$$m\,(m+P)\,\eta_1=\varrho(m+P)\,\xi_1-\varrho\,a_1\,(p_1\xi_1+p_2\xi_2+p_3\xi_3),\ \text{etc.}$$

Das vertauschbare Entsprechen findet daher statt für

$$m+P=-m \quad\text{oder}\quad 2m=-P=-(a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3).$$

378. Je zwei collinearverwandte Systeme können im Allgemeinen immer durch Parallelverschiebung und Drehung in ihrer Ebene in collineare Lage gebracht werden. Denken wir x, y als rechtwinklige Coordinaten und für die Coordinaten des zweiten Systems die allgemeinsten Substitutionsformeln für rechtwinklige Coordinaten gesetzt, so erhalten wir allgemein

$$\mu\,(a+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},$$
$$\mu\,(b+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23},$$
$$\mu\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=a_{31}x+a_{32}y+a_{33};$$

und damit für $x=x'$, $y=y'$ alle Unterdeterminanten von D verschwinden, müssen die Bedingungen erfüllt sein

$$a_{11}-m\cos\varphi=\sigma p\alpha,\quad a_{21}-m\sin\varphi=\sigma q\alpha,\quad a_{31}=\sigma\alpha,$$
$$a_{12}+m\sin\varphi=\sigma p\beta,\quad a_{22}-m\cos\varphi=\sigma q\beta,\quad a_{32}=\sigma\beta,$$
$$a_{13}-ma=\sigma p;\quad a_{23}-mb=\sigma q;\quad a_{33}-m=\sigma.$$

Hier ergeben sich aus den Gleichungen der letzten Zeile die Grössen σ, a, b, wenn m, p, q gefunden sind. Aus den Glei-

chungen der ersten beiden Zeilen folgen

$$m\,(a_{32}\cos\varphi + a_{31}\sin\varphi) = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31},$$
$$m\,(a_{32}\sin\varphi - a_{31}\cos\varphi) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

somit $m^2 = \dfrac{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})^2 + (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})^2}{a_{32}^2 + a_{31}^2}$. Mit Hilfe des m lassen sich dann p, q, α, β linear ausdrücken, nämlich

$$m\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{32}^2 - (a_{12} + a_{21})\,a_{32}a_{31} + a_{22}a_{31}^2}{a_{32}^2 + a_{31}^2},$$

$$m\sin\varphi = \frac{(a_{11} - a_{22})\,a_{31}a_{32} - a_{12}a_{31}^2 + a_{21}a_{32}^2}{a_{32}^2 + a_{31}^2};$$

$$p = \frac{(a_{11} - a_{22})\,a_{31} + (a_{12} + a_{21})\,a_{32}}{a_{32}^2 + a_{31}^2},\quad \alpha = \frac{a_{31}}{a_{33} - m},$$

$$q = \frac{(a_{22} - a_{11})\,a_{32} + (a_{12} + a_{21})\,a_{31}}{a_{32}^2 + a_{31}^2},\quad \beta = \frac{a_{32}}{a_{33} - m}.$$

Die Ueberführung collinearer Systeme in collineare Lage ist daher im Allgemeinen in doppelter Weise möglich. Für beide ist das Collineationscentrum das nämliche, denn seine in Bezug auf das alte System genommenen Coordinaten p und q hängen nur von $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$ ab; die Collineationsaxen, deren Coordinaten durch α, β bezeichnet sind, haben einerlei Richtung, weil $\alpha : \beta = a_{31} : a_{32}$ von m unabhängig ist.

Für den speciellen Fall $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$ liegt die Collineationsaxe in unendlicher Entfernung und die Ueberführung in collineare Lage ist unbestimmt; die Systeme hatten dann schon vorher eine Doppellinie in unendlicher Ferne, d. h. ihre entsprechenden Linien waren parallel. (Aehnlichkeit.)

Aufg. 1. Zwei beliebige Kegelschnitte bestimmen zwei collineare Systeme, für welche das gemeinsame harmonische System das Dreieck der sich selbst entsprechenden Punkte und Geraden ist. Denn man kann durch zwei beliebige Punkte einen Kegelschnitt legen, für welchen ein gegebenes Dreieck ein harmonisches System ist und dasselbe ist dann gleichzeitig für den dem ersten collinear entsprechenden Kegelschnitt ein harmonisches System. Ebenso für zwei beliebige Gerade als Tangenten, etc.

Aufg. 2. Den unendlich entfernten Punkten des einen von zwei collinearen Systemen entsprechen Punkte einer geraden Linie des andern und wenn beide Systeme in collineare Lage gebracht werden, so sind diese Geraden — man hat sie Gegenaxen der Systeme genannt (vergl. Kap. XXIV) — unter sich und zur Collineationsaxe parallel. Die Punkte einer jeden bestimmen mit dem Centrum die Richtungen der entsprechenden Geraden des andern Systems.

Aufg. 3. Man soll die Möglichkeit der Ueberführung collinearer

Systeme in centrale Lage geometrisch beweisen. Da Kreise, die dem ebenen System angehören, durch blosse Lagenveränderung ihre Gestalt und Natur nicht ändern, oder auch, da die metrischen Relationen dabei ungestört bleiben, so verändern sich bei der gedachten Transformation die imaginären Kreispunkte im Unendlichen nicht. Nennen wir sie ω_1, ω_2 und entsprechen ihnen in dem andern Systeme, dessen Lage nicht verändert wird, Punkte ω_1', ω_2', so kann das Centrum der Collineation nur der Punkt C sein, in welchem die geraden Linien $\omega_1\omega_1'$, $\omega_2\omega_2'$ sich schneiden und wenn ihm im ersten System der Punkt C' entspricht, so haben wir zum Vollzug der Transformation C mit C' zusammenzulegen und dann durch Drehung um den vereinigten Punkt ein beliebiges Paar entsprechende Punkte a, a' mit ihm in eine Gerade zu bringen. Dann liegt jedes andere Paar entsprechender Punkte b, b' auch in einer durch C gehenden Geraden; denn die Doppelverhältnisse der beiden Büschel $(C\,.\,\omega_1\,\omega_2\,a\,b)$ und $(C\,.\,\omega_1'\,\omega_2'\,a'\,b')$, welche drei correspondirende gemeinschaftliche Strahlenpaare haben, sind einander gleich.

Aufg. 4. Man erkläre daraus den Fall der Unbestimmtheit der Transformation.

Aufg. 5. Die Gegenaxen bestimmen auf jedem Strahl aus dem Centrum Punkte von bestimmtem Theilverhältniss für die Strecke zwischen Centrum und Axe. Wann fallen die Gegenaxen zusammen? Wann liegen die Gegenaxen äquidistant vom Collineationscentrum?

Aufg. 6. Man charakterisire den Fall, in welchem das Collineationscentrum unendlich entfernt liegt. (Affinität.)

379. Aber die linearen Substitutionen liefern noch eine andere ebenso allgemeine Verwandtschaft zwischen ebenen Systemen, nämlich zwischen einem ebenen System von Punkten und einem solchen von Geraden. Die Substitutionsgleichungen
$\mu\eta_1' = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3$, $\mu\eta_2' = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3$, $\mu\eta_3' = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$ entsprechen ihr und bedingen, dass jedem Punkte x des ersten Systems eine Gerade η' des andern entspricht und umgekehrt, jedem Punkte x' des andern eine Gerade η des ersten, welche mit ihm durch die transponirten Substitutionen $\varrho\eta_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2' + \alpha_{31}x_3'$, $\varrho\eta_2 = \alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{32}x_3'$, $\varrho\eta_3 = \alpha_{13}x_1' + \alpha_{23}x_2' + \alpha_{33}x_3'$ verbunden ist.

Diese Verwandtschaft wird als Reciprocität bezeichnet und man sieht leicht, dass den Punktreihen des einen Systems Strahlbüschel des andern entsprechen, welche zu ihnen projectivisch sind, dass vier Paar entsprechender Elemente die Beziehung vollständig bestimmen und dass zwei Systeme, die mit einem und demselben dritten in Reciprocität stehen, zu einander collinear sind.

Wenn beide Systeme in derselben Ebene liegen, so giebt es Punkte x, die auf den ihnen entsprechenden Geraden η', und

Punkte x', welche in den entsprechenden Geraden η liegen; man drückt dieselben analytisch aus, indem man mit der ersten Gruppe der Substitutionsformeln die Relation $\eta_1'x_1 + \eta_2'x_2 + \eta_3'x_3 = 0$ oder mit der zweiten die analoge $\eta_1 x_1' + \eta_2 x_2' + \eta_3 x_3' = 0$ verbindet. In beiden Fällen umhüllen die Geraden den Kegelschnitt, welchen die Gleichung $\begin{vmatrix} 0, & \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \xi_1, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \xi_2, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \xi_3, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$ darstellt und die Punkte liegen auf dem andern Kegelschnitt, dessen Gleichung ist

$$\alpha_{11} y_1^2 + \alpha_{22} y_2^2 + \alpha_{33} y_3^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\, y_1 y_2 + \text{etc.} = 0.$$

Man nennt diese Kegelschnitte die Ordnungscurven von zwei in derselben Ebene gelegenen reciproken Systemen.

Mit Hilfe jener Enveloppe und dieses Ortes übersieht man leicht den Zusammenhang entsprechender Elemente; einem Punkte jenes Ortes entspricht die eine oder die andere der von ihm an diese Enveloppe gehenden Tangenten, jenachdem man ihn als dem ersten oder zweiten System angehörig betrachtet, und jeder Tangente der Enveloppe entspricht der eine oder der andere von ihren Durchschnittspunkten mit dem Orte, jenachdem man sie als dem einen oder andern System angehörig ansieht. Und um die Gerade zu bestimmen, die einem beliebigen Punkte in der Ebene des Systems entspricht, zieht man von ihm an jene Enveloppe die Tangenten, bestimmt ihre Schnittpunkte mit dem Orte und erhält in dem Paare ihrer Verbindungslinien die Geraden, die dem Punkte entsprechen, jenachdem man ihn zum ersten oder zweiten System rechnet; um den einer gegebenen Geraden entsprechenden Punkt zu finden, bestimmt man ihre Schnittpunkte mit dem Orte und zieht von diesen die Tangenten an die Enveloppe; das andere Paar ihrer Schnittpunkte entspricht der Geraden je nach der einen oder andern Voraussetzung.

Die beiden Ordnungscurven sind mit einander in doppelter Berührung. Denn für einen Schnittpunkt derselben fallen beide ihm entsprechende Gerade mit der entsprechenden Tangente der Enveloppe zusammen und es müssen daher auch, damit nicht einer Geraden zwei Punkte entsprechen, was unmöglich ist, — die Schnittpunkte dieser Tangente mit dem Orte zusammenfallen, d. h. dieselbe berührt den Ort und die Enveloppe in ihrem gemeinschaftlichen Punkte; ihre vier Schnittpunkte vereinigen sich daher

in zwei Berührungspunkte. In Folge dieses Zusammenhangs entfällt auch die scheinbare Zweideutigkeit der vorher gegebenen Construction.

380. Es kann geschehen, dass die beiden Ordnungscurven des Systems in einen einzigen Kegelschnitt zusammenfallen, so dass die seinen Punkten entsprechenden Geraden die Tangenten desselben in ihnen und die seinen Tangenten entsprechenden Punkte eben die Berührungspunkte derselben sind. Diess ist der Fall, wenn unter den Coefficienten der Substitution die Relation $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ besteht oder die Determinante derselben symmetrisch ist; denn dann fallen x, x' und η, η' zusammen oder jede Tangente des einen Kegelschnitts berührt auch den andern und jeder Punkt des einen liegt auf dem andern. Dann ist auch die Determinante der Gleichung der Enveloppe die zugeordnete Form von der Gleichung des Ortes $\alpha_{11}y_1^2 + \alpha_{22}y_2^2 + \alpha_{33}y_3^2 + 2\alpha_{23}y_2y_3 + \text{etc.} = 0$. Jedem Punkte des Systems entspricht nach der Construction des vorigen Art. seine in Bezug auf den Kegelschnitt genommene Polare, jeder Geraden desselben ebenso ihr in Bezug auf den Kegelschnitt genommener Pol. Man hat darum für diesen Fall den bezeichneten Kegelschnitt als die Directrix der Reciprocität und den Zusammenhang der verwandten Systeme als P o l a r r e c i p r o c i t ä t benannt und wir werden im folgenden Kapitel ausführlich auf diese Beziehung und ihren Werth als Untersuchungsmethode eingehen.

Hierher gehört noch der Nachweis, dass durch Verschiebung und Drehung des einen von zwei in der Verwandtschaft der Reciprocität stehenden Systemen beide in die der Polarreciprocität entsprechende specielle Lage gebracht werden können. Bezieht man die erste Gruppe der Substitutionsformeln des vorigen Art. auf rechtwinklige Coordinaten und setzt für x, y die allgemeinsten Ausdrücke einer rechtwinkligen Coordinatentransformation, so wird

$$\mu\xi = a_{11}(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a_{12}(b + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + a_{13},$$
$$\mu\eta = a_{21}(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a_{22}(b + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + a_{23},$$
$$\mu\zeta = a_{31}(a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a_{32}(b + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + a_{33}.$$

Man hat also nur a, b, φ so zu bestimmen, dass gleichzeitig

$$-a_{11}\sin\varphi + a_{12}\cos\varphi = a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi,$$
$$a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = a_{31}\sin\varphi + a_{32}\sin\varphi,$$
$$a_{21}a + a_{22}b + a_{23} = -a_{31}\sin\varphi + a_{32}\cos\varphi$$

sind. Die erste dieser Gleichungen liefert zwei Werthe von φ, die andern bestimmen sodann a, b in linearer Weise.

Geometrisch betrachtet, wird diese Transformation auf folgende Weise geschehen können: Man bestimmt zuerst in jedem der Systeme den Punkt, welcher der unendlich fernen Geraden als einer Geraden des andern Systems entspricht und bringt diese beiden Punkte zur Deckung; denn die unendlich entfernte Gerade wird durch keine Lagenveränderung des Systems verändert. Dieser Punkt muss der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Ordnungscurven sein, die, weil sie in doppelter Berührung bleiben müssen, zu ähnlichen und concentrischen Kegelschnitten werden. (Vergl. Art. 276.) Man hat nun noch ferner das eine der beiden reciproken Systeme so um das gemeinsame Centrum zu drehen, dass die einem beliebigen unendlich entfernten Punkte entsprechende Gerade die nämliche ist, ob man denselben zum einen oder zum andern System zählt; dann würde dasselbe für jeden unendlich fernen Punkt gelten, auf Grund der Projectivität der einander entsprechenden Reihen und Büschel. Und da die Kreispunkte der Ebene bei jeder Drehung des Systems unverändert bleiben, so sind die Polaren eines dieser Punkte zum Zusammenfallen zu bringen und die Transformation ist vollendet.

Aufg. 1. Die Geraden, welche den unendlich entfernten Punkten im einen wie im andern System entsprechen, bilden zwei zu einander projectivische Büschel von Durchmessern, in denen je zwei einander entsprechen, von denen der eine dem unendlich fernen Punkte des andern entspricht; ihre Scheitel sind die Mittelpunkte der Systeme. Die den Punkten eines Durchmessers entsprechenden Geraden sind einander parallel und einer Schaar von Parallelen entsprechen Punkte auf einerlei Durchmesser. Unter den Durchmessern zweier reciproken Systeme giebt es im Allgemeinen nur ein Paar, welche zu einander rechtwinklig sind und denen ein Paar rechtwinklige conjugirte entsprechen.

Aufg. 2. Die Polaren der Punkte eines Kegelschnitts sind die Tangenten eines andern Kegelschnitts.

Aufg. 3. Man soll für die concentrische Lage beider Systeme den Drehungswinkel berechnen, welcher der Transformation des Textes entspricht. Die Polaren eines beliebigen Punktes sind bei rechtwinkligen Coordinaten aus dem gemeinschaftlichen Anfangspunkt durch

$$(a_{11}x' + a_{12}y')\,x + (a_{21}x' + a_{22}y')\,y + a_{33} = 0,$$
$$(a_{11}x' + a_{21}y')\,x + (a_{12}x' + a_{22}y')\,y + a_{33} = 0$$

und daher für den unendlich fernen Punkt $y' = ix'$ durch

$$(a_{11} + ia_{12})\,x + (a_{21} + ia_{22})\,y + a_{33} = 0,$$
$$(a_{11} + ia_{21})\,x + (a_{12} + ia_{22})\,y + a_{33} = 0$$

dargestellt und der Winkel dieser letzteren ist durch den Ausdruck

$$\tan\theta = \frac{a_{12} - a_{21}}{a_{11} + a_{22}} \text{ bestimmt. (Art. 25.)}$$

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Von der Methode der reciproken Polaren.

381. Vor der Zeit, in welcher durch Möbius und Plücker das Princip der Dualität in seiner Allgemeinheit erkannt und ehe von Möbius die allgemeine Theorie der geometrischen Verwandtschaften aufgestellt ward, waren durch Poncelet zwei Methoden in die Wissenschaft eingeführt worden, welche jene allgemeinere Auffassung vorbereiteten und sie in ihren Anwendungen zum Theil ersetzten. Ihres Werthes wegen und nach dem historischen Interesse, das sich an sie knüpft, schliessen wir einen Abriss derselben hier an. Zuerst von der Methode der reciproken Polaren, welche die Lehre von der Verwandtschaft der Reciprocität und von dem Dualismus geometrischer Wahrheiten anticipirte. Ihre Ergebnisse sind natürlich in denen dieser allgemeineren Theorien als Specialisirungen enthalten.

Wenn man in Bezug auf einen festen Kegelschnitt Σ von jeder Tangente einer Curve S den Pol bildet, so ist der Ort der Pole von S eine Curve s, welche die **Polarcurve von S in Bezug auf Σ** genannt wird, während man den Kegelschnitt Σ als den Hilfskegelschnitt bezeichnet. (Vergl. Art. 380.) Wir wollen abkürzend sagen, ein Punkt entspreche einer Geraden, um auszudrücken, dass er der Pol dieser Geraden in Bezug auf Σ ist; darin ist die Aussage begründet, dass jeder Punkt von s einer Tangente von S entspricht. In der 13. Aufg. des Art. 233 ist bereits der wichtige Specialfall davon bewiesen worden, wonach die Polarcurve eines Kegelschnitts in Bezug auf einen andern Kegelschnitt ein Kegelschnitt ist.

Der Durchschnittspunkt von zwei Tangenten von S entspricht der geraden Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von s.

Diess folgt aus der Eigenschaft des Kegelschnitts Σ, nach welcher der Durchschnittspunkt von zwei geraden Linien der Pol der Verbindungslinie ihrer Pole ist. (Art. 108.)

Wenn man insbesondere voraussetzt, dass die beiden betrachteten Tangenten der Curve S einander unendlich nahe sind, so

liegen auch die entsprechenden Punkte von s einander unendlich nahe und ihre Verbindungslinie ist daher eine Tangente von s. Und da zwei auf einander folgende Tangenten von S sich im Berührungspunkt schneiden, so erhält der letzte Satz die besondere Gestalt: Wenn eine Tangente von S einem Punkte in s entspricht, so entspricht der Berührungspunkt der ersteren der Tangente im letzteren. Die Beziehung der beiden Curven ist daher eine reciproke, d. h. die Curve S kann aus der Curve s genau in derselben Weise abgeleitet werden, in der s aus S erzeugt ward; diess bezeichnet die Benennung „reciproke Polaren".

382. Diesen Relationen gemäss kann man aus einem auf Lagenverhältnisse bezüglichen Satze über eine Curve S einen andern Satz bezüglich der entsprechenden Curve s ableiten. Wenn z. B. eine Anzahl von Punkten, die mit der Curve S in Verbindung stehen, in gerader Linie sind, so gehen hiernach die entsprechenden Geraden, welche mit der Curve s verbunden sind, durch einen Punkt und umgekehrt (Art. 108); wenn eine mit der Figur S vereinigte Anzahl von Punkten in einem Kegelschnitt liegt, so berühren die ihnen entsprechenden Geraden die Polarcurve dieses Kegelschnitts in Bezug auf Σ; und allgemein, wenn der Ort eines mit S irgendwie verbundenen Punktes eine Curve S' ist, so ist die Enveloppe der entsprechenden mit s verbundenen Geraden die reciproke Polare s' von S'.

Die Ordnung der Polarreciproken einer Curve ist der Classe der Curve gleich (Art. 77), d. h. gleich der Zahl der Tangenten, welche von irgend einem Punkte an dieselbe gezogen werden können. Denn die Ordnung von s ist gleich der Anzahl der Punkte, in welchen eine beliebige Gerade die Curve s schneidet und denselben entspricht in der reciproken Figur S die gleiche Anzahl der Tangenten von S, welche durch den jener Geraden entsprechenden Punkt gehen. So können, wenn S ein Kegelschnitt ist, an diesen nur zwei reelle oder imaginäre Tangenten von irgend einem Punkte aus gezogen werden (Art. 106) und in Folge dessen schneidet eine beliebige Gerade die Curve s nur in zwei reellen oder imaginären Punkten, d. h. die Polarreciproke eines Kegelschnitts ist eine Curve zweiter Ordnung. Einige Beispiele werden zeigen, wie in dem Falle zweier Kegelschnitte mittelst dieser Methode aus einem bekannten Satze ein neuer abgeleitet werden kann. Nach Art. 281 gehen die Verbindungslinien

der drei Paare von Gegenecken in jedem einem Kegelschnitt S umgeschriebenen Sechsseit durch einen Punkt. Daraus folgt, dass in einem dem Kegelschnitt s eingeschriebenen Sechseck die Durchschnittspunkte der drei Paare von Gegenseiten in einer geraden Linie liegen. (Art. 284.) So ergiebt sich der Pascal'sche aus dem Brianchon'schen Satze auch durch die Theorie der reciproken Polaren, ganz so wie nach dem allgemeinen Princip der Dualität.

Durch die Nebeneinanderstellung einiger Sätze mit ihren Reciproken soll im Folgenden Gelegenheit zur Anwendung und Uebung dieser Methode gegeben werden; die Operation der Bildung des reciproken Satzes wird sich als ein rein mechanischer Process der Vertauschung von Worten wie Punkt und Linie, eingeschrieben und umgeschrieben, Ort und Enveloppe, etc. erweisen.

1. Wenn zwei Ecken eines Dreiecks sich auf festen geraden Linien bewegen, während die Seiten sich um feste Punkte drehen, so ist der Ort der dritten Ecke ein Kegelschnitt. (Art. 285, Aufg. 3.)

2. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks durch feste Punkte gehen, während die Ecken sich in festen geraden Linien bewegen, so ist die Enveloppe der dritten Seite ein Kegelschnitt.

3. Der bezeichnete Ort ist eine gerade Linie, wenn die festen Punkte der Seiten in einer geraden Linie liegen. (Art. 47, Aufg. 2.)

4. Die bezeichnete Enveloppe ist ein Punkt, wenn die festen geraden Linien der Ecken in einem Punkte zusammenlaufen.

5. In welchem andern Falle wird derselbe Ort zur geraden Linie? (Art. 47, Aufg. 3.)

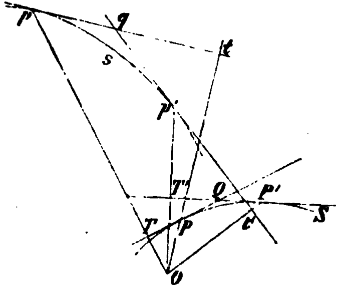
6. In welchem andern Falle wird dieselbe Enveloppe zum Punkt? (Art. 50, Aufg. 3.)

Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so berühren sich auch die Reciproken derselben; denn da die ersteren einen Punkt und die zugehörige Tangente gemein haben, so müssen die letztern eine Tangente und den zugehörigen Berührungspunkt gemein haben. Ebenso: Wenn zwei Kegelschnitte mit einander in doppelter Berührung sind, so sind es auch ihre Reciproken. (Vergl. Art. 359.)

7. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt umgeschrieben bleibt und zwei seiner Ecken in festen geraden Linien fortschreiten, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (Art. 307, Aufg. 4.)

8. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben bleibt und zwei von seinen Seiten sich um feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Ecke einen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (Art. 307, Aufg. 5.)

383. Wir haben im Art. 381 bewiesen, dass, wenn zwei Punkte P, P' in S den Tangenten pt, $p't'$ an s entsprechen, auch die Tangenten in P und P' den Berührungspunkten p, p' entsprechen



und dass somit der Durchschnittspunkt Q derselben der Berührungssehne der letzten pp' entspricht. Wir schliessen daraus, dass einem Punkte Q und seiner Polare PP' in Bezug auf S eine gerade Linie pp' und ihr Pol q in Bezug auf s entspricht.

1. Wenn von einem Kegelschnitt zwei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte dieser Tangenten durch einen oder den andern von zwei festen Punkten. (Art. 317, Aufg. 1.)

2. Wenn von einem Kegelschnitt zwei Tangenten und zwei Punkte gegeben sind, so liegt der Durchschnittspunkt der Tangenten in diesen Punkten stets auf der einen oder der andern von zwei festen Geraden.

3. Die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf alle demselben Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte bilden ein Strahlbüschel. (Art. 114, Aufg. 2.)

4. Die Pole einer festen Geraden in Bezug auf alle demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine geradlinige Punktreihe.

5. Der Ort des Pols einer festen geraden Linie in Bezug auf alle durch dieselben vier Punkte gehende Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt. (Art. 309, Aufg. 1.)

6. Die Enveloppe der Polare eines festen Punktes in Bezug auf alle dieselben vier geraden Linien berührende Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt.

7. Die drei geraden Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den entsprechenden Ecken seines in Bezug auf einen Kegelschnitt gebildeten Polardreiecks verbinden, gehen durch einen Punkt. (Art. 130, 309, Aufg. 5; Art. 351.)

8. Die drei Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten eines Dreiecks und seines in Bezug auf einen Kegelschnitt gebildeten Polardreiecks liegen in einer geraden Linie. (Art. 351.)

9. Man soll einem Kegelschnitt ein Dreieck einbeschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. (Art. 307, Aufg. 6.)

10. Man soll einem Kegelschnitt ein Dreieck umschreiben, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen.

384. Wenn zwei Kegelschnitte S und S' und ihre Reciproken s und s' gegeben sind, so entsprechen den vier Punkten A, B, C, D, welche die ersten (S, S') mit einander gemein haben, die vier Tangenten a, b, c, d, welche den letztern (s, s') gemeinschaftlich sind und den sechs Sehnen AB, CD; AC, BD; AD, BC, welche jene Durchschnittspunkte mit einander verbinden, die sechs Schnitt-

punkte ab, cd; ac, bd; ad, bc dieser gemeinschaftlichen Tangenten.

1. Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Tangenten haben oder wenn sie alle mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so gehen die sechs Durchschnittssehnen derselben viermal zu je dreien durch einen Punkt. (Art. 280.) Man darf diese Punkte als die vier Radicalcentra der drei Kegelschnitte bezeichnen, welche denselben vierten Kegelschnitt doppelt berühren.

2. Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Punkte haben oder wenn sie alle mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so liegen die sechs Durchschnittspunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten viermal zu je dreien in einer Geraden. Man kann diese Geraden als die vier Aehnlichkeitsaxen der drei Kegelschnitte benennen, welche denselben vierten Kegelschnitt doppelt berühren. (Vergl. Art. 147, wovon diess eine Erweiterung ist.)

3. Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so schneiden sich die Tangenten derselben in den Endpunkten einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne in der gemeinschaftlichen Sehne der Kegelschnitte.

4. Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so gehen die Verbindungslinien der Berührungspunkte ihrer Tangenten aus einem Punkte ihrer gemeinsamen Tangente durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte.

5. Wenn man durch einen Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte zwei beliebige Sehnen zieht, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einer oder der andern von den gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte. (Art. 307, Aufg. 3.)

6. Wenn man in einer gemeinschaftlichen Sehne zweier Kegelschnitte zwei Punkte wählt, so liegen die Durchschnittspunkte der von ihnen ausgehenden Tangenten in geraden Linien, welche durch einen oder den anderen von den Schnittpunkten der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte gehen.

7. Wenn die Kegelschnitte A und B beide mit dem Kegelschnitt S in doppelter Berührung sind, so schneiden sich ihre Berührungssehnen mit S und ihre Durchschnittssehnen mit einander in einem Punkte und bilden ein harmonisches Büschel. (Art. 279.)

8. Wenn die Kegelschnitte A und B mit dem Kegelschnitt S in doppelter Berührung sind, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer respective mit S gemeinschaftlichen Tangenten und die der Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in einer geraden Linie und bilden eine harmonische Reihe. (Art. 319, Aufg. 1.)

9. Wenn die Kegelschnitte A, B, C den Kegelschnitt S je doppelt und überdiess A und B beide C einfach berühren, so schneiden sich die Tangenten in den Berührungspunkten in

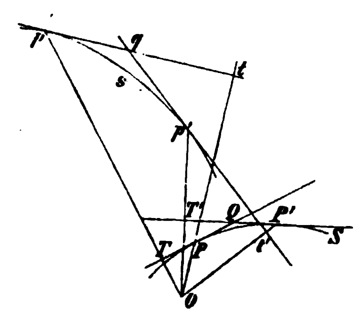
10. Wenn die Kegelschnitte A, B, C den Kegelschnitt S je doppelt und überdiess A und B beide C einfach berühren, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch

einer gemeinschaftlichen Sehne von A und B. | einen Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von A und B.

Von den vorigen Sätzen aus gelangt man ganz wie im Art. 151 von denen, welche ihnen in der Theorie von drei Kreisen entsprechen, zur geometrischen Auflösung des Problems, welches dem des Apollonius bei den Kegelschnitten analog ist: Zu drei demselben Kegelschnitt eingeschriebenen Kegelschnitten denjenigen vierten zu bestimmen, der gleichfalls diesem eingeschrieben ist. Man erhält dieselbe Auflösung, welche wir in der Aufg. 1 des Art. 359 analytisch entwickelt haben.

385. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass der Hilfskegelschnitt Σ ein vollkommen beliebiger Kegelschnitt sei; man pflegt denselben jedoch zumeist als einen Kreis anzunehmen und wir wollen darum im Folgenden überall, wo von Polarcurven ohne weiteren Beisatz die Rede ist, Polarcurven in Bezug auf einen Kreis verstanden denken.

Wir wissen aus Art. 121, dass die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis zur Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Centrum normal ist und dass das Product der Entfernungen des Punktes und seiner Polare dem Quadrat des Radius gleich ist. Darnach lässt sich die Relation zwischen Polarcurven in Bezug auf einen Kreis wie folgt aussprechen: Wenn man von einem gegebenen Punkte O auf eine jede Tangente der Curve S eine Normale OT fällt und sie so weit verlängert, dass

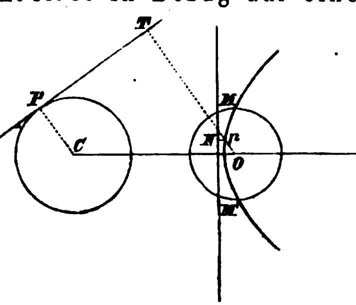


das Rechteck der Segmente $OT \,.\, Op$ einen constanten Werth k^2 erhält, so ist der Ort der Punkte p eine Curve s, welche die reciproke Polare von S genannt wird. Denn diess ist mit der Bestimmung gleichbedeutend, dass p der Pol von PT in Bezug auf einen Kreis vom Centrum O und Radius k ist. Die Tangente pt entspricht daher nach Art. 381 dem Berührungspunkt P, d. h. OP ist rechtwinklig zu pt und $OP \,.\, Ot = k^2$.

Man findet, dass eine Veränderung der Grösse k zwar die Stelle, aber nicht die Form von s ändert, die in den meisten Fällen uns allein angeht. Darum kann in dieser Anschauungsweise von der Relation der Polarcurven die Beziehung auf den Kreis

sogar ganz unterdrückt werden und s kann als die **Reciproke** von S in **Bezug auf den Punkt** O bezeichnet werden, den man für diesen Fall als den **Ursprung** bezeichnet. Die mit der Anwendung des Kreises als Hilfskegelschnitt verbundenen Vortheile entspringen zumeist aus den beiden folgenden Sätzen, die aus dem bisher Gesagten hervorgehen und erlauben, dass man mit Hilfe dieser Methode ausser Sätzen über die Lage der Figuren auch solche transformire, welche metrische Relationen von Linien und Winkeln enthalten: Die Entfernung eines Punktes P vom Ursprung ist der reciproke Werth der Entfernung des Letzteren von der entsprechenden Geraden pt. Der von zwei beliebigen Geraden TQ, $T'Q$ eingeschlossene Winkel ist dem Winkel pOp' gleich, welchen die entsprechenden Punkte p, p' am Ursprung einschliessen; denn Op ist normal zu TQ und Op' auf $T'Q$.

Von der Anwendung dieser Principien folgen einige Beispiele, nachdem vorher das Problem untersucht worden ist: **Man soll die Polarreciproke eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis bestimmen**; d. h. den Ort des Pols p einer Tangente PT des Kreises (C) in Bezug auf den Kreis O ermitteln. Sei MN die Polare des Mittelpunktes von C in Bezug auf den Kreis aus O, so besteht für die Punkte C und p und ihre Polaren MN, PT nach



Art. 131 die Relation $OC : CP = Op : pN$ und zeigt nach der Constanz von OC und CP, dass die Distanz des Punktes p von O zu seiner Distanz von der Geraden MN in einem constanten Verhältniss $OC:CP$ ist; **der Ort von** p **ist daher ein Kegelschnitt, welcher** O **zum Brennpunkt,** MN **zur entsprechenden Directrix und die Excentricität** $OC:CP$ hat. Die Letztere ist demnach grösser oder kleiner als Eins, je nachdem O ausserhalb oder innerhalb des Kreises C ist, und sie ist gleich Eins, wenn der Punkt O in der Peripherie desselben liegt. Die reciproke Polare eines Kreises ist ein Kegelschnitt, der den Ursprung zum Brennpunkt und die dem Centrum entsprechende gerade Linie zur Directrix hat, und welcher eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem der Ur-

sprung innerhalb oder ausserhalb des Kreises oder auf demselben liegt.

Aufg. Wenn drei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemein haben, so liegen die Durchschnittspunkte der Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in einer geraden Linie. Denn für den gemeinschaftlichen Brennpunkt als Anfangspunkt sind die reciproken Curven, Kreise und die besagten Schnittpunkte zu den Radicalaxen derselben.

386. Hiernach machen wir zunächst von dem zweiten Satze des vorigen Artikels Gebrauch zur Ableitung einer Reihe von Eigenschaften, welche sich auf die Grösse von Winkeln beziehen.

Aus: 1. Zwei Tangenten eines Kreises machen mit ihrer Berührungssehne gleiche Winkel —

folgt 2. Die gerade Linie, welche vom Brennpunkt eines Kegelschnitts nach dem Durchschnittspunkt zweier Tangenten desselben gezogen wird, halbirt den Winkel, welchen ihre Berührungssehne am Brennpunkt spannt. (Art. 199)

Denn der Winkel zwischen einer Tangente PQ (Fig. p. 522) und der Berührungssehne PP' ist dem Winkel gleich, der am Brennpunkt von den entsprechenden Punkten p, q gespannt wird: ebenso ist der Winkel $QP'P$ dem von p' und q am Brennpunkte gespannten Winkel gleich, und wegen $QPP' = QP'P$ ist daher $pOq = p'Oq$.

Aus: 3. Jede Tangente eines Kreises ist senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Centrum —

4. Jeder Punkt eines Kegelschnitts fasst mit dem Durchschnittspunkt der ihm entsprechenden Tangente mit der Directrix am Brennpunkt einen rechten Winkel.

Wir erinnern dabei, dass die Directrix des Kegelschnitts dem Centrum des Kreises entspricht. Ebenso entsprechen sich die Paare von Sätzen:

5. Jede gerade Linie ist senkrecht zu der geraden Verbindungslinie ihres Pols mit dem Centrum des Kreises.

6. Jeder Punkt fasst mit dem Durchschnittspunkt seiner Polare mit der Directrix einen rechten Winkel am Brennpunkt.

7. Die gerade Linie, welche einen Punkt mit dem Centrum eines Kreises verbindet, macht mit den durch diesen Punkt an den Kreis gezogenen Tangenten gleiche Winkel.

8. Die gerade Verbindungslinie des Durchschnittspunktes einer Geraden und der Directrix mit dem Brennpunkt halbirt den Winkel zwischen den Radien vectoren der Punkte, in welchen die gegebene gerade Linie den Kegelschnitt schneidet.

9. Der Ort des Durchschnittspunk-

10. Die Enveloppe der Sehnen eines

tes derjenigen Tangenten eines Kreises, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein concentrischer Kreis.

Kegelschnitts, welche einen gegebenen Winkel am Brennpunkt spannen, ist ein Kegelschnitt von dem nämlichen Brennpunkt und derselben Directrix. (Art. 310, Aufg. 2.)

11. Die Enveloppe der Berührungssehnen derjenigen Tangenten eines Kreises, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, ist ein concentrischer Kreis.

12. Der Ort der Durchschnittspunkte der Tangenten eines Kegelschnitts, deren Berührungssehnen am Brennpunkt einen gegebenen Winkel spannen, ist ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkt und derselben Directrix.

13. Wenn man von einem festen Punkte an eine Reihe concentrischer Kreise Tangenten zieht, so ist der Ort der Berührungspunkte ein durch den festen Punkt und das gemeinschaftliche Centrum gehender Kreis.

14. Wenn eine feste gerade Linie eine Reihe von Kegelschnitten schneidet, die denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix haben, so ist die Enveloppe der in den Durchschnittspunkten an diese Kegelschnitte gelegten Tangenten ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkte, welcher sowohl die feste gerade Linie als die gemeinschaftliche Directrix berührt.

Wenn wir die gerade Linie in unendlicher Entfernung voraussetzen, so ergiebt sich als ein specieller Fall, dass die Enveloppe der Asymptoten aller derjenigen Hyperbeln, die denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix haben, eine Parabel ist, die denselben Brennpunkt hat und die gemeinschaftliche Directrix berührt.

15. Wenn durch einen Punkt eines Kreises zwei zu einander rechtwinklige Sehnen gezogen werden, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch das Centrum desselben.

16. Der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einander rechtwinklig durchschneiden, ist die Directrix.

Wir sagen „eine Parabel", weil die Polare des Kreises in Bezug auf den Punkt, von welchem die Sehnen ausgehen, als auf einen Punkt seiner Peripherie, eine Parabel ist. (Art. 385.)

17. Die Enveloppe einer Sehne im Kreise, welche an einem gegebenen Punkte seiner Peripherie einen vorgeschriebenen Winkel spannt, ist ein concentrischer Kreis.

18. Der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat.

19. Wenn die Basis und der Winkel an der Spitze eines Dreiecks gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein

20. Wenn von einem Dreieck zwei Seiten nach ihrer Lage und der von der Basis an einem bestimmten Punkte

Kreis, welcher durch die Endpunkte der Basis geht.

gespannte Winkel gegeben sind, so ist die Enveloppe der Basis ein Kegelschnitt, von welchem dieser Punkt ein Brennpunkt ist und der die beiden gegebenen Seiten berührt.

21. Der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel, welche einander rechtwinklig schneiden, ist ein Kreis.

22. Die Enveloppe der Sehne eines Kegelschnitts, welche an einem gegebenen Punkte einen rechten Winkel spannt, ist ein Kegelschnitt, welcher diesen Punkt zum Brennpunkt hat.

Im Art. 155 bewiesen wir den Satz: Wenn man von einem Punkt in der Peripherie eines Kreises auf die Seiten eines ihm eingeschriebenen Dreiecks Perpendikel fällt, so liegen ihre Fusspunkte in einer geraden Linie. Wenn wir jenen Punkt zum Ursprung der Reciprocität wählen, so entspricht dem in den Kreis eingeschriebenen Dreieck ein Dreieck, welches einer Parabel umgeschrieben ist; es entspricht auch dem Fusspunkt der auf eine gerade Linie gefällten Senkrechten die durch den entsprechenden Punkt senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Ursprung gezogene Gerade, so dass wir den Satz erhalten: Wenn wir die Ecken eines Dreiecks, welches einer Parabel umgeschrieben ist, mit dem Brennpunkt derselben verbinden und in jenen Eckpunkten auf diesen Verbindungslinien Senkrechte errichten, so gehen diese durch denselben Punkt. Wenn man daher über der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkt als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so geht derselbe durch die Ecken des umgeschriebenen Dreiecks. Und somit: Wenn drei Tangenten einer Parabel gegeben sind, so ist der Ort des Brennpunktes derselben der dem Dreieck der Tangenten umgeschriebene Kreis. (Art. 231, Zus. IV.)

23. Der Ort des Fusspunktes der Senkrechten (oder gleichgeneigten Geraden) vom Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangente derselben ist ein Kreis.

24. Wenn man von irgend einem Punkte aus nach einem Kreise gerade Linien zieht und in den Endpunkten derselben Senkrechte (oder etc.) auf ihnen errichtet, so ist die Enveloppe dieser Letzteren ein Kegelschnitt, der den festen Punkt zu seinem Brennpunkt hat.

387. Nachdem wir im letzten Artikel die Methode, nach welcher auf Winkel bezügliche Sätze transformirt werden, hinreichend durch Beispiele erläutert haben, gehen wir dazu über, zu zeigen, in welcher Weise Sätze transformirt werden, in welchen die Grössen von durch den Ursprung gehenden geraden Linien auftreten. Solche Transformationen geschehen auf Grund des ersten Satzes im Artikel 385. Wir wählen als ein Beispiel den Satz, dass die Summe (oder die Differenz, wenn der Ursprung ausserhalb des Kreises liegt) der Senk-

rechten, die vom Ursprung auf ein Paar paralleler Tangenten eines Kreises gefällt werden können, constant und dem Durchmesser des Kreises gleich ist. Nun entsprechen zwei parallelen Linien zwei Punkte in einer durch den Ursprung gehenden Geraden, und man erhält den Satz: Die Summe der reciproken Werthe der Segmente einer Focal-Sehne in der Ellipse ist constant.

Aus Artikel 201, Aufgabe 1, wissen wir, dass diese Summe dem vierfachen reciproken Werth des Parameters der Ellipse gleich ist, und da das gegenwärtige Beispiel lehrt, dass dieselbe nur vom Durchmesser und nicht von der Lage des reciproken Kreises abhängig ist, so ist zu schliessen, dass die reciproken Curven gleicher Kreise in Bezug auf irgend einen Ursprung denselben Parameter haben.

1. Das Rechteck der Segmente jeder durch den Ursprung gezogenen Sehne eines Kreises ist constant.	2. Das Rechteck aus den Senkrechten, die man vom Brennpunkt auf zwei parallele Tangenten fällen kann, ist constant.

Daher ist mit der durch den Ursprung an einen Kreis zu ziehenden Tangente auch die conjugirte Axe der reciproken Hyperbel gegeben.

Der Satz, dass die Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den Brennpunkten constant ist, kann ausgedrückt werden, wie folgt:

3. Die Summe der Entfernungen des Brennpunktes von den Berührungspunkten paralleler Tangenten ist constant.	4. Die Summe der reciproken Werthe der Senkrechten, welche man von einem beliebigen Punkte aus auf solche zwei Tangenten eines Kreises fällen kann, deren Berührungssehne durch jenen Punkt geht, ist constant.

388. Mit Hilfe des in Art. 131 gegebenen Satzes kann man **diese Transformationen auch auf solche Sätze anwenden, welche sich auf die Grösse von geraden Linien beziehen, die nicht durch den Ursprung gehen.**

So wissen wir z. B., dass das Product der Perpendikel, die man von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts auf das eine Paar der Gegenseiten eines in denselben eingeschriebenen Vierecks ällen kann, zu dem Product der von demselben Punkte auf das andre Paar der Gegenseiten zu fällenden Perpendikel in einem constanten Verhältniss ist. (Art. 288.)

Die Relation, welche diesen Satz ausdrückt, wenn P der gedachte Punkt und A, B, C, D die Fusspunkte der auf die Seiten des Vierecks gefällten Perpendikel in ihrer natürlichen Ordnung sind, kann aber in der Form $\frac{PA}{OP}\cdot\frac{PC}{OP}=k\cdot\frac{PB}{OP}\cdot\frac{PD}{OP}$ geschrie-

ben werden. Sind nun a, b, c, d die den Seiten des Vierecks entsprechenden Punkte und bezeichnet ap die Senkrechte, welche man von a auf die dem Punkte P entsprechende gerade Linie fällt, so gilt nach Art. 131 die Relation $PA : OP = ap : Oa$; ebenso für die andern Seiten. Wegen der Unveränderlichkeit der Linien Oa, Ob, Oc, Od schliessen wir daraus: Wenn ein festes Viereck einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, so ist das Product der Perpendikel, die man von zweien seiner Gegenecken auf eine veränderliche Tangente desselben fällen kann, zu dem Producte der auf dieselbe Tangente von den andern Gegenecken gefällten Perpendikel in einem constanten Verhältniss. (Art. 292.)

1. Das Product der Perpendikel, die man von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts auf zwei feste Tangenten desselben fällt, ist zu dem Quadrat des von ihm auf ihre Berührungssehne gefällten Perpendikels in einem constanten Verhältniss. (Art. 288.)

2. Das Product der Perpendikel, die man von zwei festen Punkten eines Kegelschnittes auf eine beliebige Tangente desselben fällen kann, ist in einem constanten Verhältniss zu dem Quadrate des Perpendikels, welches vom Durchschnitt der in jenen Punkten an den Kegelschnitt gelegten Tangenten auf jene Tangente gefällt wird.

Wählte man bei dieser Transformation den Ursprung der Reciprocität in der Berührungssehne selbst, so ist der reciproke Satz wie folgt auszusprechen: Das Rechteck aus den Abschnitten, welche eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts in zwei parallelen festen Tangenten desselben bestimmt, ist constant.

3. In jedem Kegelschnitte ist das Product der Perpendikel, die man von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) auf eine beliebige Tangente fällt, constant.

4. Das Quadrat des Radius vector von einem festen Punkte zu einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts ist zu dem Producte der Perpendikel in einem constanten Verhältniss, welche man von diesem Punkte des Kegelschnitts auf zwei feste gerade Linien fällen kann.

389. Manche auf Grössenverhältnisse bezügliche Sätze lassen sich auf solche über gerade Linien reduciren, welche nach harmonischem oder nach gleichem Doppelverhältniss geschnitten werden, und ihre Transformation wird alsdann durch das Princip ermöglicht: Vier Punkten in einer geraden Linie entsprechen vier gerade Linien, die durch einen Punkt gehen (einer Reihe von vier Punkten ein Büschel von vier Strahlen) und das Doppelverhältniss dieses Büschels ist dasselbe wie das jener vier Punkte.

Man braucht zur Begründung desselben nur anzuführen, dass jeder Strahl des Büschels, welches durch den Ursprung und die gegebenen vier Punkte bestimmt wird, zu einer der entsprechenden Linien senkrecht ist. Mit Hilfe dieses Princips lassen sich die projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises ableiten.

1. Das Doppelverhältniss des Büschels, welches durch die Verbindung von vier festen Punkten eines Kegelschnitts mit einem veränderlichen fünften entsteht, ist constant.

2. Das Doppelverhältniss der Punkte, in welchen vier feste Tangenten eines Kegelschnitts von einer veränderlichen fünften Tangente desselben geschnitten werden, ist constant.

Der erste dieser Sätze ist für den Kreis wahr, weil alle Winkel des Büschels constant sind, in Folge dessen ist der zweite für alle Kegelschnitte richtig. Der zweite Satz gilt für den Kreis, weil die von den vier Punkten am Centrum bestimmten Winkel constant sind; in Folge dessen ist der erste Satz für alle Kegelschnitte wahr.

Indem man die Winkel betrachtet, welche in der reciproken Figur den am Kreise vorhandenen constanten Winkeln entsprechen, erkennt man, dass die von den vier Punkten der veränderlichen Kegelschnittstangente am Brennpunkt bestimmten Winkel constant sind und dass ferner die Winkel, welche von den Durchschnittspunkten der vier Strahlen des Büschels mit der Directrix am Brennpunkt gespannt werden, von constanter Grösse sind.

390. Das Doppelverhältniss von vier Punkten einer geraden Linie ist nicht die einzige Relation über die Grösse von Linien, welche durch die an einem festen Punkt gemessenen Winkel ausgedrückt werden kann. Für jede Relation, welche durch die wie in Art. 57 vollzogene Substitution des Ausdrucks $\frac{OA . OB . \sin AOB}{OP}$ für jede in ihr vorkommende geradlinige Strecke AB auf eine Relation zwischen den Sinus der an einen gegebenen Punkt O gespannten Winkel reducirt werden kann, gilt, was von der Relation des Doppelverhältnisses bewiesen ist, dass sie für die Schnittpunkte jeder beliebigen Transversale mit den geraden Linien OA, OB ... wahr ist, welche jene Punkte mit diesem gegebenen Punkt verbinden. Indem man alsdann den gegebenen Punkt zum Ursprung der Reciprocität nimmt, kann ein reciproker Satz leicht abgeleitet werden. So ist z. B. der folgende Satz, welchen man Carnot verdankt, eine unmittelbare Folge des Art. 111: Wenn ein Kegelschnitt die Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 eines Dreiecks respective in den Punktepaaren B_3, B_3'; B_1, B_1'; B_2, B_2' schneidet, so ist $\frac{A_1B_3 . A_1B_3' . A_2B_1 . A_2B_1' . A_3B_2 . A_3B_2'}{A_1B_2 . A_1B_2' . A_2B_3 . A_2B_3' . A_3B_1 . A_3B_1'} = 1$. Man sieht

leicht, dass dieses Verhältniss die eben erwähnte Eigenschaft besitzt, überall kann man für die in ihm auftretenden geraden Strecken die Sinus der Winkel substituiren, welche die Endpunkte derselben an einem festen Punkte O bestimmen. Wir können demnach den reciproken Satz bilden, und finden, dass es derselbe ist, welchen wir im Art. 327 gegeben haben.

391. Nachdem wir gezeigt haben, wie zu speciellen Sätzen die reciproken zu bilden sind, fügen wir einige allgemeine Betrachtungen über reciproke Kegelschnitte hinzu.

Wir bewiesen im Art. 385, dass die Reciproke eines Kreises eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem der Ursprung innerhalb oder ausserhalb des Kreises, oder auf demselben gewählt wird und dehnen zuerst diesen Schluss auf alle Kegelschnitte aus. Je näher eine gerade Linie oder ein Punkt dem Ursprung ist, desto weiter muss offenbar der entsprechende Punkt oder die entsprechende Linie von demselben sein; in Folge des Grundgesetzes, von welchem dieses Entsprechen beherrscht wird, entspricht jeder durch den Ursprung gehenden geraden Linie ein Punkt in unendlicher Entfernung und dem Ursprunge selbst eine gerade Linie, welche ganz in unendlicher Entfernung liegt. Demnach entsprechen den beiden durch den Ursprung an die Curve zu ziehenden Tangenten zwei unendlich entfernte Punkte der reciproken Curve. Wenn vom Ursprung aus zwei reelle Tangenten an die Curve gezogen werden können, so hat die reciproke Curve zwei reelle Punkte in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist eine Hyperbel; wenn die vom Ursprung an die Curve zu ziehenden Tangenten imaginär sind, so ist die reciproke Curve eine Ellipse; und wenn der Ursprung in der Curve liegt, so dass die von ihm aus zu ziehenden Tangenten zusammenfallen, so fallen die unendlich entfernten Punkte der reciproken Curve zusammen, und dieselbe ist demnach eine Parabel. Da die unendlich entfernte gerade Linie dem Ursprung entspricht, so ist dieselbe, wenn der Ursprung der Curve angehört, nothwendig eine Tangente der reciproken Curve und wir gelangen auch so zu dem Satze des Art. 274, nach welchem jede Parabel eine in unendlicher Entfernung gelegene Tangente hat.

392. Den Berührungspunkten zweier durch den Ursprung gehender Tangenten entsprechen die Tangenten in den zwei unendlich entfernten Punkten der reciproken Curve, d. h. die Asymp-

toten derselben. Da die Excentricität der reciproken Hyperbel nur von dem durch ihre Asymptoten gebildeten Winkel abhängig ist, so wird sie durch den Winkel völlig bestimmt, welchen die vom Ursprung ausgehenden Tangenten der Original-Curve einschliessen.

Es entspricht ferner der Durchschnittspunkt der Asymptoten der reciproken Curve d. i. ihr Centrum der Berührungssehne der vom Ursprung an die Original-Curve gezogenen Tangenten. Wir sprechen nur einen speciellen Fall dieses Satzes aus, wenn wir sagen, dass dem Centrum eines Kreises die Directrix des reciproken Kegelschnitts entspricht, denn die Directrix ist die Polare des Ursprungs und dieser ist der Brennpunkt des Kegelschnitts.

Aufg. 1. Die Reciproke einer Parabel in Bezug auf einen Punkt ihrer Directrix ist eine gleichseitige Hyperbel. (Art. 229.)

Aufg. 2. Man weise die folgenden Sätze als reciprok nach:

Die Höhenperpendikel eines der Parabel umgeschriebenen Dreieckes schneiden sich in der Directrix.	Die Höhenperpendikel eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks schneiden sich in der Curve.

Aufg. 3. Man leite den letzteren Satz aus dem von Pascal ab. (Vergl. Art. 284, Aufg. 3.)

Aufg. 4. Die Axen der Reciprokalcurve sind parallel der Tangente und Normale eines Kegelschnitts, welcher durch den Ursprung geht und mit dem gegebenen confocal ist; denn sie sind parallel den Halbirungslinien des Winkels, welchen die vom Ursprung an die gegebene Curve gehenden Tangenten mit einander bilden. (Vergl. Art. 197.)

393. Zu zwei gegebenen Kreisen lässt sich stets ein Punkt finden, für welchen als Ursprung die reciproken Curven derselben confocale Kegelschnitte werden. Denn da die Reciproken aller Kreise einen gemeinschaftlichen Brennpunkt im Ursprung haben müssen, so werden sie confocale Kegelschnitte, wenn sie überdiess einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, d. h. wenn die Polare des Ursprungs in Bezug auf beide Kreise die nämliche ist, oder wenn derselbe einer der beiden Punkte ist, welche im Artikel 141 bestimmt und als Grenzpunkte bezeichnet wurden. Wenn ein derartiges System von Kreisen wie das im Artikel 139 betrachtete gegeben ist, so bilden ihre reciproken Curven in Bezug auf einen dieser Grenzpunkte ein System confocaler Kegelschnitte. Wir hätten diess auch daraus schliessen können, dass jenes System von Kreisen nur ein specieller Fall von dem System von Kegelschnitten ist, welche demselben Viereck umgeschrieben sind; indess

confocale Kegelschnitte als solche betrachtet werden müssen, die demselben Vierseit eingeschrieben sind.

Die Reciproken von irgend zwei Kegelschnitten können ebenso concentrisch gemacht werden, indem man einen der drei Punkte als Ursprung nimmt, welche das gemeinsame harmonische System der Kegelschnitte bilden.

1. Confocale Kegelschnitte schneiden einander rechtwinklig. (Art. 196.)

2. Die gemeinschaftliche Tangente von zwei Kreisen bestimmt an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel.

3. Die Tangenten von zwei confocalen Kegelschnitten aus einem beliebigen Punkte bilden gleiche Winkel mit einander. (Art. 197.)

4. Die auf einer Secante von zwei Kreisen zwischen denselben gelegenen Abschnitte spannen an jedem der Grenzpunkte gleiche Winkel.

5. Der Ort des Pols einer festen Geraden in Bezug auf die Kegelschnitte eines confocalen Systems ist ein Perpendikel zur festen Geraden. (Art. 234, Aufg. 3.)

6. Die Polare eines festen Punktes in Bezug auf die Kreise eines Systems von derselben Radicalaxe gehen durch einen festen Punkt, welcher mit jenem an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel bestimmt.

7. Wir erwähnen ferner, dass die Methode der reciproken Polaren eine einfache Auflösung der Apollonischen Aufgabe darbietet: Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt. Der Ort des Centrums für einen Kreis, welcher zwei gegebene Kreise berührt, (wir wollen dieselben durch (1), (2) bezeichnen) ist offenbar eine Hyperbel, welche die Centra dieser Kreise zu Brennpunkten hat, weil die Aufgabe sich sogleich auf diese andere reducirt: Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, für welches die Basis und die Differenz der Seiten gegeben ist. In Folge dessen muss (Art. 385) die Polare des Centrums in Bezug auf einen der gegebenen Kreise immer einen Kreis berühren, welcher leicht construirt werden kann. Ebenso muss die Polare des Centrums für einen unter denjenigen Kreisen, welche die Kreise (1) und (3) zugleich berühren, auch einen gegebenen Kreis berühren. Wenn wir daher zu den zwei so bestimmten Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente ziehen und den Pol derselben in Bezug auf den Kreis (1) nehmen, so ist mit ihm das Centrum des die drei Kreise berührenden Kreises gefunden.

394. Man soll die Gleichung der reciproken Curve eines Kegelschnitts in Bezug auf sein Centrum als Ursprung finden.

Wir benutzen das Ergebniss des Artikel 186, nach welchem die vom Centrum auf die Tangente gefällte Senkrechte mittels des von ihr mit den Axen gebildeten Winkels durch die Formel $p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha$ ausgedrückt wird. Daraus ergiebt sich

unmittelbar die Polar-Gleichung der reciproken Curve in der Form

$$\frac{k^4}{\varrho^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha, \text{ als } \frac{a^2x^2}{k^4} + \frac{b^2y^2}{k^4} = 1.$$

Die reciproke Curve ist daher ein concentrischer Kegelschnitt, dessen Axen die reciproken Werthe von denen des gegebenen Kegelschnitts haben.

Man soll die Gleichung der reciproken Curve eines Kegelschnitts mit Bezug auf einen Punkt $(x'\,y')$ als Ursprung finden.

Die Länge der Senkrechten von diesem Punkte auf die Tangente des Kegelschnittes ist nach demselben Artikel 186:

$$p = \frac{k^2}{\varrho} = \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)} - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$

und demnach die Gleichung der reciproken Curve

$$(xx' + yy' + k^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

395. **Die Reciproke einer Curve in Bezug auf den zum Ursprung genommenen Anfangspunkt der Coordinaten ist bekannt; man soll daraus die Gleichung ihrer einem beliebigen Punkte $(x'\,y')$ als Ursprung entsprechenden Reciproken ableiten.**

Wenn die vom Anfangspunkt der Coordinaten auf eine gerade Linie gefällte Senkrechte $= P$ ist, so ist die Senkrechte vom Punkt $(x'\,y')$ auf dieselbe Gerade durch $(P - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)$ repräsentirt. (Artikel 34.)

Die Polargleichung der reciproken Curve ist daher

$$\frac{k^2}{\varrho} = \frac{k^2}{R} - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$

$$\text{also } \frac{k^2}{R} = \frac{x'x + y'y + k^2}{\varrho} \text{ und } \frac{R\cos\alpha}{k^2} = \frac{\varrho\cos\alpha}{xx' + yy' + k^2}.$$

Wir müssen demnach in die Gleichung der auf den Coordinatenanfang bezüglichen reciproken Curve für x und y respective die Ausdrücke $\dfrac{k^2x}{xx' + yy' + k^2}$, und $\dfrac{k^2y}{xx' + yy' + k^2}$ substituiren, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Das Ergebniss dieser Substitution kann in der folgenden Art einfach angezeigt werden: Sei die Gleichung der auf den Anfangspunkt der Coordinaten bezüglichen reciproken Curve

$$U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots = 0.$$

Dann ist die Gleichung der dem Punkt $(x'y')$ entsprechenden Reciproken

$$U_n + U_{n-1}\left(\frac{xx'+yy'+k^2}{k^2}\right) + U_{n-2}\left(\frac{xx'+yy'+k^2}{k^2}\right)^2 + \ldots = 0.$$

Sie ist offenbar mit der ersten von demselben Grade.

Man soll die reciproke Curve eines durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitts in Bezug auf die Directrix $x^2+y^2-k^2=0$ ausdrücken.

Wir finden die Gleichung für den Ort eines Punktes, dessen Polare $xx'+yy'-k^2=0$ den gegebenen Kegelschnitt berührt, durch Einsetzen von $x', y', -k^2$ für ξ, η, ζ respective in die Tangentialgleichung des Art. 114; sie ist also

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 - 2A_{13}k^2x - 2A_{23}k^2y + A_{33}k^4 = 0.$$

Ist also z. B. die Curve eine Parabel, d. h. $A_{33} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, so geht die Reciproke durch den Ursprung; ebenso bestätigt diese Gleichung andere Eigenschaften derselben, die vorher geometrisch erkannt sind.

Für $k^2 = -z^2$ erhält man die Gleichung der Polare in der Form $xx'+yy'+zz'=0$ und die Gleichung der Reciproken durch die einfache Vertauschung von ξ, η, ζ mit x, y, z aus der Tangentialgleichung des Kegelschnitts. Dieselbe kann als die Gleichung der Reciproken in Bezug auf eine durch jene Gleichung dargestellte Directrix gelten. Hier schliessen sich die allgemeinen Untersuchungen der Art. 324 und 352, 359 dem Vorigen an.

396. Ehe wir die Betrachtung der reciproken Polaren beschliessen, wollen wir noch auf eine Classe von Sätzen aufmerksam machen, zu deren Transformation eine **Parabel statt eines Kreises als Hilfskegelschnitt** genommen werden kann.

Wir haben im Art. 219 bewiesen, dass der zwischen irgend zwei geraden Linien gelegene Abschnitt in der Axe der Parabel dem Abschnitt dieser letzteren gleich ist, welcher zwischen den von den Polen dieser geraden Linien auf die Axe gefällten Senkrechten liegt. Diess Princip ermöglicht uns die Transformation von Sätzen, welche sich auf die Grösse von Linien beziehen, die einer festen Linie parallel gemessen sind.

Wir geben von der Anwendung dieser Methode einige Beispiele und schicken dazu voraus, dass den zwei der Axe der als Directrix gewählten Parabel parallelen Tangenten die unendlich entfernten Punkte in der reciproken Curve entsprechen und

dass die Curve demnach eine Hyperbel oder Ellipse ist, jenachdem diese Tangenten reell oder imaginär sind; dass endlich die Curve eine Parabel ist, wenn diese Axe durch einen der unendlich entfernten Punkte der Original-Curve geht.

Jede veränderliche Tangente eines Kegelschnitts bestimmt in zwei festen parallelen Tangenten desselben Abschnitte, deren Rechteck von constanter Grösse ist. Den Berührungspunkten der parallelen Tangenten entsprechen die Asymptoten der reciproken Hyperbel und ihren Durchschnittspunkten mit der beweglichen Tangente Parallelen zu den Asymptoten durch irgend einen Punkt der Curve. Wir schliessen daraus, dass die Asymptoten und die durch irgend einen Punkt der Curve zu ihnen gezogenen Parallelen in einer festen geraden Linie Abschnitte bestimmen, deren Rechteck unveränderlich ist und erkennen, dass diess Ergebniss dem früher entwickelten Satze äquivalent ist: Das Rechteck aus den durch einen Punkt der Curve gezogenen Parallelen zu den Asymptoten ist constant.

1. Diejenigen Sehnen einer Hyperbel, welche von zwei festen Punkten derselben nach einem veränderlichen dritten Punkte gezogen werden, bestimmen einen Abschnitt von unveränderlicher Länge in der Asymptote. (Art. 207, Aufg. 1.)

2. Wenn eine beliebige Tangente einer Parabel zwei feste Tangenten derselben schneidet, so bestimmen die von ihren Endpunkten auf die Scheiteltangente der Parabel gefällten Perpendikel in dieser einen Abschnitt von constanter Länge.

Es ist offenbar, dass diese Methode der parabolischen Polaren in ihrer Anwendung beschränkt ist.

Nach Art. 379 muss die successive zweimalige Anwendung der Methode der Reciprocität zu einem gegebenen Satze einen andern ihm collinear entsprechenden Satz liefern. Wir geben dazu ein Beispiel.

3. Der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat. (Art. 386, 18.)

4. Wenn die Sehne eines Kegelschnitts an einem gegebenen Punkte desselben einen constanten Winkel spannt, so berührt sie stets einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist. (Art. 386, 17.)

397. Das Entsprechen von Punkten mit Punkten und von Geraden mit Geraden, welches für die Collineation und das von Punkten mit Geraden und von Geraden mit Punkten, welches für

die Reciprocität charakteristisch ist, kann nach verschiedenen Gesetzen in sehr verschiedenen Arten hergestellt werden. Alle Methoden desselben geben Anlass zur Transformation von Figuren in andere Figuren und zur Uebertragung der auf jene bezüglichen Sätze auf diese, somit zur Erkenntniss neuer geometrischer Wahrheiten. Es liegt zunächst, sich dazu einer zweckmässig gewählten Figur als Directrix zu bedienen. In dem Vorigen hat sich der Kreis als solche empfohlen und es ist leicht genug ein Entsprechen von Punkten ganz analog zu begründen, wie hier das Entsprechen von Pol und Polare. Der Fusspunkt der Polare in dem Durchmesser des Pols kann als dem Letztern entsprechend angesehen werden;. dann gilt das Gesetz: Entsprechende Punkte liegen auf einerlei Durchmesser der Directrix und das Product ihrer Abstände vom Centrum ist constant (gleich dem Quadrat des Halbmessers der Directrix). Wählt man die Constante gleich Eins, so sind die Abstände entsprechender Punkte durch inverse oder reciproke Zahlen ausgedrückt und man kann daher diese Beziehung und Methode des Entsprechens oder der geometrischen Verwandtschaft und Transformation als Methode der circularen Inversion oder der reciproken Radien vectoren benennen. Aus der Definition ergeben sich direct folgende Eigenschaften derselben: Je zwei entsprechende Punkte liegen mit dem Centrum auf derselben Geraden und je zwei Paare entsprechender Punkte auf einer Kreisperipherie, welche den festen Kreis orthogonal durchschneidet. Sind die Punkte des ersten Paares denen des zweiten respective unendlich nahe, so folgt, dass Tangenten in entsprechenden Punkten mit dem dieselben verbindenden Radius immer ein gleichschenkliges Dreieck bilden und daraus ergiebt sich, dass die Winkel der einen Figur den entsprechenden Winkeln der circular inversen Figur gleich sind. Den Punkten einer geraden Linie entsprechen offenbar Punkte einer Kreisperipherie, welche durch das Centrum der Inversion geht und ihren Mittelpunkt in der von da ausgehenden Normale der Geraden hat; umgekehrt den Punkten einer das Centrum enthaltenden Kreisperipherie die einer zu dem nach ihm gehenden Durchmesser normalen Geraden, der Radicalaxe des Kreises mit dem Inversionskreis. Einem Kreis entspricht in Bezug auf einen beliebigen Punkt seiner Ebene als Centrum der Inversion ein anderer Kreis, der mit ihm dieselben Tangenten von jenem Centrum und mit ihm und dem festen Kreis

dieselbe Radicalaxe hat. Einige andere Eigenschaften geben wir zur Entwickelung des Beweises unter den Aufgaben. In der Geometrie des Kreises liefert diese Transformation zahlreiche Hilfsmittel; wir geben davon einige Beispiele.

Aufg. 1. Wenn ϱ der Radius der Inversion und r, r'; d, d' die Radien und Entfernungen ihrer Centra vom Centrum der Inversion für zwei entsprechende Kreise, endlich t, t' die Längen ihrer vom Centrum ausgehenden Tangenten sind, so hat man die Relation

$$d : d' = r : r' = t : t' = t^2 : tt' = (d^2 - r^2) : \varrho^2$$

und somit
$$d' = \frac{\varrho^2}{d^2 - r^2} d, \quad r' = \frac{\varrho^2}{d^2 - r^2} r.$$

Aufg. 2. Irgend vier Punkte einer geraden Linie oder eines Kreises und ihre vier nach circularer Inversion entsprechenden haben gleiche Doppelverhältnisse. In Folge dessen erhält man aus dem Satze, dass eine um einen festen Punkt drehende Gerade in zwei festen Geraden Reihen von gleichem Doppelverhältniss bestimmt — den andern: Die durch zwei feste Punkte gehenden Kreise bestimmen in jedem von zwei festen Kreisen, welche durch je einen dieser Punkte gehen, projectivische Punktsysteme; aus: Eine um einen festen Punkt drehende Gerade bestimmt in einem festen Kreise zwei projectivische Punktsysteme in Involution — folgt: Die durch zwei feste Punkte gehenden Kreise bestimmen in einem festen Kreise zwei projectivische Punktsysteme in Involution; etc.

Aufg. 3. Die drei Kreise, welche durch einen Punkt und die Durchschnittspunkte von je zweien unter drei beliebigen Kreisen gelegt werden können, haben einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt. Denn die Radicalaxen von drei Kreisen schneiden sich in einem Punkt.

Aufg. 4. Alle durch einen festen Punkt gehenden Kreise, welche einen festen Kreis rechtwinklig schneiden, gehen durch dieselben zwei festen Punkte, welche den durch sie gehenden Durchmesser des festen Kreises harmonisch theilen. Denn die Normalen eines Kreises gehen alle durch sein Centrum.

Aufg. 5. In jedem System von drei Kreisen bestimmen die sechs Paare conjugirter Berührungskreise von je zweien unter ihnen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, sechs Durchschnittspunkte mit einander, welche viermal zu dreien in Kreisen durch jenen Punkt liegen. Denn die sechs Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von drei Kreisen liegen viermal zu dreien in geraden Linien.

Aufg. 6. In einem Dreieck, welches von drei Kreisen durch einen Punkt gebildet wird, die einen und denselben vierten Kreis berühren, haben die drei durch diesen Punkt, je einen der Eckpunkte und den Berührungspunkt der Gegenseite des Dreiecks gehenden Kreise einerlei Radicalaxe und die drei Kreise, welche durch ihn und je ein Paar der Berührungspunkte bestimmt sind, schneiden die das Dreieck bildenden Kreise in Punkten, welche mit jenem Schnittpunkt der letztern auf einem Kreise liegen. Der Satz ist die Inversion der zu den Sätzen des Art. 159 (für einen eingeschriebenen Kreis) gehörigen Figur.

Aufg. 7. Wenn zwei veränderliche Kreise sich unter constantem Winkel auf einer festen Kreisperipherie und überdiess in einem festen Punkte schneiden, so umhüllt der Kreis, welcher in jeder ihrer Lagen durch den festen Punkt mit ihren veränderlichen Schnittpunkten im festen Kreise bestimmt wird, einen zweiten festen Kreis, welcher mit dem ersten und jenem Punkte dieselbe Radicalaxe hat. Denn wenn zwei Gerade sich auf einem festen Kreis unter constantem Winkel schneiden, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit dem Kreis einen zweiten festen, dem ersten concentrischen Kreis.

Aufg. 8. Man transformire durch Circularinversion die Figur, durch die man aus drei Paaren entsprechender Punkte von zwei projectivischen concyklischen Reihen die Doppelpunkte derselben bestimmt — (Art. 308, Aufg. 6) für ein auf der Kreisperipherie gelegenes Centrum.

398. Nach Art. 142, Aufg. 5 ist der Winkel des Durchschnitts zweier Kreise von den Halbmessern R, r und der Centraldistanz D durch $\cos\alpha = \frac{R^2 + r^2 - D^2}{2Rr}$ gegeben und da die Länge t der gemeinschaftlichen Tangente durch $t^2 = D^2 - (R \pm r)^2$ bestimmt ist, so bleibt das Verhältniss $t^2 : Rr$ bei der Inversion ungeändert; denn es ist $= -2(\cos\alpha \pm 1)$. Dieser Umstand ist einer ausgedehnten Benutzung in den Anwendungen fähig.

Wenn vier Kreise die nämliche Gerade in den Punkten A, B, C, D respective berühren, so gilt wie für irgend vier Punkte einer Geraden die Relation $AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + AD \,.\, BC$; daher ist auch $\frac{AC}{(rr'')^{\frac12}} \frac{BD}{(r'r''')^{\frac12}} = \frac{AB}{(rr')^{\frac12}} \frac{CD}{(r''r''')^{\frac12}} + \frac{AD}{(rr''')^{\frac12}} \frac{BC}{(r'r'')^{\frac12}}$, weil alle Glieder den Divisor $(rr'r''r''')^{\frac12}$ enthalten. Nach dem Vorigen bleibt diese Relation nach jeder circularen Inversion bestehen und zeigt, dass für AB, AC, AD, BC, BD, CD, als die gemeinschaftlichen Tangenten von vier Kreisen A, B, C, D, welche von ein und demselben fünften Kreis K berührt werden, die Relation besteht $AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + AD \,.\, BC$.

Aufg. 1. Wenn die vier ersten Kreise in Punkte des fünften Kreises degeneriren, so erhält man den Satz des Ptolemäus wieder.

Aufg. 2. Wenn der Kreis D sich auf einen Punkt reducirt, so gehört derselbe dem gemeinschaftlichen Berührungskreis der Kreise A, B, C an und die Geraden DA, DB, DC sind die Längen der Tangenten, welche von ihm an die Kreise A, B, C gezogen werden können. Nach Art. 122 sind die Quadrate dieser Tangenten durch die Resultate der Substitution der Coordinaten des Punktes D in die linken Seiten der Gleichungen der Kreise A, B, C ausgedrückt und man erhält daher für die gemeinschaftlichen Berührungskreise von drei Kreisen von den Gleichungen $S_1 = 0$,

$S_2 = 0$, $S_3 = 0$ und für a_1, a_2, a_3; a_1', a_2', a_3' als die Längen der directen und der transversalen gemeinschaftlichen Tangenten der Paare $S_2 S_3$, $S_3 S_1$, $S_1 S_2$ die Gleichungen

$$a_1 S_1^{\frac{1}{2}} + a_2 S_2^{\frac{1}{2}} + a_3 S_3^{\frac{1}{2}} = 0, \quad a_1 S_1^{\frac{1}{2}} + a_2' S_2^{\frac{1}{2}} + a_3' S_3^{\frac{1}{2}} = 0,$$
$$a_1' S_1^{\frac{1}{2}} + a_2 S_2^{\frac{1}{2}} + a_3' S_3^{\frac{1}{2}} = 0, \quad a_1' S_1^{\frac{1}{2}} + a_2' S_2^{\frac{1}{2}} + a_3 S_3^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Jede von ihnen ist vom vierten Grade und drückt zwei von den Kreisen aus, welche die gegebenen gemeinschaftlich berühren.

Aufg. 3. Die Figur des gemeinschaftlichen Berührungskreises der vier Kreise, welche dieselben drei geraden Linien berühren, giebt auf Grund dessen den Satz: Die acht Kreise, welche drei gegebene Kreise zugleich berühren, lassen sich (in acht verschiedenen Arten) so in Gruppen zu je vier Kreisen vertheilen, dass die Berührungskreise einer Gruppe sämmtlich durch einen und denselben Kreis berührt werden. Sind A, B, C, D die Kreise, welche von denselben drei Geraden berührt werden und insbesondere D der dem Dreieck der Letzteren eingeschriebene Kreis und bezeichnen (AB), etc. die directen, $(AB)'$, etc. die transversalen gemeinschaftlichen Tangenten der aus ihnen zu bildenden Paare, so gelten für die drei Geraden unter Beachtung des Umstandes, dass für je eine von ihnen respective A oder B oder C auf der einen Seite und die jedesmaligen drei andern auf der andern Seite liegen, die Gleichungen

$$(AB)'(CD) \pm (AC)'(BD) \pm (AD)'(BC) = 0,$$
$$(AB)'(CD) \pm (BC)'(AD) \pm (BD)'(AC) = 0,$$
$$(CB)'(AD) \pm (AC)'(BD) \pm (CD)'(BA) = 0$$

und durch Addition ergiebt sich aus ihnen

$$(AD)'(BC) \pm (BD)'(CA) \pm (CD)'(AB) = 0,$$

d. h. die Gleichung eines Kreises, welcher A, B, C, D so berührt, dass D auf der einen Seite liegt, während A, B, C auf der andern sind. Die Schlüsse dieses Beweises bleiben aber unverändert gültig, wenn die drei geraden Linien durch Kreise ersetzt werden *).

Aufg. 4. Die Gleichung eines Paares der Kegelschnitte, welche die drei Kegelschnitte $S - L_1^2 = 0$, $S - L_2^2 = 0$, $S - L_3^2 = 0$ zugleich berühren, ist von der Form

$$a_1 (S^{\frac{1}{2}} - L_1)^{\frac{1}{2}} + a_2 (S^{\frac{1}{2}} - L_2)^{\frac{1}{2}} + a_3 (S^{\frac{1}{2}} - L_3)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

399. Für andere Betrachtungen können, ähnlich wie in den vorigen Art. der Kreis, das Dreieck oder Viereck als Directrix einer Methode des Entsprechens dienen. Wir wollen die Anknüpfungspunkte solcher Beziehungen in dem Früheren bezeichnen und einiges von der Anwendbarkeit derselben andeuten.

Nach der Aufg. des Art. 55 schneiden sich die drei Geraden

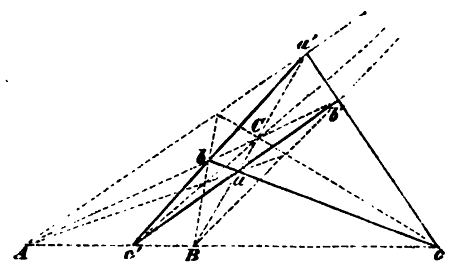
*) Da bei der circularen Inversion für einen beliebigen Punkt des Raums die Ebene in eine Kugelfläche übergeht, während gerade Linien und Kreise wie vorher Kreise liefern, so übertragen sich diese Sätze auf die Geometrie der Kugel.

aus den Ecken eines Dreiecks in einem Punkte, welche mit drei durch einen Punkt gehenden Geraden aus denselben Ecken Winkel bestimmen, die mit den Winkeln des Dreiecks dieselben Halbirungslinien haben. Man kann jene Punkte als einander entsprechend in Bezug auf das Dreieck ansehen. Nach Art. 197 kann jedes Paar solcher Punkte als das Paar der Brennpunkte eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts angesehen werden.

Die Interpretation derselben Gleichungen nach trimetrischen Liniencoordinaten liefert einen Satz, nach welchem zwei gerade Linien als in Bezug auf das Dreieck entsprechend erscheinen. Endlich ist in der 2. Aufg. des Art. 60 zu einem Punkte die Gerade abgeleitet und einfach ausgedrückt worden, welche wir in Bezug auf ein Dreieck seine Harmonikale nennen können (Art. 373, Aufg. 1, 2); danach entspricht jedem Punkte eine Gerade und jeder Geraden ein Punkt in Bezug auf das Dreieck.

Entsprechende Punkte liegen nach der ersten dieser Bestimmungen entweder zugleich im Innern des Dreiecks, also auch des umgeschriebenen Kreises, oder beide ausserhalb des Letzteren und in derselben Winkelfläche des Dreiecks oder der eine in dem zwischen einer Dreiecksseite und dem umgeschriebenen Kreise gelegenen Segment und der andere im Scheitelwinkelraum der Gegenecke; den Punkten des umgeschriebenen Kreises entsprechen die unendlich entfernten Punkte der Ebene. Die Centra der eingeschriebenen Kreise entsprechen sich selbst; dem Centrum des umgeschriebenen Kreises entspricht der Schnittpunkt der Höhen, etc. Den Punkten jedes umgeschriebenen Kegelschnitts entsprechen Punkte einer Geraden. Dem Schwerpunkt entspricht die unendlich entfernte Gerade als Harmonikale, die Harmonikalen der unendlich entfernten Punkte umhüllen diejenige Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten berührt; die Tangenten jedes eingeschriebenen Kegelschnitts sind die Harmonikalen von Punkten einer Geraden; etc.

400. In Bezug auf ein Vierseit $aba'b'$ lässt sich das Entsprechen von geraden Linien auf den Satz gründen, nach welchem die harmonisch conjugirten der Schnittpunkte einer Geraden L mit seinen Diagonalen in Bezug auf die entsprechenden Ecken wieder in einer Geraden L' liegen. (Vergl. Art. 303, Aufg. 1 und Art. 327, Aufg. 4.) Nach diesem



Gesetz des Entsprechens fallen nur in den Seiten des Vierecks entsprechende Gerade mit einander zusammen. Allen durch eine Ecke gehenden Geraden entsprechen Gerade aus derselben Ecke, welche jener respective harmonisch conjugirt sind in Bezug auf das Paar der anliegenden Seiten; diese Geraden L, L' bilden somit Büschel in Involution, welche das Seitenpaar zu Doppelstrahlen haben. Wenn die eine der Geraden sich um einen festen Punkt p dreht, so umhüllt die andere einen dem Diagonalendreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt P, welcher die Enveloppe der Polaren von p in Bezug auf die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist. Die von p an diesen Kegelschnitt gehenden Tangenten sind ein Paar entsprechender Geraden und zugleich die Tangenten der durch den Punkt p gehenden, dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte. Wenn umgekehrt die eine der Geraden einen dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt P umhüllt, so geht die entsprechende Gerade stets durch einen festen Punkt p. Dieser Punkt p und der Kegelschnitt P entsprechen einander in Bezug auf das Viereck. Wenn p in einer Diagonale desselben liegt, so degenerirt der ihm entsprechende Kegelschnitt in ein Punktepaar, nämlich den Schnittpunkt der zwei andern Diagonalen und den in Bezug auf die der ersten Diagonale angehörigen Ecken conjugirt harmonischen Punkt von p.

Aufg. Wenn die Punkte c, c' mit den unendlich entfernten imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so bilden die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ein System von confocalen Curven, für welche a, a' und b, b' die reellen und imaginären Brennpunkte bezeichnen, während C das gemeinsame Centrum ist. Nach Art. 301 sind nun die entsprechenden geraden Linien L, L' normal zu einander und da sie die Segmente aa', bb' zwischen den Brennpunkten harmonisch theilen, so sind sie Tangente und Normale von zwei confocalen Kegelschnitten in ihrem Schnittpunkt. Zugleich entspricht jedem Punkte p eine Parabel P, welche die Geraden aa', bb' berührt und die gerade Linie pC zur Directrix hat.

Den Normalen, welche von p an einen der Kegelschnitte des confocalen Systems (S) gezogen werden können, entsprechen die Tangenten, welche der Kegelschnitt S mit dieser Parabel gemein hat. Wenn diese gemeinschaftlichen Tangenten construirt wären, so bestimmen ihre Berührungspunkte in S mit C die fraglichen Normalen. Das Doppelverhältniss der vier Tangenten ist dem der vier Normalen gleich.

Die Fusspunkte der Normalen sind die Schnittpunkte von S mit einem Kegelschnitt H, welcher die Polarcurve von P in Bezug auf C ist und daher, weil P dem zu S harmonischen System ABC eingeschrieben ist, demselben Dreieck ABC umgeschrieben oder eine gleichseitige Hyperbel durch

das Centrum von S sein muss, deren Asymptoten den Axen von S parallel sind. Umgekehrt bestimmt jede dem Dreieck ABC umgeschriebene gleichseitige Hyperbel in S vier Punkte, deren Normalen in einem Punkte p convergiren, der der Parabel P entspricht, welche die Polarcurve jener Hyperbel in Bezug auf S ist.

Nach dem Vorigen entsprechen den Tangenten von S die zugehörigen Normalen und somit der Curve S ihre Evolute, eine Curve von der vierten Classe, welche die Axen von S und die unendlich entfernte Gerade zu Doppeltangenten hat. Sie berührt S in den vier imaginären Punkten, in welchen dieser Kegelschnitt die Seiten des Vierecks berührt, welches durch seine vier Brennpunkte und die imaginären Kreispunkte im Unendlichen bestimmt ist.

Den Punkten der Evolute entsprechen Parabeln, die die Curve S berühren und da vier Parabeln möglich sind, welche S doppelt berühren, so hat die Evolute vier Doppelpunkte.

Wenn eine Parabel P mit S eine dreipunktige Berührung hat, so wird der entsprechende Punkt in E zum Rückkehrpunkt; da aber die Parabel hierzu in eine Ecke von ABC und den Schnitt der Gegenseite mit S degeneriren muss, so hat die Evolute sechs Rückkehrpunkte, welche paarweis in den Seiten des Dreiecks ABC liegen und die conjugirt harmonischen der Durchschnitte von S mit ihnen in Bezug auf die entsprechenden Eckenpaare aa', bb', cc' sind. Als solche liegen sie in einem Kegelschnitt S', welcher dem S als Polarcurve in Bezug auf den Kegelschnitt der vierzehn Punkte (Art. 356, Aufg. 4, 6) entspricht; etc.

401. Das Entsprechen von Punkten in Bezug auf ein festes Viereck $aba'b'$ kann auch nach dem Satze des Art. 329 (vergl. Art. 114, Aufg. 2) geschehen, wonach die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle demselben Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte durch einen andern Punkt gehen. Das so begründete Entsprechen ist ein gegenseitiges. In der Aufg. 3 des Art. 114 ist bereits gezeigt worden, dass der Ort der Centra, d. i. der Pole der unendlich entfernten Geraden für dieses System ein Kegelschnitt ist, welcher die Eckpunkte A, B, C des Diagonalendreiecks enthält und man schliesst nach dem Vorigen, dass diess für den Ort der Pole jeder geraden Linie gelten müsse. (Art. 309, Aufg. 1; Art. 329). Die Punkte A, B, C, welche die allen Kegelschnitten des Systems gemeinschaftliche Gruppe A, B, C bilden, sind singuläre Punkte der so begründeten Verwandtschaft ebener Figuren; denn der entsprechende Punkt ist für jeden von ihnen unbestimmt, nämlich ein Punkt in der betreffenden Gegenseite des Dreiecks ABC.

Diese Verwandtschaft enthält die der Collineation als einen speciellen Fall. Die Grundgleichungen der letzteren drücken die Coordinaten des zweiten Systems in Form von gleichbenannt ge-

brochenen linearen Functionen der Coordinaten des ersten Systems aus (Art. 80) und man erhält eine allgemeinere Verwandtschaft, wenn man die Nenner dieser Ausdrücke als ungleich voraussetzt. Dann ist

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3},\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_4x + b_4y + c_4} \text{ oder } x' = \frac{L_1}{L_3},\ y' = \frac{L_2}{L_4},$$

und einer geraden Linie $y' = ax' + b$ des einen Systems entspricht die durch

$$(a_2x + b_2y + c_2)\,(a_3x + b_3y + c_3) = (a_4x + b_4y + c_4)\,\{a\,(a_1x + b_1y + c_1) + b\,(a_3x + b_3y + c_3)\}$$

oder $L_2L_3 = L_4\,(aL_1 + bL_3)$ dargestellte Curve, d. h. ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Punkte $L_1 = L_3 = 0$, $L_2 = L_4 = 0$, $L_3 = L_4 = 0$ hindurchgeht. Der Form nach allgemeiner kann man die x', y' durch Relationen von der Form $A_1x' + A_2y' + A_3 = 0$, $B_1x' + B_2y' + B_3 = 0$, in denen die A, B lineare Functionen der x, y bedeuten, verbunden voraussetzen, denn sie liefern

$$x' = \frac{A_2B_3 - A_3B_2}{A_1B_2 - A_2B_1},\ y' = \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$ Die Substitution in $y' = ax' + b$ giebt $(A_3B_1 - A_1B_3) = a\,(A_2B_3 - A_3B_2) + (A_1B_2 - A_2B_1)$ und begründet dieselben Schlüsse*). Ebenso entspricht einem demselben Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitt immer eine gerade Linie.

Danach entspricht dem Schnittpunkt von zwei Geraden der vierte gemeinschaftliche Punkt der zwei entsprechenden Kegelschnitte, welche durch A, B, C gehen und umgekehrt; einem Strahlbüschel oder einer Schaar von Parallelen also ein Büschel von Kegelschnitten, etc.

Aufg. 1. Wenn man die Coefficienten der beiden Relationen $A_1x' + .. = 0$, $B_1x' + .. = 0$ unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten so specialisirt, dass dieselben die Form $y'(x^2 + y^2) = -y$, $x'(x^2 + y^2) = -x$ annehmen, so entsprechen den Geraden im einen Kreise im andern System; der eine der Punkte A, B, C ist der gemeinschaftliche endlich entfernte Schnittpunkt dieser Kreise, die beiden andern sind die imaginären Kreispunkte im Unendlichen. (Kreisverwandschaft; circulare Inversion)

Sowohl die allgemeine als diese speciellere Verwandtschaft liefern Transformationen bekannter Sätze in neue.

---

*) Setzt man in der einen der obigen Relationen z. B. $B_1x' + B_2y' + B_3 = 0$ die Constanten der linearen Functionen B sämmtlich gleich Null, so erhält man die Reciprocität als speciellen Fall der in Rede stehenden Verwandtschaft.

Aufg. 2. Ein Beispiel der allgemeinen Transformation dieses Art. liefert die Figur von der perspectivischen Lage zweier projectivischen Strahlbüschel, welche den Scheitelstrahl entsprechend gemein haben. Daraus entspringt der Satz: Wenn zwei projectivische Büschel von Kegelschnitten $S + kS' = 0$, $U + kU' = 0$ (Art. 329) durch dieselben drei Punkte A, B, C gehen, so dass der vierte gemeinschaftliche Punkt des einen D, der des andern E sei, und so liegen, dass der durch die fünf Punkte A, B, C, D, E bestimmte Kegelschnitt sich selbst entspricht, so liegen die vierten Durchschnittspunkte der entsprechenden Kegelschnitte beider Büschel sämmtlich auf einem dem Dreieck A, B, C umgeschriebenen Kegelschnitt.

Besonders bequem erlaubt diese Methode von Kegelschnitten zu Curven höherer Ordnungen überzugehen; so giebt die Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Büschel eine Generation von Curven vierter Ordnung. etc.

Vierundzwanzigstes Kapitel.

Von der Methode der Projection.

---

402. Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, wie die allgemeine Idee der Verwandtschaft oder des Entsprechens der Elemente von zwei geometrischen Figuren in mannichfacher Weise specialisirt werden kann. Die Methode der Projection bietet die einfachste und anschaulichste Begründung einer solchen Beziehung dar.

Wenn alle Punkte einer Figur mit irgend einem festen Punkte im Raume (O) durch gerade Linien verbunden werden, so bestimmen diese Linien einen Kegel, als dessen Spitze der Punkt O bezeichnet wird; die Durchschnittslinie dieses Kegels mit einer beliebigen Ebene bildet eine Figur, die man die Projection der gegebenen Figur auf die Ebene nennt. Die Ebene, durch welche der Kegel so geschnitten wird, heisst die Projectionsebene. Man bezeichnet den Kegel dann auch als den projicirenden Kegel und seine Spitze als das Centrum der Projection. Jedem Punkte in der einen Figur entspricht ein Punkt in der andern. Denn wenn ein beliebiger Punkt A

mit der Spitze O durch eine gerade Linie verbunden wird, so ist der Punkt a, in welchem diese die Projectionsebene durchschneidet, die Projection des gegebenen Punktes A auf diese Ebene.

Eine gerade Linie wird immer als gerade Linie projicirt. Denn indem man alle Punkte der geraden Linie mit dem Centrum der Projection durch gerade Linien verbindet, erhält man eine Ebene, welche durch ihren Durchschnitt mit der Projectionsebene die Projection der gegebenen Geraden bestimmt.

Diese Ebene wird als die projicirende Ebene der geraden Linie bezeichnet. Wenn irgend eine Anzahl von Punkten in der einen Figur in gerader Linie liegen, so liegen auch die entsprechenden Punkte der andern Figur in einer geraden Linie; wenn eine Anzahl gerader Linien in der einen Figur durch denselben Punkt hindurchgehen, so schneiden sich auch die entsprechenden geraden Linien der andern in einem Punkte, nämlich dem entsprechenden Punkte jenes ersteren.

403. Jede ebene Curve wird in eine andere Curve von derselben Ordnung projicirt.

Denn wenn die gegebene Curve durch eine gerade Linie in einer Anzahl von Punkten A, B, C, D . . . geschnitten wird, so wird ihre Projection durch die Projection der geraden Linie in den entsprechenden Punkten a, b, c, d . . . geschnitten, deren Anzahl mit derjenigen der ersteren übereinstimmen muss. Aber die Ordnung einer Curve wird durch die Zahl von Punkten geometrisch bestimmt, welche sie mit einer geraden Linie gemein haben kann. Wenn unter den Punkten, welche die Curve mit einer geraden Linie gemein hat, neben reellen auch imaginäre sind, so bleibt die Zahl der reellen und imaginären Punkte durch Projection ungeändert. Wenn zwei Curven sich durchschneiden, so schneiden sich ihre Projectionen in derselben Anzahl von Punkten; reellen Durchschnittspunkten entsprechen reelle, imaginären aber imaginäre.

Jede Tangente der einen Curve wird in eine Tangente der andern Curve projicirt. Denn jede gerade Linie zwischen den Punkten A, B der einen Curve wird als eine gerade Linie ab projicirt, welche die entsprechenden Punkte ihrer Projection mit einander verbindet. Wenn aber die Punkte A, B in einen einzigen Punkt zusammenfallen, so fallen auch a, b zusammen und die gerade Linie ab ist eine Tangente der Projection

der Curve. Wenn zwei Curven einander in einer Anzahl von Punkten berühren, so berühren ihre Projectionen einander in ebenso viel, nämlich in den entsprechenden Punkten. Wir brauchen nur anzudeuten, dass auch die Classe einer Curve durch Projection nicht geändert werden kann.

404. Wenn eine durch das Centrum der Projection parallel zur Projectionsebene gelegte Ebene die Ebene des Originalsystems in einer geraden Linie AB durchschneidet, so projicirt sich jedes Büschel geradliniger Strahlen im Originalsystem, welches seinen Scheitel in dieser geraden Linie AB hat, in ein System von Parallellinien in der Projectionsebene. Denn eine gerade Linie, welche vom Centrum der Projection nach einem beliebigen Punkte jener Geraden AB gezogen wird, begegnet der Projectionsebene erst in unendlicher Entfernung, und insofern jener Punkt Durchschnittspunkt von zwei oder mehreren geraden Linien ist, müssen sich diese als solche gerade Linien projiciren, deren gemeinschaftlicher Punkt in unendlicher Entfernung liegt.

Umgekehrt wird jedes System von parallelen geraden Linien in der Originalebene in ein solches Büschel gerader Linien projicirt, welches seinen Scheitel in einem Punkte der geraden Linie DF hat, in der eine durch das Centrum der Projection parallel zur Originalebene gelegte Ebene die Projectionsebene schneidet. So führt uns die Methode der Projectionen ganz naturgemäss zu dem Schlusse, dass ein beliebiges System von Parallellinien als ein durch einen unendlich entfernten Punkt gehendes Büschel betrachtet werden kann, denn die Projectionen solcher geraden Linien auf eine beliebige Ebene gehen durch einen und denselben endlich entfernten Punkt; sie lehrt uns ebenso, dass alle unendlich entfernten Punkte in einer Ebene als in einer geraden Linie gelegen angesehen werden können, denn wir haben gezeigt, dass die Projectionen aller der Punkte, in welchen Parallellinien sich schneiden, in der geraden Linie DF in der Projectionsebene liegen; wir hätten das Nämliche auch aus dem Umstande schliessen können, dass jede gerade Linie nur einen Punkt in unendlicher Entfernung haben kann — wir schliessen uns dem üblichen Sprachgebrauch genau an, indem wir denselben als ihre Richtung bezeichnen — und dass somit die unendlich entfernten Punkte einer Ebene nur eine Linie ersten Grades, d. h. eine gerade Linie bilden können. Wir bemerken endlich, dass die

Durchschnittslinie der Projectionsebene mit der Ebene der Figur zugleich der Ort der Durchschnittspunkte der geraden Linien der Figur mit ihren respectiven Projectionen ist.

Man nennt diese Gerade, welche in beiden Systemen sich selbst entspricht, die Spur der einen Ebene in der andern und jede der beiden andern Geraden, welche in jeder Ebene der unendlich entfernten Geraden der andern entsprechen, Fluchtlinie der einen Ebene in der andern.

405. Wenn irgend eine Eigenschaft, die sich nicht auf die Grösse von geradlinigen Strecken oder von Winkeln, sondern nur auf die Lage gerader Linien als durch gewisse Punkte gehend oder gewisse Curven berührend, oder auf die Lage von Punkten u. s. w. bezieht, für eine gegebene Curve wahr ist, so bleibt diese Eigenschaft für alle die Curven gültig, in welche die gegebene projicirt werden kann. Wir erkennen sofort als einen Satz dieser Art den folgenden: Wenn durch einen beliebigen festen Punkt in der Ebene eines Kreises eine Sehne gezogen wird, so schneiden sich die in den Endpunkten derselben an ihn gelegten Tangenten in einer festen geraden Linie.

Da wir nun beweisen werden, dass jede Curve vom zweiten Grade in einen Kreis projicirt werden kann, so zeigt die Methode der Projectionen unmittelbar, dass die Eigenschaften der Pole und Polaren nicht nur für den Kreis, sondern auch für alle Kegelschnitte wahr sind.

Auch die Sätze von Pascal und Brianchon sind Eigenschaften derselben Art, und es ist daher hinreichend, sie für den Fall des Kreises zu beweisen, um zu wissen, dass sie für alle Kegelschnitte wahr sind.

406. Eigenschaften dieser Art, welche, wenn sie für irgend eine Figur wahr sind, auch für die Projection derselben gelten, heissen projectivische Eigenschaften. Zu diesen Eigenschaften gehören ausser der Classe derjenigen, welche im vorigen Artikel bezeichnet worden sind, auch einige solche, welche sich auf die Grösse geradliniger Strecken und Winkel beziehen; wir wissen z. B. dass das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten in einer geraden Linie $(ABCD)$, da es durch das Doppelschnittverhältniss des Büschels $(O\,.\,ABCD)$ am Centrum der Projection gemessen wird, mit dem der vier Punkte $(abcd)$ übereinstimmen muss, in welchen diess Büschel durch eine beliebige Transversale

35*

geschnitten wird. Doppelschnittverhältnisse werden durch Projection nicht geändert. (Vergl. fünfzehntes und sechszehntes Kapitel.)

Oder, wenn zwischen den durch eine beliebige Anzahl von Punkten in einer geraden Linie bestimmten geradlinigen Strecken eine Gleichung von der Form

$$AB.CD.EF + k.AC.BE.DF + l.AD.CE.BF + \ldots = 0$$

besteht, in welcher jedes Glied die nämlichen Punkte nur in verschiedener Ordnung enthält, so ist diese Relation projectivisch. Denn nach Art. 57 kann man für AB das Verhältniss $OA.OB.\sin AOB : OP$ und für die übrigen Strecken entsprechende Ausdrücke substituiren, und die Gleichung enthält nach dieser Substitution in allen Gliedern das Product $OA.OB.OC.OD.OE.OF$ im Zähler und die Grösse $\overline{OP}^3$ im Nenner; durch Division mit diesen Factoren wird sie daher auf eine Relation zwischen den Sinus der am Punkte O gebildeten Winkel zurückgeführt und ist demnach projectivisch.

Auch ist leicht zu erkennen, dass die Punkte A, B, C, D, E, F nicht in einer geraden Linie zu liegen brauchen, um diese Projectivität zu begründen; wenn die Senkrechte OP nicht für alle die in der Relation auftretenden Segmente die nämliche ist, so ist nur nöthig, dass dieselben so geordnet sind, dass in jedem Gliede der Gleichung im Nenner das nämliche Product solcher zugehörigen Perpendikel $OP.OP'.OP''\ldots$ auftritt. Als ein Beispiel dafür erwähnen wir den Satz: Wenn gerade Linien, welche von den Ecken eines Dreiecks ABC nach demselben Punkte seiner Ebene gezogen werden, die Gegenseiten desselben in den Punkten a, b, c durchschneiden, so ist $Ab.Bc.Ca = Ac.Ba.Cb$. Weil diese Relation von der eben besprochenen Art ist, so reicht es hin, sie für irgend eine Projection des Dreiecks ABC zu beweisen; machen wir für dieselbe die Voraussetzung, dass der Punkt C in unendlicher Entfernung projicirt sei, so werden die geraden Linien AC, BC, Cc einander parallel und die Relation wird $Ab.Bc = Ac.Ba$, deren Wahrheit ohne Weiteres ersichtlich ist.

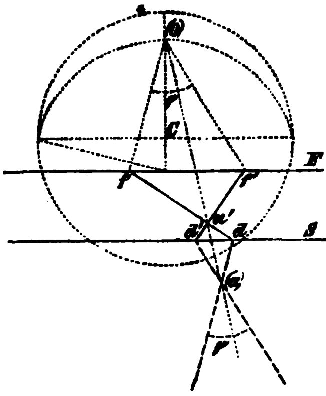
407. Offenbar reicht es zum Beweise solcher projectivischen Eigenschaften von Figuren hin, für die einfachste derjenigen Figuren den Beweis zu liefern, in welche die gegebene projicirt werden kann; z. B. was oft vorkommt, für eine solche, in welcher eine gewisse gerade Linie der Figur in unendlicher Entfernung erscheint. Wenn z. B. gefordert wäre, die harmonischen Eigen-

schaften eines vollständigen Vierecks $ABCD$ zu untersuchen, dessen Gegenseitenpaare sich in E und F und dessen Diagonalen sich in G durchschneiden, so verbinden wir alle Punkte dieser Figur mit dem zum Centrum der Projection gewählten Punkte O im Raume durch gerade Linien und schneiden die Verbindungslinien durch eine zur Ebene OEF parallele Ebene, so dass EF in unendlicher Entfernung projicirt erscheint; die Projection $abcd$ des Vierecks ist dann ein Parallelogramm, weil die Durchschnittspunkte seiner Gegenseitenpaare in unendlicher Entfernung liegen. Jedes Viereck kann demnach in ein Parallelogramm projicirt werden. Da nun die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren, so bestimmen die Endpunkte, der Mittelpunkt und der unendlich entfernte Punkt einer jeden, als in welchem sie der geraden Linie ef begegnet, eine harmonische Theilung, und man schliesst aus der projectivischen Natur dieser Relation, dass in jedem Viereck eine Diagonale (AC) durch die andre (in G) und durch die gerade Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten harmonisch getheilt wird.

Aufg. Wenn zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ so gelegen sind, dass die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ in einer geraden Linie liegen, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken AA', BB', CC' in einem Punkte.

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, wenn man, wie es seine projectivische Natur erlaubt, die Figur, auf welche er sich bezieht, so projicirt, dass die gerade Linie, in welcher die entsprechenden Seiten beider Dreiecke sich schneiden, in unendlicher Entfernung erscheint; denn er geht alsdann in den einfachen Ausdruck der Aehnlichkeit und ähnlichen Lage beider Dreiecke über: Wenn in zwei Dreiecken abc, $a'b'c'$ die Seiten des einen den Seiten des andern parallel sind, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken in einem Punkte; welcher einfach aus der Bemerkung hervorgeht, dass die geraden Linien aa' und bb' beide die Linie cc' in dem nämlichen Verhältniss schneiden.

408. Nach dem Vorigen entsprechen sich ebene Systeme nach der Methode der Centralprojection in der Weise, dass alle Paare entsprechender Punkte in Geraden eines Büschels liegen und alle Paare entsprechender Geraden sich in Punkten einer Reihe begegnen. Diese Beziehung bleibt auch nach dem Zusammenlegen beider Systeme durch eine Drehung um ihre gemeinschaftliche Schnittlinie ungestört und man erkennt daraus die Identität der centralprojectivischen Relation ebener Systeme mit der in Art. 377, 378 charakterisirten collinearen Lage



collinearverwandter Systeme. Denn man erkennt zuerst, dass der Winkel von zwei sich schneidenden Geraden durch die ihnen parallelen Strahlen aus dem Centrum an diesem letzteren gebildet wird und daher, dass die Umlegung der Ebene O, F (für F als die Fluchtlinie der Ebene des Winkels) durch Verbindung des umgelegten Centrums (O) mit den Fluchtpunkten f, f' der Schenkel, d. i. den Schnittpunkten ihrer Bilder mit F die wahre Grösse des Winkels γ der Geraden liefert. In Folge dessen ist insbesondere der von einer dieser Verbindungslinien mit F eingeschlossene Winkel der Winkel der Geraden gegen die Spur S der Ebene des Winkels. Wenn man also die Fluchtpunkte der Geraden in der Ebene mit dem mit der Ebene O, F umgelegten Centrum (O) durch Gerade verbindet, und zu diesen durch die entsprechenden Durchgangspunkte Parallelen zieht, so geben diese die Lagen jener Geraden nach der Ueberführung in die Bildebene an; insbesondere entspricht diesem Gesetze gemäss jede durch (O) gehende Gerade sich selbst. Es liegen also, weil entsprechende Punkte die Schnittpunkte von entsprechenden Geraden sind, auch nach der Zusammenlegung beider Systeme noch die entsprechenden Punkte in Strahlen eines Büschels. Daher sind beide Systeme collinear und in collinearer Lage, die Spur S der Ebene ist die Axe und (O), die Umlegung des Centrums O mit der Ebene (O, F), ist das Centrum der Collineation; die Fluchtlinien F und F^* sind die Gegenaxen beider Systeme und die Gegenaxe F^* ist von (O) eben so weit entfernt, wie S von F. Aus der Collineationsaxe, der Gegenaxe F und dem umgelegten Centrum (O) bestimmt sich zu dem als gegeben gedachten einen System das andere durch lineare Construction, also zum Original das Bild, ebenso wie zum Bild das Original.

Ist das eine von beiden ein Kreis, so ist das andere ein Kegelschnitt; die Eigenschaften, welche die Kegelschnittslinien vor Allen charakterisiren, die Projectivität der Büschel über vier festen Punkten und der Reihen durch vier feste Tangenten, ergeben sich

aus elementaren Eigenschaften des Kreises, nämlich aus der Gleichwinkligkeit der über vier festen Punkten stehenden Büschel und aus der Gleichheit der Winkel über solchen Punktereihen in zwei Tangenten vom Centrum. (Vergl. Art. 417, Aufg. 2.)

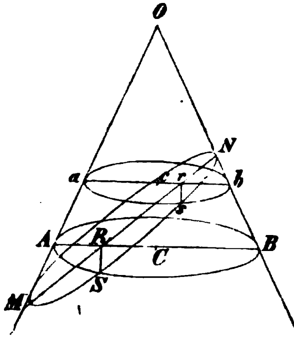
409. Die von den Peripheriepunkten des Kreises nach dem Centrum der Projection gehenden Geraden bilden einen projicirenden Kegel, dessen Schnitt mit der Bildebene die Projection oder das Bild des Kreises ist. Die Theorie der ebenen Schnitte des Kegels über kreisförmiger Basis verbindet daher die allgemeine vorher charakterisirte Methode mit dem Gegenstand dieser Untersuchungen.

Die Schnitte eines Kegels mit parallelen Ebenen sind ähnliche Curven. Denn wenn wir in der Ebene der einen Curve einen Punkt A und in der Ebene der andern Curve den entsprechenden d. h. auf OA gelegenen Punkt a annehmen und von ihnen nach einem beliebigen Paar anderer entsprechender Punkte B, b Radien vectoren ziehen, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken OAB und Oab die Verhältnissgleichheit $OA : Oa = AB : ab$, und weil jeder Radius vector der einen Curve zu dem entsprechenden Radius vector der andern in dem nämlichen constanten Verhältniss $OA : Oa$ steht und die entsprechenden Winkel übereinstimmen, so sind die beiden Curven ähnlich. (Art. 245.) Jeder über einer circularen Basis stehende Kegel wird durch eine Ebene, welche seiner Basis parallel ist, in einem Kreise geschnitten. Wenn wir die entsprechenden Punkte A, a als die Mittelpunkte der beiden Curven denken, so beweist das Vorhergehende die gegenwärtige Behauptung.

410. Die ebenen Schnitte eines Kegels über kreisförmiger Basis sind entweder Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln.

Ein Kegel zweiten Grades heisst gerade, wenn die gerade Verbindungslinie seiner Spitze mit dem Centrum des Kreises, welcher ihm zur Basis dient, auf der Ebene dieses Kreises senkrecht ist; diese Linie selbst heisst alsdann die Axe des Kegels. Wenn dieselbe auf der Ebene der Basis nicht senkrecht steht, so wird der Kegel als schief bezeichnet.

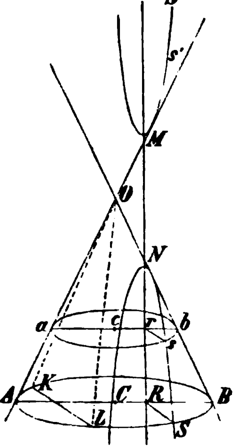
Obgleich die Untersuchung der Schnitte des schiefen Kegels mit derjenigen der Schnitte des geraden Kegels vollkommen übereinstimmt, so wollen wir sie doch getrennt führen, um die Schwierigkeiten, welche in der richtigen Auffassung räumlicher Figuren



liegen können, durch die vorherige Betrachtung der einfacheren Figur zu vermindern, welche dem Falle des geraden Kegels entspricht. Man lege eine Ebene OAB durch die Axe OC des Kegels senkrecht zur Schnittebene und betrachte sie als die Ebene der Zeichnung; die Schnittebene $MSsN$ steht dann ebensowohl wie die Basisebene ASB senkrecht zur Ebene der Zeichnung, und es ist ebenso mit der geraden Linie RS, in der sich beide letzt bezeichnete Ebenen schneiden. Wir setzen alsdann zuerst voraus, dass die gerade Linie MN, in welcher die Schnittebene die Ebene OAB schneidet, den beiden Seiten OA und OB auf derselben Seite des Scheitels begegnet, wie die Figur es angiebt. Durch irgend einen Punkt s der Schnittcurve legen wir eine zur Basis parallele Ebene und erhalten dadurch nach Euklid III. 35 für das Quadrat der Ordinate des Kreises $RS^2 = AR \cdot RB$, und ebenso $rs^2 = ar \cdot rb$.

Wenn man aber die ähnlichen Dreiecke ARM und arM, BRN und brN betrachtet, so folgt $AR.RB : MR.RN = ar.rb : Mr.rN$, und damit $RS^2 : rs^2 = MR \cdot RN : Mr \cdot rN$.

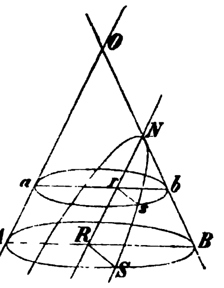
Die Schnittcurve $MSsN$ besitzt demnach die Eigenschaft, dass das Quadrat einer beliebigen Ordinate rs zu dem Rechteck aus den von ihr in der Linie MN bestimmten Abschnitten in dem constanten Verhältniss $RS^2 : MR \cdot RN$ steht. Nach Art. 112 ist der betrachtete Kegelschnitt eine **Ellipse**, für welche MN die Hauptaxe ist und deren kleine Axe sich aus der Bemerkung bestimmt, dass ihr Quadrat zu MN^2 in dem gegebenen Verhältniss $RS^2 : MR \cdot RN$ stehen muss.



Wir nehmen zweitens an, eine der Seiten OA werde von der geraden Linie MN erst in der Verlängerung geschnitten. Der vorige Beweis bleibt völlig unverändert, nur in dem Endergebniss desselben tritt die Veränderung ein, dass nun das constante Verhältniss zwischen dem Quadrat der Or-

dinate rs und dem Rechteck $Mr \,.\, rN$ aus den Abschnitten stattfindet, welche ein äusserer Theilpunkt in der Strecke MN bestimmt. Die Schnittcurve ist in diesem Falle eine Hyperbel, welche aus den beiden Aesten NsS und $Ms'S'$ besteht.

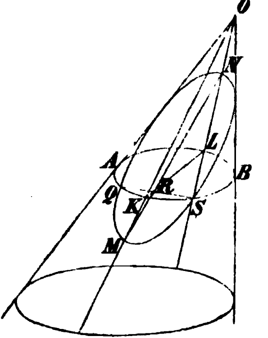
Wenn endlich drittens die gerade Linie MN zu einer der Seiten parallel ist, so ist, wegen $AR = ar$ und $RB : rb = RN : rN$, das mit dem Rechteck $ar \,.\, rb$ gleiche Quadrat der Ordinate rs zu der Abscisse rN in dem constanten Verhältniss $RS^2 : RN$ oder $AR \,.\, RB : RN$.



Demnach ist die Schnittcurve in diesem Falle eine Parabel*). Da die Projectionen der Tangenten des Kreises in den Punkten A, B die Tangenten des Kegelschnitts in M, N sind (Art. 403) und in dem Fall der Parabel der Punkt M und die entsprechende Tangente in unendlicher Ferne liegt, so folgt auch hieraus die Berührung der Parabel mit der unendlich entfernten Geraden.

411. Wir lassen hiernach den Beweis für die Schnitte des schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis folgen. Die Ebene der Zeichnung sei durch die Spitze des Kegels O und den Mittelpunkt C des Basiskreises senkrecht zur Ebene desselben gelegt; QS sei die gerade Durchschnittslinie der Schnittebene mit der Ebene des Kreises $AQSB$; LK der die Sehne QS halbirende Durchmesser und MN die gerade Linie, welche die durch ihn und die Kegelspitze gelegte Ebene mit der Schnitt-

*) In der Geometrie der Alten betrachtete man bis auf Appollonius (250 v. Chr.) die Kegelschnitte nur am geraden Kegel und nur unter der Voraussetzung, dass die Schnittebene zu einer Kegelseite (der einen Seite des Axendreiecks) senkrecht sei, d. i. dass MN senkrecht auf OB. Darnach wurden die Kegelschnitte eingetheilt in Schnitte des rechtwinkligen, spitz- und stumpfwinkligen Kegels und nach Eutochius, dem Commentator des Apollonius, wurde die Schnittcurve Parabel, Ellipse oder Hyperbel genannt, je nachdem und weil der Winkel des Kegels gleich, kleiner oder grösser als ein rechter Winkel war. Schon Archimedes kannte die Namen Parabel und Ellipse. Apollonius war es aber, welcher zuerst bewies, dass alle drei Kegelschnitte aus dem nämlichen Kegel geschnitten werden können und der, ebenso wie Pappus ihnen die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel aus dem im Artikel 202 angegebenen Grunde beilegte.



ebene gemein hat. Mit diesen Voraussetzungen entwickelt sich der Beweis ganz wie vorher: Das Quadrat der Ordinate RS ist dem Rechteck $LR \,.\, RK$ gleich, und wenn wir wie vorher eine zur Basis parallele Ebene einführen, so ist das Quadrat der ihr angehörigen Ordinate rs gleich dem entsprechenden Rechteck lr, rk; wir beweisen sodann aus den ähnlichen Dreiecken KRM, krM und LRN, lrN in der Ebene OLK ebenso wie in dem Falle des geraden Kegels, dass das Verhältniss der Quadrate $RS^2 : rs^2$ mit dem Verhältniss der Rechtecke identisch sei, welche aus den durch den Fusspunkt der Ordinate bestimmten Abschnitten von MN gebildet werden; und dass demnach die Schnittcurve ein Kegelschnitt ist, für welchen MN der die Sehne QS halbirende Durchmesser ist, nämlich speciell eine Ellipse, wenn MN die geraden Linien OL und OK auf derselben Seite der Kegelspitze schneidet, eine Hyperbel, wenn diese Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der Spitze liegen, und eine Parabel, wenn einer derselben unendlich entfernt ist.

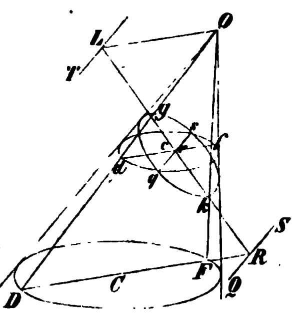
Die in dem Beweise gemachte Voraussetzung, dass die kreisförmige Basis reelle Punkte mit der Schnittcurve gemein habe, ist in jedem Falle statthaft, weil jeder der Kreise, welche die der Basis parallelen Ebenen in der Kegelfläche bestimmen, als Basis betrachtet werden kann.

Die Gattungen der Kegelschnitte: Hyperbel, Parabel, Ellipse als Curven, welche zwei reelle und verschiedene oder zusammenfallende oder zwei imaginäre Punkte in unendlicher Ferne enthalten, werden charakterisirt durch die Lagen der Schnittebene, für welche die parallele Ebene durch die Spitze des Kegels denselben in reellen oder zusammenfallenden oder imaginären zwei Geraden schneidet.

412. Wenn ein Kreisschnitt des Kegels von einer Ebene in der Geraden QS geschnitten wird, so begegnen der zu QS conjugirte Durchmesser in dieser Ebene und in der Ebene des Kreises QS sich in demselben Punkte.

Schneidet qs den Kreis in rellen Punkten, so muss der in jeder Ebene dazu conjugirte Durchmesser seinen Mittelpunkt r ent-

halten; es ist also nur der Fall zu untersuchen, wo QS nicht in reellen Punkten schneidet. In Art. 409 ward bewiesen, dass der Durchmesser df, welcher die zu qs parallelen Sehnen eines beliebigen Kreisschnitts halbirt, in einen Durchmesser Df projicirt wird, der die gleichgerichteten Sehnen eines parallen Schnittes halbirt. Der Ort der Mittelpunkte aller zu qs parallelen Sehnen ist die Ebene Odf; der zu QS in irgend einem Schnitte conjugirte Durchmesser ist daher die Durchschnittslinie der Ebene Odf mit der Ebene dieses Schnittes und geht durch den Punkt R, in welchem QS die Ebene Odf schneidet.



Wenn in demselben Falle die zu QS im Kreise und in einem andern Schnitte conjugirten Durchmesser in Segmente RD, RF; Rg, Rk geschnitten werden, so verhalten sich die Rechtecke $DR \,.\, RF$ und $gR \,.\, Rk$ wie die Quadrate des zu QS parallelen und des conjugirten Durchmessers des Schnittes. Denn wenn qs den Kreis schneidet, so ist $rs^2 = dr \,.\, rf$. Für den allgemeinen Fall ist aber so eben bewiesen, dass die Geraden gk, df, DF in einer die Spitze des Kegels enthaltenden Ebene liegen; daher sind die Punkte d, D Projectionen von g und liegen mit ihm in einer durch die Spitze gehenden Geraden. Wie in Art. 411 folgt daher aus ähnlichen Dreiecken $dr.rf : DR.RF = gr.rk : gR.Rk$; und weil $dr.rf$ zu $gr.rk$ sich verhält wie die Quadrate der parallelen Halbdurchmesser, so stehen auch $DR.RF$ und $gR \,.\, Rk$ in demselben Verhältniss. Dieser Satz gestattet, für den Schnitt $gskq$ und die Gerade QS das Product $DR \,.\, RF$ oder das Quadrat der durch R gehenden Tangente des Kreisschnittes zu bestimmen, dessen Ebene durch QS geht.

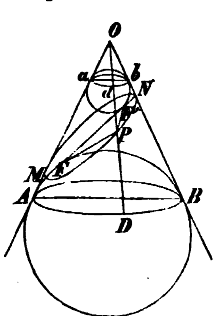
413. Wenn man durch die Spitze des Kegels parallel zur Ebene der kreisförmigen Basis eine Ebene legt, welche die Schnittebene in der geraden Linie TL durchschneidet, so folgt als ein specieller Fall des Vorigen, dass $gL \,.\, Lk : OL^2$ in dem Verhältniss der Quadrate der parallelen Durchmesser des Schnittes sind.

Wir schliessen daraus, dass es eine unbestimmte Aufgabe ist, zu einem gegebenen Kegelschnitt und einer geraden Linie TL in seiner Ebene die Spitze O eines Kegels, der den ersteren zur

Leitcurve hat, so zu bestimmen, dass der von einer zu OTL parallelen Ebene in ihm bestimmte Schnitt ein Kreis sei. Denn wenn wir den zu der geraden Linie TL conjugirten Durchmesser der Schnittcurve ziehen, so ist die Entfernung des Punktes L von der Spitze des Kegels durch das Vorhergehende bestimmt, und OL muss in der zu TL normalen Ebene liegen, weil sie dem Durchmesser eines zu TL normalen Kreises parallel ist; die Spitze O kann demnach in jedem Punkte eines gewissen Kreises in einer zu TL senkrechten Ebene genommen werden.

Ein Kegelschnitt kann immer in der Art in einen Kreis projicirt werden, dass eine in seiner Ebene beliebig gewählte gerade Linie TL, welche ihn nicht schneidet, in unendlicher Entfernung projicirt wird. Man hat dazu die Spitze O des projicirenden Kegels nur so zu wählen, dass die Ebene OTL zu den Ebenen der kreisförmigen Schnitte parallel ist; jede der zu OTL parallelen Ebenen erfüllt dann als Projectionsebene die vorgeschriebenen Bedingungen.

414. Es ist erwähnenswerth, dass auch die Brennpunkte und Directricen sich sehr einfach an die Betrachtung des geraden Kegels anknüpfen lassen. Es lassen sich in jeden geraden Kegel zwei Kugeln so einschreiben, dass sie zugleich die Schnittebene berühren; die Berührungspunkte sind die Brennpunkte und jedem entspricht als Directrix der Schnittcurve die gerade Linie, in welcher die Ebene des Berührungskreises der zugehörigen Kugel die Schnittebene durchschneidet. Wenn man einen beliebigen Punkt P der Schnittcurve mit der Spitze des Kegels durch eine gerade Linie verbindet und die Durchschnittspunkte derselben mit den Ebenen der Berührungskreise durch D, d bezeichnet, so hat man die Relationen $PD = PF$, $Pd = PF'$, und demnach $PF + PF' = Dd$, und es lässt sich sofort erkennen, dass diese constante Länge mit der grossen Axe AB der Schnittcurve übereinstimmt. Der Punkt R, in welchem die geraden Linien FF' und AB bei genügender Verlängerung sich schneiden, ist ein Punkt der Directrix, oder der Polare des Brennpunktes, weil nach den Eigenschaften des Kreises die vier Punkte N, F, M, R eine harmonische Theilung bilden.



Man kann leicht beweisen, dass der Parameter der Schnitt-

curve constant ist, solange ihre Ebene den nämlichen Abstand von der Kegelspitze besitzt.

Zus. Der Ort der Scheitel aller geraden Kreiskegel, aus welchen eine gegebene Ellipse (Hyperbel, Parabel) geschnitten werden kann, ist eine Hyperbel (Ellipse, Parabel) in einer zur Schnittebene normalen Ebene, welche die Brennpunkte der Ellipse (Hyperbel, Parabel) zu Scheiteln und ihre Scheitel zu Brennpunkten hat. Denn die Differenz von MO und NO ist constant als gleich $MF' - NF'$*).

415. Wenn ein Kegelschnitt und ein Punkt in seiner Ebene gegeben ist, so kann man den ersteren in einen Kreis projiciren, für welchen die Projection dieses Punktes das Centrum ist; denn wir haben ihn nur so zu projiciren, dass die Projection der Polare jenes Punktes in unendlicher Entfernung erscheint. (Art. 164.)

Zwei beliebige Kegelschnitte können so projicirt werden, dass beide sich als Kreise darstellen; denn wenn wir den einen derselben so in einen Kreis projiciren, dass eine seiner Durchschnittssehnen mit dem andern in unendlicher Entfernung projicirt wird, so muss die Projection des zweiten Kegelschnitts auch ein Kreis werden, weil sie mit dem ersten durch dieselben unendlich entfernten Punkte gehen muss.

Zwei Kegelschnitte, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, können in concentrische Kreise projicirt werden.

---

*) Mit Hilfe dieses Principes können Eigenschaften der am Brennpunkte eines Kegelschnitts gespannten Winkel aus den Eigenschaften von Kugelkreisen abgeleitet werden. Z. B. man weiss, dass für einen festen Punkt P in der Kugeloberfläche und einen beliebigen festen Kreis auf der Kugel die Relation $\tan \frac{1}{2} AP \cdot \tan \frac{1}{2} BP =$ const. besteht, wenn A und P die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit einem durch den Punkt P gehenden grössten Kreise der Kugel bezeichnen.

Nehmen wir nun einen Kegel, dessen Basis der erstere Kreis und dessen Spitze das Centrum der Kugel ist, und denken ihn durch eine beliebige Ebene geschnitten; so erhalten wir den Satz: Wenn man durch einen Punkt p in der Ebene eines Kegelschnitts eine gerade Linie zieht, welche den letzteren in den Punkten a, b schneidet, so ist das Product der Tangenten von den Hälften der Winkel, welche ap, bp an der Spitze des Kegels spannen, constant. Da nun diese Eigenschaft für die Spitze jedes geraden Kegels gelten muss, aus welchem der gedachte Kegelschnitt geschnitten werden kann, und da der Brennpunkt des letzteren ein Punkt in dem Orte dieser Spitzen ist, so erhält man für den Brennpunkt die Relation $\tan \frac{1}{2} afp . \tan \frac{1}{2} bfp =$ const. (Vergl. Art. 234, Aufg. 9.)

Dazu projicirt man den einen derselben so in einen Kreis, dass die Berührungssehne mit dem andern in unendliche Entfernung fällt. (Art. 277.)

416. Vermittelst solcher Projectionen gelangt man, sofern dieselben als reell vorausgesetzt werden, von jeder Eigenschaft eines Systems von Kreisen zur entsprechenden Eigenschaft eines Systems von Kegelschnitten, welche zwei imaginäre Punkte gemein haben. Nachdem aber im Art. 408 gezeigt ist, dass die geometrische Methode der Centralprojection mit der Herstellung collinearer Systeme in collinearer Lage identisch ist*), so überträgt sich die Allgemeinheit der analytischen Methode (Art. 375f.) auf die Ergebnisse der Methode der Projectionen. So wie die analytischen Prozesse, durch welche die Eigenschaften der durch Gleichungen von der Form $S = kLM$, oder $S = kL^2$, etc. dargestellten Curven erkannt wurden, ungeändert bleiben, ob man voraussetzt, dass die Geraden $L=0$, $M=0$, den Kegelschnitt $S=0$ in reellen oder imaginären Punkten schneiden, so ist es nach der erwähnten Identität gestattet, die Allgemeinheit solcher durch Centralprojection gewonnener Sätze auszusprechen; denn wenn z. B. $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ eine Curve bezeichnet, welche $\zeta=0$ in imaginären Punkten schneidet, so geht dieselbe durch die Substitution von $L \pm Mi$ für ξ und η und von N für ζ (L, M, N bezeichnen lineare Polynome) in $2(L^2 - M^2) = N^2$ über, die eine Curve ausdrückt, welche $N=0$ in reellen Punkten schneidet. Darin beruht die Berechtigung des Princips der Continuität; es ist ein Beispiel für die Anwendung desselben, wenn man den Satz der Aufg. 3 des Art. 252

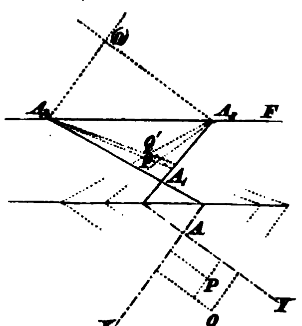
*) Auch die Verwandtschaft der Reciprocität lässt sich unschwer an die Methode der Centralprojection knüpfen. Wenn man die durch das Centrum O gehende Normalebene jedes projicirenden Strahls denkt und ihre Durchschnittslinie mit der Bildebene als seinem Schnittpunkte in derselben entsprechend festsetzt, so erhält man eine der Reciprocität entsprechende Verwandtschaft, bei welcher der Fusspunkt der Normale vom Centrum zur Bildebene als Anfangspunkt und das $i$fache ihrer Länge als Halbmesser der Directrix benutzt sind. Endlich kann auch die allgemeine Verwandtschaft des Art. 401 durch einen Prozess der Projection vermittelt werden. Man hat für dieselbe ausser der Bildebene zwei beliebige Gerade im Raume festzusetzen und zu jedem Punkt des einen ebenen Systems denjenigen Punkt des andern als den entsprechenden anzusehen, in welchem die durch jenen gehende Transversale dieser Geraden die Ebene desselben schneidet.

als eine allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte so ausspricht: Durch einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnitts und durch zwei beliebige Punkte seiner Ebene lassen sich immer drei Kegelschnitte legen, welche mit dem gegebenen eine Berührung zweiter Ordnung haben und die Berührungspunkte liegen mit den drei angenommenen Punkten in einem Kegelschnitt. Oder wenn der Satz des Art. 138 zu dem Satze des Art. 280 erweitert wird (vergl. Art. 283); oder wenn an Stelle eines mit einem Kegelschnitt verbundenen Punktes ein Kegelschnitt tritt, der mit dem gegebenen in doppelter Berührung ist (vergl. Art. 189, Aufg. 2; Art. 308, Aufg. 4 und Art. 396, 4); oder an Stelle der Brennpunkte eines Kegelschnittes ein confocaler Kegelschnitt (wie Art. 197 gegen Art. 196), etc. (Vergl. besonders auch die Kap. XXI und XXII.)

Nachdem aber in Allem die Verwandtschaften der Collineation und Reciprocität als Resultate einer veränderten Interpretation derselben linearen Substitutionen erkannt worden sind, die die vorhergehenden Kapitel als das allgemeinste Mittel der analytisch geometrischen Untersuchungen erwiesen haben, so bleibt schliesslich daran zu erinnern, dass die nämlichen Substitutionen die Bildung der allgemeinen trimetrischen Coordinatensysteme vermittelten, um die ganze Bedeutung der centralprojectivischen Methode für die analytische Geometrie zu würdigen. Wenn in Art. 80 die Grössen $x' = (a_1 x + b_1 y + c_1) : (a_3 x + b_3 y + c_3)$,

$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2) : (a_3 x + b_3 y + c_3),$$

an welche der Uebergang von Cartesischen zu trimetrischen Coordinaten sich knüpfte, als die Parameter von zwei Strahlbüscheln bezeichnet wurden, welche durch die geraden Linien $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $a_3 x + \ldots = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ und $a_3 x + \ldots = 0$ bestimmt sind, so entspricht diess vollständig dem Uebergang zu einer Centralprojection des Originalsystems; denn bei einer solchen werden die Projectionen der Axen der x und y zu Geraden, deren unendlich entfernte Punkte in ihren Durchschnitten mit der Fluchtlinie der Ebene xy liegen; die ihnen parallelen Abscissen und Ordinaten des Cartesischen Systems werden zu Strahlen der aus diesen Punkten beschriebenen, also durch die Bilder der Coordinatenaxen und das Bild der unendlich entfernten Geraden bestimmten Büschel. Die Grössen $x' = x_1 : x_3$, $y' = x_2 : x_3$ oder die Parameter dieser Büschel sind die Verhältnisse der Abstände eines Punktes des jedesmaligen beweglichen Strahls von den be-



züglichen Fundamentalstrahlen, die trimetrischen Coordinaten also Zahlen, die sich verhalten, wie die Abstände des betrachteten Punktes von den Geraden $a_1 x + \ldots = 0$, $a_2 x + \ldots = 0$, $a_3 x + \ldots = 0$ oder den Fundamentallinien des Systems*).

417. Wir geben nun Beispiele zu der Art und Weise, durch welche Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises oder aus andern speciellen Eigenschaften der Kegelschnitte centralprojectivisch abgeleitet werden.

Aufg. 1. Jede durch einen festen Punkt gezogene gerade Linie wird von einem Kegelschnitt und von seiner in Bezug auf diesen genommenen Polare harmonisch getheilt.

Es reicht hin, zu bemerken, dass diese Eigenschaft ebenso wie ihre Reciproke projectivische Eigenschaften sind, und dass sie für den Kreis Gültigkeit haben; in Folge dessen sind sie nothwendig für alle Kegelschnitte wahr. Alle Eigenschaften der Kreise, die von der Theorie der Pole und Polare abhängen, gelten für Kegelschnitte überhaupt.

Aufg. 2. Die auf die Doppelverhältnissgleichheit bezüglichen Eigenschaften der Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts sind projectivischer Natur; sie gelten für alle Kegelschnitte, wenn sie für den Kreis bewiesen sind. Alle Eigenschaften des Kreises, welche aus ihnen hervorgehen, sind gleichmässig für alle Kegelschnitte wahr. Die Sätze von Pascal und Brianchon beispielweise brauchen nur für den Kreis bewiesen zu werden, um allgemein gültig zu sein; die Pascal'sche Linie wird in unendlicher Entfernung, der Brianchon'sche Punkt als Mittelpunkt des Kreises projicirt, in welchem man den gegebenen Kegelschnitt überführt. Beide Sätze nehmen eine so elementare Gestalt an, dass sie des Beweises kaum noch bedürfen: Wenn in einem dem Kreise eingeschriebenen Sechseck zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, so sind es auch die dritten. Wenn in einem, einem Kreise umschriebenen Sechseck, zwei Paare von Gegenecken in je einem Durchmesser liegen, so ist diess auch für das dritte Paar der Fall.

Aufg. 3. Der Satz von Carnot, dass für die Punkte, in welchen ein Kegelschnitt die Seiten eines Dreiecks schneidet, die Relation

---

*) Die Figur giebt diesen Zusammenhang des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$ mit dem Axensystem AXY und die Coordinaten eines Punktes in der Zusammenlegung der beiden centralprojectivischen Systeme, wie sie im Art. 408 besprochen worden ist; $A_2 A_3$ oder F entspricht der unendlich fernen Geraden der Ebene XY.

$$A_1B_3.A_1B_3'.A_2B_1.A_2B_1'.A_3B_2.A_3B_2'.=A_1B_2.A_1B_2'.A_3B_1.A_3B_1'.A_2B_3.A_2B_3'$$

gilt, ist eine projectivische Eigenschaft und braucht nur für den Fall des Kreises bewiesen zu werden, in welchem er deshalb evident ist, weil $A_1B_2 . A_1B_2' = A_1B_3 . A_1B_3'$, etc. Der Satz gilt ebenso und wird in derselben Art bewiesen für ein beliebiges Polygon.

Aufg. 4. Aus diesem Carnot'schen Satze können die Eigenschaften des Artikel 111 leicht abgeleitet werden; denn wenn wir den Punkt C in unendlicher Entfernung voraussetzen, so ist

$$A_1B_2.A_1B_2' : A_1B_3.A_1B_3' = A_2B_1.A_2B_1' : A_2B_3.A_2B_3',$$

unter der Voraussetzung, dass die gerade Linie A_1B_2 zu A_2B_1 parallel ist.

5. In zwei concentrischen Kreisen wird jede Sehne des einen, welche den andern berührt, im Berührunpspunkte halbirt.

6. In zwei Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, wird jede Sehne des einen, welche den andern berührt, im Berührungspunkt und im Durchschnittspunkt mit der Berührungssehne harmonisch getheilt. (Aufg. 7, Art. 302.)

Die unendlich entfernte gerade Linie des ersten Falles wird als Berührungssehne der Kegelschnitte des zweiten Falles projicirt. (Aufgabe 4, Artikel 244 ist ein specieller Fall dieses Satzes.)

7. Wenn drei concentrische Kreise gegeben sind, so wird jede Tangente des einen von den beiden andern in Punkten geschnitten, deren Doppelverhältniss constant ist.

8. Wenn drei Kegelschnitte einander in den nämlichen beiden Punkten berühren, so wird jede Tangente des einen von den andern beiden in vier Punkten geschnitten, deren Doppelverhältniss constant ist.

Der erste Satz ist wegen der Unveränderlichkeit der vier Segmente evident; der zweite kann als eine Erweiterung der projectivischen Theilung der Tangenten eines Kegelschnitts betrachtet werden. In derselben Weise können die Sätze des Artikel 308 in Bezug auf Doppelverhältnisse in Kegelschnitten, welche sich doppelt berühren, unmittelbar bewiesen werden, indem man die Kegelschnitte als concentrische Kreise projicirt.

Aufg. 9. Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist und zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen, so soll man die Enveloppe der dritten Seite bestimmen. (Artikel 307, Aufgabe 5.)

Wenn wir die gerade Verbindungslinie der festen Punkte in unendlicher Entfernung und zugleich den Kegelschnitt in einen Kreis projiciren, so verwandelt sich die Aufgabe in diese: Ein Dreieck ist einem Kreise eingeschrieben und zwei seiner Seiten sind festen geraden Linien parallel; man soll die Enveloppe der dritten Seite bestimmen. Diese Enveloppe ist ein concentrischer Kreis, weil der Winkel an der Spitze des Dreiecks gegeben ist, und die Enveloppe ist demnach im allgemeinen Fall ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung in den beiden Punkten hat, welche in der geraden Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegen.

Aufg. 10. Die projectivischen Eigenschaften des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks zu untersuchen.

Nach den gegebenen allgemeinen Entwickelungen kann der Kegelschnitt in einen Kreis und zugleich das Viereck in ein Parallelogramm projicirt werden. Für ein in einen Kreis eingeschriebenes Parallelogramm ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen im Centrum des Kreises; demnach ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks der Pol der geraden Linie, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten desselben verbindet. Für das dem Kreis eingeschriebene Parallelogramm liefern die in seinen Eckpunkten an den Kreis gelegten Tangenten ein Viereck, dessen Diagonalen sich auch im Mittelpunkte des Kreises schneiden, indem sie zugleich die von den Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks gebildeten Winkel halbiren; in Folge dessen gehen die Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen und des entsprechenden umgeschriebenen Vierecks durch denselben Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.

11. Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort seines Centrums ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Vierecks hindurchgeht.

12. Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer festen geraden Linie ein Kegelschnitt, welcher zu den Endpunkten jeder Seite und dem Schnittpunkt der gegebenen geraden Linie mit derselben in ihr den vierten harmonischen Punkt bestimmt.

13. Der Ort der Punkte, in welchen alle parallelen Sehnen eines Kreises in einem gegebenen Verhältniss getheilt werden, ist eine Ellipse, welche mit dem Kreise eine doppelte Berührung besitzt. (Artikel 171.)

14. Wenn man durch einen festen Punkt O eine beliebige Gerade zieht, welche mit einem festen Kegelschnitt die Punkte A, B gemein hat, und in ihr einen Punkt P so wählt, dass das Doppelverhältniss der vier Punkte O, A, B, P unveränderlich ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

418. Mit Hilfe der im Art. 310 gegebenen allgemeinen Definition der Brennpunkte können Eigenschaften derselben projectivisch auf ihren allgemeinen Ausdruck gebracht werden.

1. Wenn ein Kreis zwei gegebene Kreise stets berührt, so ist der Ort seines Centrums eine Hyperbel, welche die Centra der gegebenen Kreise zu Brennpunkten hat.

2. Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte geht und zwei feste Kegelschnitte stets berührt, welche auch durch diese Punkte gehen, so ist der Ort des Pols der geraden Verbindungslinie dieser Punkte ein Kegelschnitt, welcher dem Viereck eingeschrieben ist, das von den geraden

Verbindungslinien der gegebenen Punkte mit den in Bezug auf die beiden gegebenen Kegelschnitte genommenen Polen ihrer Verbindungslinie gebildet wird.

Dies Beispiel ist besonderer Aufmerksamkeit deshalb werth, weil es gleichzeitig die folgenden verschiedenen Principien zur Anwendung bringt: Dass alle Kreise durch zwei feste Punkte in unendlicher Entfernung gehen; dass das Centrum der Pol ihrer Verbindungslinie ist; dass ein Brennpunkt als der Durchschnitt der von ihnen ausgehenden Tangenten der Curve betrachtet werden muss; und dass wir zur Ausdehnung unserer Schlüsse von imaginären auf reelle Punkte berechtigt sind.

3. Wenn von einem Kegelschnitt der Brennpunkt und zwei Punkte der Peripherie gegeben sind, so liegt der Durchschnitt der in diesen Punkten an ihn gezogenen Tangenten in einer festen geraden Linie.

4. Wenn zwei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so liegt der Durchschnittspunkt der in diesen Punkten an ihn zu ziehenden Tangenten in einer festen geraden Linie.

5. Wenn ein Brennpunkt und zwei Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort seines anderen Brennpunktes eine gerade Linie. (Nach Art. 197.)

6. Wenn vier Tangenten und je ein fester Punkt in zweien derselben gegeben sind, so ist der Ort des Durchschnittspunktes der von diesen an den Kegelschnitt zu legenden Tangenten eine gerade Linie.

Denn die zwei unendlich entfernten Punkte eines Kreises liegen jeder in einer der vom ersten Brennpunkt ausgehenden Tangenten, und die von ihnen ausgehenden beiden andern Tangenten des Kegelschnitts schneiden sich im andern Brennpunkte.

7. Wenn drei Tangenten einer Parabel gegeben sind, so geht der ihrem Dreieck umgeschriebene Kreis durch den Brennpunkt derselben. (Art. 231.)

8. Zwei einem und demselben Kegelschnitt umgeschriebene Dreiecke haben ihre sechs Ecken auf einem und demselben Kegelschnitt.

Denn der Brennpunkt bildet mit den imagniären Kreispunkten in unendlicher Ferne ein zweites der Parabel umgeschriebenes Dreieck.

9. Der Ort des Centrums für einen Kreis, welcher durch einen festen Punkt geht und eine feste gerade Linie berührt, ist eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkt hat.

10. Wenn eine Tangente und drei Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten in irgend zweien dieser Punkte ein Kegelschnitt, welcher dem von ihnen gebildeten Dreieck eingeschrieben ist.

11. Wenn vier Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort seines Centrums die gerade

12. Wenn vier Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer geraden Linie die

Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks verbindet.

gerade Verbindungslinie der Punkte, welche mit den Schnittpunkten der ersteren in den Diagonalen diese selbst harmonisch theilen.

Aus unserer Definition der Brennpunkte ergiebt sich, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt zweier Kegelschnitte als der Durchschnittspunkt gemeinschaftlicher Tangenten derselben angesehen werden muss und demnach die im Artikel 280 entwickelten Eigenschaften eines solchen besitzt. Wenn zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt und die zugehörige Directrix gemeinschaftlich haben, so müssen sie als solche Kegelschnitte betrachtet werden, die eine doppelte Berührung mit einander haben und können daher als concentrische Kreise projicirt werden.

419. Wir richten hiernach unsre Aufmerksamkeit auf projectivische Relationen, welche die Grösse von Winkeln betreffen. Winkel, welche in der gegebenen Figur constant sind, sind es in einer Centralprojection derselben im Allgemeinen nicht und es sind daher die Gesetze speciell zu untersuchen, nach welchen darauf bezügliche Eigenschaften generalisirt werden können. Nach Art. 416 muss erwartet werden, dass dieselben mit den Ergebnissen der Theorie der Distanz in Art. 371 zusammenfallen.

Zunächst bilden die Richtungen von zwei zu einander rechtwinkligen Geraden $x = 0$, $y = 0$ mit den imaginären unendlich fernen Kreispunkten $x^2 + y^2 = 0$ oder $x \pm yi = 0$ nach Art. 56 ein harmonisches Büschel. Wir ziehen daraus den Satz: Wenn vier Punkte A, B, C, D eine gerade Linie harmonisch theilen und durch eine reelle oder imaginäre Projection so projicirt werden, dass die Punkte A und C, die wir als reell oder als imaginär denken dürfen, mit den zwei imaginären unendlich entfernten Punkten eines Kreises zusammenfallen, so projiciren sich gleichzeitig beliebige durch die Punkte B und D gehende gerade Linien als die Schenkel eines rechten Winkels. Und umgekehrt: Wenn zwei gerade Linien zu einander rechtwinklig sind, so werden sie als gerade Linien projicirt, welche die Verbindungslinie der beiden festen Punkte harmonisch theilen, die als die Projectionen der imaginären unendlich entfernten Punkte eines Kreises erscheinen.

1. Die Tangente eines Kreises ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes.

2. Jede Sehne eines Kegelschnitts wird durch eine Tangente desselben und durch die gerade Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Pol der gegebenen Sehne harmonisch getheilt. (Art. 108.)

Denn sobald wir die Sehne des Kegelschnitts als in die unendlich entfernte gerade Linie in der Ebene eines Kreises projicirt voraussetzen, so erscheinen die Punkte, in welchen dieselbe den Kegelschnitt schneidet, als die unendlich entfernten imaginären Punkte des Kreises; gleichzeitig wird der Pol der Sehne im Centrum des Kreises projicirt.

3. Jede durch den Brennpunkt eines Kegelschnitts gehende gerade Linie ist rechtwinklig zu der geraden Verbindungslinie ihres Pols mit dem Brennpunkte. (Art. 200.)

4. Jede gerade Linie durch einen festen Punkt bildet mit den beiden von ihm ausgehenden Tangenten eines Kegelschnitts und der Verbindungslinie desselben mit ihrem eigenen Pol in Bezug auf diesen ein harmonisches Büschel. (Art. 108.)

Dass der erste dieser Sätze ein specieller Fall des zweiten ist, erhellt aus der Bemerkung, dass die vom Brennpunkt ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts die geraden Verbindungslinien des Brennpunktes mit den imaginären unendlich entfernten Punkten im Kreise sind.

Aufg. 5. Nach dem Beispiel 7 des vorigen Artikels können wir den Ort des Pols einer geraden Linie in Bezug auf ein System confocaler Kegelschnitte bestimmen; denn die Brennpunkte bestimmen, heisst ein dem Kegelschnitt umgeschriebenes Viereck angeben, welches die gerade Verbindungslinie der Brennpunkte zu einer Diagonale hat. In Folge dessen ist der vierte harmonische Punkt zu demjenigen, wo die gegebene gerade Linie die zwischen den Brennpunkten enthaltene gerade Strecke schneidet. ein Punkt des gesuchten Ortes. Die andere Diagonale ist die unendlich entfernte gerade Linie und ihre Endpunkte sind die imaginären unendlich entfernten Kreispunkte; demnach ist der gesuchte Ort zur gegebenen geraden Linie rechtwinklig und somit vollkommen bestimmt.

6. Zwei confocale Kegelschnitte schneiden einander unter rechten Winkeln.

7. Wenn zwei Kegelschnitte demselben Viereck eingeschrieben sind, so theilen die beiden in jedem ihrer Durchschnittspunkte zu ziehenden Tangenten derselben jede Diagonale des umgeschriebenen Vierecks harmonisch.

Wir bemerken, dass der letztere Satz ein Fall von dem reciproken Satze zur Aufgabe 5 des Artikel 302 ist.

8. Der Ort des Durchschnittspunktes solcher Tangentenpaare eines Central-Kegelschnitts, welche sich rechtwinklig durchschneiden, ist ein Kreis.

9. Wenn man von zwei Punkten B, D, welche eine gegebene gerade Strecke AC harmonisch theilen, Tangenten an einen Kegelschnitt construirt, so ist der Ort ihres Durchschnittspunktes ein durch die Punkte A, C gehender Kegelschnitt.

Nach dem Satze des Artikel 108 kann der gegenwärtige auch ausgesprochen werden, wie folgt: Der Ort eines Punktes O, für welchen die

gerade Linie, welche ihn mit dem Pol der festen geraden Linie AO verbindet, durch den festen Punkt C geht, ist ein durch die Punkte A und C gehender Kegelschnitt. Alsdann ist seine Richtigkeit direct daraus ersichtlich, dass wir das Doppelverhältniss des von vier beliebigen Lagen der geraden Linie CO gebildeten Büschels als mit dem des Büschels übereinstimmend erkennen, welches die vier entsprechenden Lagen von AO bilden. (Art. 329, Aufg. 2.)

10. Der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten einer Parabel, die einander rechtwinklig durchschneiden, ist die Directrix.

11. Unter der Voraussetzung, dass in dem vorhergehenden allgemeinen Satze die gerade Linie AC den gegebenen Kegelschnitt berührt, wird der Ort des Punktes O die gerade Linie, welche die Berührungspunkte der von A und C ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts verbindet.

12. Der Kreis, welcher einem in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel sich selbst conjugirten Dreieck umgeschrieben ist, geht durch das Centrum der Curve. (Art. 351, Aufg. 2.)

13. Wenn zwei Dreiecke in Bezug auf denselben Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind, so liegen ihre sechs Eckpunkte auf einem Kegelschnitt. (Art. 309, Aufg. 4; Art. 351, Aufg. 1.)

Die Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbel mit der unendlich entfernten Geraden sind in Bezug auf die imaginären Kreispunkte derselben harmonisch conjugirt; das von ihnen mit dem Centrum gebildete Dreieck ist also ein System harmonischer Pole der Curve. Durch Reciprocität ergiebt sich, dass die Seiten von zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt sich selbst conjugirten Dreiecken einen Kegelschnitt berühren.

14. Wenn durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander gezogen werden, so geht die Sehne, welche ihre Endpunkte in der Curve verbindet, stets durch einen festen Punkt. (Artikel 181, Aufgabe 2.)

15. Wenn durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts ein harmonisches Büschel gelegt wird, in welchem zwei Strahlen unveränderlich sind, so geht die die Endpunkte der jedesmaligen beiden andern Strahlen verbindende Sehne stets durch einen festen Punkt.

Dasselbe Ergebniss lautet, in andern Worten ausgedrückt, wie folgt: Wenn zwei Punkte a, c eines Kegelschnitts gegeben sind, und $(abcd)$ ein harmonisches Verhältniss ist, so geht die gerade Linie bd stets durch einen festen Punkt, nämlich durch den Durchschnittspunkt der Tangenten des Kegelschnitts in a und c. Und in dieser Form wird die Wahrheit des Satzes direct erkannt, wenn man bemerkt, dass die Tangente des Kegelschnitts im Punkte a die gerade Linie bd in dem vierten harmonischen Punkte zu dem Punkt K schneiden muss, welchen ac mit ihr gemein hat, weil $(a\,.\,abcd)$ ein harmonisches Büschel ist; und dass das Nämliche von der Tangente in c gilt, dass somit diese Tangenten bd in demselben Punkte schneiden müssen. Als ein specieller Fall dieses Satzes erscheint der folgende: Wenn durch einen festen Punkt eines Kegelschnitts zwei gerade

Linien so gezogen werden, dass sie mit einer festen geraden Linie gleiche Winkel bilden, so geht die Sehne, welche ihre Endpunkte verbindet, durch einen festen Punkt.

16. Der Ort der Durchschnittspunkte rechtwinkliger Tangenten eines Kegelschnitts ist ein Kreis aus dem Centrum desselben.

17. Der Ort der Schnittpunkte solcher Tangenten eines Kegelschnitts, welche ein geradliniges Segment harmonisch theilen, ist ein durch die beiden Endpunkte des Segments gehender Kegelschnitt, in Bezug auf welchen diese Gerade denselben Pol hat wie in Bezug zu jenem.

420. Ein System gerader Linien, welche paarweise durch einen festen Punkt so gezogen sind, dass die Geraden desselben Paares mit einer festen Linie gleiche Winkel bilden, schneidet die unendlich entfernte gerade Linie in einem System involutorischer Punkte, welchem die beiden imaginären unendlich entfernten Kreispunkte als ein Paar conjugirter Punkte angehören. Denn sie schneiden jede gerade Linie in einem System involutorischer Punkte, welches die Punkte zu Brennpunkten hat, in denen die gerade Linie von der gemeinschaftlichen inneren und äussern Halbirungslinie der von den Paaren der geraden Linien gebildeten Winkel geschnitten ward. Die erwähnten imaginären Punkte der unendlich entfernten geraden Linie gehören zu dem System, weil die von ihnen begrenzte Strecke durch diese Winkelhalbirungslinien auch harmonisch getheilt wird.

1. Die von einem beliebigen Punkt zu einem System confocaler Kegelschnitte gezogenen Tangenten machen mit zwei festen geraden Linien gleiche Winkel. (Art. 197.)

2. Die von einem beliebigen Punkte zu einem System von demselben Viereck eingeschriebenen Kegelschnitten gezogenen Tangenten schneiden jede Diagonale des Vierecks in einem System involutorischer Punkte, welchem die Endpunkte der Diagonale als ein Paar conjugirte Punkte angehören. (Art. 302.)

421. Zwei von einem festen Punkte ausgehende gerade Linien, welche mit einander einen constanten Winkel bilden, schneiden die gerade Verbindungslinie der zwei unendlich entfernten imaginären Punkte eines Kreises immer so, dass das Doppelverhältniss der vier Punkte constant ist.

Denn, wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zwei gerade Linie darstellen, welche den Winkel θ mit einander bilden, so sind die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte durch die Gleichung

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\theta = 0$ bestimmt; und indem man diese Gleichung in Factoren zerlegt, findet man nach Art. 58, dass das Doppelverhältniss der vier Linien constant ist, so lange θ unverändert bleibt. Denn man hat für $x_1 - \lambda x_2$, $x_1 + \mu x_2$ als diese Factoren $\lambda = -e^{i\theta}$, $\mu = e^{-i\theta}$; also das Doppelverhältniss $= \lambda : \mu = -e^{2i\theta} = e^{(\pi - 2\theta)i}$. Für $2\theta = \pi$ erhält man die harmonische Theilung wieder.

1. Der in demselben Segment eines Kreises enthaltene Winkel ist constant. Dieser Satz ist, wie der gegenwärtige Artikel lehrt, die von der Doppelverhältnissgleichheit von vier Punkten eines Kreises angenommene Form für den Fall, wo zwei dieser Punkte in unendlicher Entfernung sind.

2. Die Enveloppe derjenigen Sehnen eines Kegelschnitts, welche einen constanten Winkel am Brennpunkt spannen, ist ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen Kegelschnitt den Brennpunkt und die Directrix gemein hat.

3. Wenn die von dem Punkte O gezogenen Tangenten mit dem Kegelschnitt die Punkte T, T' gemein haben, und zwei Punkte A und B in demselben so gewählt werden, dass das Doppelverhältniss $(O\,.\,ATBT')$ constant ist, so ist die Enveloppe der Sehne AB ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in den Punkten T, T' berührt.

4. Der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Tangenten einer Parabel, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist eine Hyperbel, die mit der Parabel den Brennpunkt und die Directrix gemein hat.

5. Wenn eine begrenzte Gerade AB, welche einen Kegelschnitt berührt, von zwei Tangenten desselben nach constantem Doppelverhältniss getheilt wird, so ist der Ort ihres Schnittpunktes ein Kegelschnitt, der den gegebenen in den Berührungspunkten der von A, B ausgehenden Tangenten berührt.

6. Wenn durch den Brennpunkt eines Kegelschnitts eine Linie gezogen wird, welche mit einer Tangente desselben einen gegebenen Winkel einschliesst, so ist der Ort des Punktes, in welchem sie dieselbe schneidet, ein Kreis.

7. Wenn eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts zwei feste Tangenten in T, T' und eine feste gerade Linie in M schneidet, und ein Punkt P in ihr so bestimmt wird, dass das Doppelverhältniss $(PTMT')$ constant ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte geht, in denen die festen Tangenten die feste gerade Linie schneiden. (Art. 319, Aufg. 1.)

8. Ein specieller Fall dieses Satzes ist der folgende: Der Ort des Punktes, in welchem der von zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts in einer

veränderlichen Tangente desselben bestimmte Abschnitt in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den festen Tangenten parallel sind.

9. Wenn von einem festen Punkt O die gerade Linie gezogen wird, welche einen gegebenen Kreis im Punkte P schneidet, und an sie der constante Winkel TPO angetragen wird, so ist die Enveloppe des neuen Schenkels TP ein Kegelschnitt, welcher den Punkt O zum Brennpunkt hat.

10. Wenn das Doppelverhältniss eines Büschels, von welchem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und der Scheitel desselben sich auf einem durch zwei dieser Punkte gehenden gegebenen Kegelschnitt bewegt, so umhüllt der vierte Strahl desselben einen Kegelschnitt, welcher die geraden Verbindungslinien dieser zwei Punkte mit dem dritten festen Punkt berührt.

11. Als ein specieller Fall dieses Satzes ergiebt sich der folgende: Wenn zwei feste Punkte A und B eines Kegelschnitts mit einem veränderlichen Punkte P desselben durch gerade Linien verbunden werden, und der von den Verbindungslinien in einer festen Geraden bestimmte Abschnitt in dem Punkte M in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird, so ist die Enveloppe der geraden Linie PM ein Kegelschnitt, welcher die durch A und B gezogenen Parallelen zu der festen geraden Linie berührt.

12. Wenn man an die um den festen Punkt O sich drehende gerade Linie OP in ihrem Durchschnittspunkt P mit einer festen geraden Linie den constanten Winkel TPO beanträgt, so ist die Enveloppe seines neuen Schenkels PT eine Parabel, welche den Punkt O zum Brennpunkt hat.

13. Wenn das Doppelverhältniss eines Büschels, von welchem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und sein Scheitel sich längs einer festen geraden Linie bewegt, so ist die Enveloppe des vierten Strahls ein Kegelschnitt, welcher die drei Seiten des von den gegebenen Punkten gebildeten Dreiecks berührt.

422. Wir schliessen dem Vorigen einen kurzen Abriss von den entsprechenden Gesetzen der Methode der Orthogonalprojection an.

Die Orthogonalprojection einer gegebenen Figur wird von den Fusspunkten aller der Perpendikel gebildet, welche man von den Punkten derselben auf eine beliebige feste Ebene fällen kann; sie ist daher der gerade Schnitt eines Cylinders, welcher die gegebene Figur zur Leitlinie hat.

Geradlinige Strecken von gleicher Richtung sind zu ihren Orthogonalprojectionen auf eine beliebige Ebene in constantem Verhältniss. Denn dieses Verhältniss wird durch den Cosinus des Winkels ausgedrückt, welchen die gerade Linie mit ihrer Projection einschliesst und wegen des Parallelismus der bezeichneten

Geraden und des daraus folgenden Parallelismus ihrer Projectionen ist dieser Winkel stets von derselben Grösse.

Alle geradlinigen Strecken, deren Richtung mit derjenigen der geraden Durchschnittslinie zwischen der Ebene der Figur und der Projectionsebene übereinstimmt, sind ihren Orthogonalprojectionen gleich. Da die Durchschnittslinie beider Ebenen selbst durch die Projection nicht geändert wird, so kann auch keine ihr parallele gerade Linie geändert werden. Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur in einer gegebenen Ebene steht zu dem Flächeninhalt ihrer Orthogonalprojection in einer andern gegebenen Ebene in einem constanten Verhältniss.

Setzen wir die Ordinaten der Figur und ihrer Projection rechtwinklig zur Durchschnittslinie ihrer Ebenen voraus, so setzen sich beide Flächen aus Parallelstreifen von gleicher Breite zusammen, deren Höhen in dem constanten Verhältnisse vom Cosinus des Winkels beider Ebenen zur Einheit stehen; demgemäss sind die Flächen beider Figuren in demselben Verhältniss. (Vergl. Art. 261.)

Jede Ellipse kann orthogonal in einen Kreis projicirt werden. Wir wählen die Projectionsebene so, dass ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der gegebenen Ellipse der kleinen Axe dieser letzteren parallel ist und zugleich so, dass der Cosinus des von beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels dem Verhältniss $b:a$ der kleinen Axe zur grossen gleich ist; alsdann bleiben alle zur kleinen Axe parallelen Sehnen der Ellipse unverändert in der Projection, während alle der grossen Axe parallelen Sehnen in dem Verhältniss $b:a$ verkürzt werden; in Folge dessen wird die Projection ein Kreis vom Radius b. (Art. 171.)

Durch die Vereinigung der Ebenen beider Systeme erhält man den speciellen Fall collinearer Systeme in collinearer Lage, bei welchem das Centrum der Collineation unendlich entfernt ist in der Richtung der Normalen zu ihrer Schnittlinie, d. h. der Collineationsaxe. (Affinität.)

423. Um ein Beispiel von dem Nutzen dieser Principien zu geben, wollen wir dieselben zur Untersuchung des Ausdrucks anwenden, welchen wir im Artikel 239 (Aufgabe 7) für den Radius des Kreises gegeben haben, der einem in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck umschrieben ist.

Nach der Elementar-Geometrie gilt die Relation $2FR = \alpha\beta\gamma$,

wenn R diesen Halbmesser, $\frac{1}{2}F$ den Flächeninhalt des Dreiecks, α, β, γ die Seitenlängen desselben bezeichnen. Projiciren wir dann die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser b, so gilt, weil dieser Kreis als der umgeschriebene Kreis des projicirten Dreiecks erscheint, die Relation $2F'b = \alpha'\beta'\gamma'$. Wenn wir nun die den Seiten des Dreiecks parallelen Halbdurchmesser der Ellipse durch b', b'', b''' bezeichnen, so gelten nach dem Satze, dass parallele Linien in constantem Verhältniss zu ihren Projectionen stehen, die Proportionen $\alpha' : \alpha = b : b'$, $\beta' : \beta = b : b''$, $\gamma' : \gamma = b : b'''$. Es ist ferner F' zum Inhalt des Kreises vom Halbmesser b, also πb^2, in demselben Verhältniss wie F zum Inhalt der Ellipse von den Halbaxen a und b, also πab; demnach $F' : F = b : a$. Alles diess giebt die Relation

$$b : R = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{2F'} : \frac{\alpha\beta\gamma}{2F} = ab^2 : b'b''b''', \text{ d. i. } R = \frac{b'b''b'''}{ab}.$$

Alles Vorhergehende zeigt, dass die Methode der Projection wie die der reciproken Polaren ihre generalisirende Kraft aus denselben Grundlagen empfängt, die in den Kap. XX bis XXII dargelegt sind und man darf daher sagen, dass der Werth beider Methoden vor Allem in der geometrischen Anschaulichkeit besteht, welche sie den analytischen Operationen zu substituiren erlauben.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

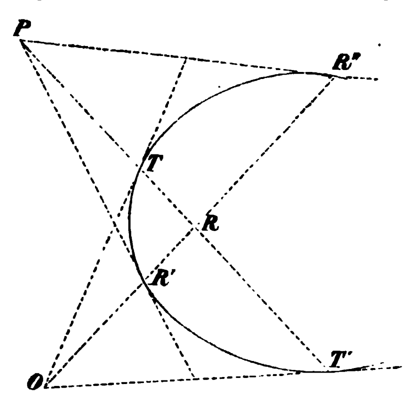
Von der Bestimmung der Kegelschnitte und der Methode der Charakteristiken.

424. Wir haben gesehen, dass fünf Bedingungen einen Kegelschnitt bestimmen und können im Allgemeinen einen Kegelschnitt beschreiben, für welchen m Punkte und n Tangenten gegeben sind, sofern $m + n = 5$ ist. Die speciellen Fälle der Lage eines dieser Bestimmungs-Elemente oder mehrerer von ihnen erfordern nur sehr einfache Modificationen der Construction des entsprechenden allgemeinen Falls.

1. Wenn z. B. eine Parallele zu einer Asymptote gegeben ist, so vertritt dieselbe einen unendlich entfernten Punkt — die Angabe der Richtung einer Asymptote ist also einer Bedingung äquivalent — und die zur Be-

stimmung des Kegelschnitts dienende Construction des Art. 285 modificirt sich nur durch die Voraussetzung, dass der Punkt E unendlich fern ist und dass die Geraden DE, QE parallel der gegebenen Geraden sind. Eine Asymptote der Curve ist zwei Bedingungen äquivalent, weil eine Tangente und ihr Berührungspunkt, der unendlich ferne Punkt der Asymptote, gegeben sind. Die Bestimmung, dass die Curve eine Parabel sein soll, ist einer Bedingung äquivalent, denn es ist damit eine Tangente gegeben, die unendlich entfernte gerade Linie; dagegen wiegt die Bezeichnung der Curve als Kreis zwei Bedingungen auf, weil dann die Curve durch zwei bestimmte unendlich ferne Punkte gehen muss. Die Angabe eines Brennpunktes ersetzt zwei Bedingungen, denn sie bestimmt zwei Tangenten der Curve (Art. 310); in der That bestimmt ein Brennpunkt mit drei andern Bedingungen den Kegelschnitt. Denn die polarreciproke Figur in Bezug auf jenen Brennpunkt als Anfangspunkt der Reciprocität giebt einen Kreis an seiner Stelle, welcher drei Bedingungen unterworfen und darum bestimmt ist; die reciproke Figur der betreffenden Construction löst das Problem. Es ist eine nützliche Uebung, die Directrix eines der vier Kegelschnitte zu construiren, welche einen gegebenen Brennpunkt haben und durch vier feste Punkte gehen.

2. Die Angabe des Pols einer gegebenen Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt ist zwei Bedingungen äquivalent, drei weitere Bedingungen bestimmen die Curve. Denn für P als den Pol von $R'R''$ in Bezug auf den Kegelschnitt und T als einen Punkt des Letztern ist auch T', der vierte harmonische Punkt zu P, T und dem Schnittpunkt von PT mit $R'R''$, ein Punkt desselben; und wenn OT eine Tangente ist, so ist auch OT' eine Tangente. So bestimmt man aus einem gegebenen Pol und seiner Polare zu drei Punkten oder Tangenten drei weitere Punkte oder Tangenten derselben Curve und damit diese selbst. Darum ist auch insbesondere die Angabe des Centrums als des Pols der unendlich entfernten Geraden zwei Bedingungen äquivalent.



3. Dagegen ist es einer Bedingung äquivalent, wenn ein Punkt in der Polare eines gegebenen Punktes gegeben ist oder wenn zwei Punkte als harmonische Pole bezeichnet sind. Dahin gehört die Bestimmung der Curve als gleichseitige Hyperbel; denn sie sagt aus, dass die zwei imaginären unendlich fernen Kreispunkte harmonische Pole sind. In Folge dessen ist die Bestimmung eines sich selbst conjugirten Dreiecks oder eines Systems von harmonischen Polen drei Bedingungen äquivalent, wie es auch die auf dasselbe bezogene Gleichung dadurch lehrt, dass sie nur

zwei unabhängige Constanten enthält. Wenn für eine Parabel ein System harmonischer Pole gegeben ist, so sind durch dasselbe drei Tangenten der Curve bestimmt und ist daher nur noch einer Bedingung zu genügen möglich.

425. 1. Wenn fünf Punkte des Kegelschnitts gegeben sind, so ist im Art. 285 gezeigt worden, wie mit Hilfe des Lineals allein beliebig viele andere Punkte der Curve construirt werden können. Auch kann man durch dieselbe Construction die Polare eines Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt ermitteln, denn man hat nur die zweiten Schnittpunkte der beiden Geraden mit dem Kegelschnitt zu construiren, welche den Pol mit irgend zweien der gegebenen Punkte verbinden. Dann liefert die Construction des Art. 108 die Polare. Die Polaren von zwei Punkten einer Geraden liefern als ihren Durchschnittspunkt den Pol derselben. Hiervon ist die Bestimmung des Centrums ein specieller Fall. (Art. 285.) Die Tangente eines Punktes der Curve bestimmt sich nach demselben Gesetze als die gerade Verbindungslinie desselben mit dem unendlich nahen Punkte der Curve.

2. Aus fünf Tangenten bestimmen sich alle andern Tangenten des Kegelschnitts durch lineare Construction nach Art. 282. Der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente ergiebt sich als der Schnitt derselben mit der unendlich nahen Tangente der Curve nach derselben Regel. Der Pol einer Geraden bestimmt sich als der Schnittpunkt von zwei Geraden, welche zu ihr in Bezug auf zwei sich in ihr schneidende Tangentenpaare harmonisch conjugirt sind; denn die Polare bestimmt mit jeder der gegebenen Tangenten einen Punkt, durch den eine zweite Tangente der Curve geht und die zur Polare harmonische Gerade in Bezug auf das Tangentenpaar geht durch den Pol. Als specieller Fall liegt darin wieder die Construction des Centrums. (Art. 282.) Ob die durch fünf Punkte a, b, c, d, e bebestimmte Curve elliptisch oder hyperbolisch ist, entscheidet sich durch die Doppelstrahlen der Strahlbüschel $(a \,.\, cde)$ und $a(b \,.\, cde)$, wenn man unter dem letzteren das von Parallelen zu bc, bd, be aus a bestimmte Büschel versteht; die Doppelstrahlen dieser Büschel bestimmen die Richtungen der unendlich entfernten Punkte des Kegelschnitts, ihre Realität giebt die Hyperbel, ihr Zusammenfallen die Parabel, ihr Imaginärsein die Ellipse; ihre Rechtwinkligkeit insbesondere die gleichseitige Hyperbel und die unendlich ferne Lage der sie auf dem Hilfskreis (Art. 308, Aufg. 6) bestimmenden Geraden den Kreis.

3. Auch die involutorischen Eigenschaften der ein- und umgeschriebenen Vierecke führen zur Bestimmung des Kegelschnitts aus fünf Punkten oder Tangenten. Vier Tangenten bilden ein umgeschriebenes Vierseit; aus einem Punkte der fünften Tangente geht an den Kegelschnitt eine fernere Tangente, die derselben als sechster Strahl einer Involution entspricht, welche durch die nach den Gegenecken des Vierseits gehenden Strahlenpaare bestimmt ist; etc.

426. 1. Vier Punkte und eine Tangente führen zur Bestimmung nach der Eigenschaft des eingeschriebenen Vierecks, durch seine Gegen-

seitenpaare auf jeder Geraden eine Involution zu bestimmen, welcher auch die Schnittpunkte mit der Curve angehören, so dass die Berührungspunkte einer Tangente nur die Doppelpunkte derselben sein können. (Art. 302.)

Weil zwei Auflösungen dem Problem entsprechen, so kann eine lineare Construction für dasselbe nicht erwartet werden. Auch der Satz von Carnot (Art. 327) kann zur Auflösung des Problems verwendet werden. (Aufg. 1.) Indem man bemerkt, dass durch vier Punkte des Kegelschnitts in dem Diagonalendreiseit des durch sie bestimmten Vierecks drei Pole und ihre Polaren gegeben sind, leitet man aus der einen bekannten Tangente drei andere Tangenten ab und gelangt so zu vier Punkten und vier Tangenten.

2. Vier Tangenten und ein Punkt bestimmen einen Kegelschnitt durch Constructionen, welche den Vorherangeführten nach dem Gesetze der Dualität oder Reciprocität entsprechen.

3. Wenn drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind, so schliesst man nach einem speciellen Falle des Satzes in Art. 302, dass eine Gerade den Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten in Punktepaaren a, b und A, B einer Involution schneidet, welcher der Schnittpunkt mit der Berührungssehne der Tangenten als einer der Doppelpunkte F, F' angehört. Jede der drei Geraden ab, bc, ca bestimmt so in den Doppelpunkten der durch ihre Enden und ihre Schnitte mit den gegebenen Tangenten gebildeten Involution Punkte der Berührungssehne jener Tangenten; sie liegen viermal zu dreien in einer Geraden und das Problem hat somit vier Auflösungen.

4. Die Bestimmung aus drei Tangenten und zwei Punkten geschieht durch die reciproken Constructionen. Das von den drei Berührungssehnen gebildete Dreieck hat seine Ecken in den gegebenen Tangenten und nach dem Vorigen gehen seine Seiten je durch einen festen Punkt der geraden Verbindungslinie der gegebenen Punkte.

5. Die Angabe von zwei Punkten oder zwei Tangenten ist ein specieller Fall von der doppelten Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt; des allgemeineren Problems ist an verschiedenen Stellen des Vorigen gedacht worden. So ward die Bestimmung durch drei Tangenten oder drei Punkte und die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt in Art. 308, Aufg. 6 und in Art. 359 erledigt. Für die Bestimmung durch einen Punkt oder eine Tangente und die doppelte Berührung mit zwei gegebenen Kegelschnitten vergl. man Art. 317, Aufg. 2. Die doppelte Berührung mit einem gegebenen Kegelschnitt und die Berührung mit drei andern Kegelschnitten, die diesen selbst doppelt berühren, ist in Art. 361, Aufg. 1 erledigt.

427. Durch fünf Bedingungen ist ein Kegelschnitt bestimmt, jedoch nicht eindeutig, ausser in den Fällen von fünf Punkten oder Tangenten; den Bestimmungen durch vier Punkte und eine Tangente oder durch vier Tangenten und einen Punkt entsprechen zwei und denen durch drei Punkte oder Tangenten und zwei

Tangenten oder Punkte vier Auflösungen. Sind nicht fünf, sondern nur vier Bedingungen gegeben, so genügen denselben unendlich viele Kegelschnitte und man bezeichnet die Gesammtheit derselben als eine Reihe von Kegelschnitten.

1. Sind die vier gegebenen Bedingungen vier Punkte der Curve, so geht durch jeden beliebigen Punkt ihrer Ebene nur ein Kegelschnitt der Reihe und ist linear bestimmt; man nennt eine solche Reihe insbesondere ein Büschel von Kegelschnitten, und wir haben ein solches vielfach behandelt. Dagegen bilden Kegelschnitte, welche demselben Dreieck umgeschrieben sind und die nämliche Gerade berühren, eine Reihe, von welcher durch jeden Punkt der Ebene zwei Kegelschnitte hindurchgehen; und die durch zwei Punkte gehenden und zwei feste Tangenten berührenden Kegelschnitte bilden eine Reihe, von welcher durch jeden Punkt der Ebene vier Kegelschnitte hindurchgehen.

Wenn nur drei Bedingungen gegeben sind, so bildet die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche denselben genügen, ein Netz von Kegelschnitten; alle die Kegelschnitte des Netzes, welche durch den nämlichen Punkt hindurchgehen oder die nämliche Gerade berühren, bilden eine Reihe und durch zwei Punkte oder Tangenten wird ein Kegelschnitt des Netzes bestimmt. Drei Kegelschnitte, welche demselben angehören, bestimmen das Netz. Seine allgemeine Gleichung ist $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$. (Vergl. Art. 362.) Ein solches Netz hat nach Art. 362 eine covariante Curve dritter Ordnung, welche den Ort der Punkte repräsentirt, deren Polaren in Bezug auf die Kegelschnitte des Netzes durch einen Punkt gehen und zugleich den Ort der Punkte, in welchen sich die dem Netz angehörenden Paare von Geraden schneiden. In ersterem Sinne nennt man sie die Jacobi'sche und im letzteren die Hesse'sche Curve des Netzes.

2. So bilden alle die Kegelschnitte, welche ein gemeinschaftliches System harmonischer Pole haben, ein Netz, dessen Jacobi-Hesse'sche Curve das Dreieck derselben ist (Art. 362, Aufg. 2); die durch einen gegebenen Punkt gehenden Kegelschnitte desselben aber bilden eine Reihe von der besonderen Art, welche als Büschel bezeichnet wurde, weil durch einen Eckpunkt und das Diagonalendreieck ein vollständiges Viereck bestimmt ist, dessen Ecken die Curven enthalten müssen. Das Analoge gilt für die Bestimmung durch Tangenten, harmonische Polaren, etc. Dieselben Begriffe übertragen sich auf Curvensysteme von beliebigen Ordnungen oder Classen. Nach der Anzahl der Glieder der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades (Art. 320) ist eine Curve von der Ordnung oder Classe n durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Bedingungen bestimmt; sind also nur $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ Bedingungen gegeben, so entsprechen denselben unendlich viele Curven der

bezeichneten Art und wir bezeichnen diese Gesammtheit als eine Reihe von Curven; die Anzahl der Curven derselben, welche durch einen Punkt gehen, ist charakteristisch für die Reihe; ist sie gleich Eins, so heisst die Reihe insbesondere ein Büschel. Die Gleichung $U + \lambda U' = 0$, in welcher U und U' Polynome n^{ten} Grades in den Veränderlichen bezeichnen, ist die analytische Darstellung eines solchen Büschels; sie sagt, dass die n^2 gemeinschaftlichen Punkte (Tangenten) von zwei Curven n^{ter} Ordnung (Classe) für unendlich viele Curven dieser Ordnung (Classe) gemeinschaftlich sind. Darum geht durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte (an eben so viel Tangenten) nur eine Curve n^{ter} Ordnung (Classe); aber durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Punkte gehen unzählig viele Curven n^{ter} Ordnung, welche sich ausserdem noch in $n^2 - \{\frac{1}{2}n(n+3) - 1\} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkten schneiden. Die Gesammtheit der n^2 gemeinschaftlichen Elemente bezeichnet man als die Basis des Büschels. Die Curven eines solchen Büschels bestimmen auf jeder geraden Transversale eine Involution n^{ten} Grades (Art. 344), welche $2(n-1)$ Doppelpunkte hat, d. h. unter den Curven eines Büschels n^{ter} Ordnung sind $2(n-1)$, welche eine gegebene gerade Linie zur Tangente haben. Zwei Curvenbüschel m^{ter} und n^{ter} Ordnung $V + \lambda V' = 0$, $U + \lambda U' = 0$ sind projectivisch, wenn die Parameter λ für entsprechende Curven durch eine lineare Relation verbunden oder identisch sind; der Ort der Schnittpunkte entsprechender Curven ist eine Curve der Ordnung $(m+n)$, dargestellt durch $UV' - U'V = 0$. Die Schnitte beider Curvenbüschel mit einer beliebigen Geraden bilden zwei projectivische Involutionen m^{ten} und n^{ten} Grades, welche $(m+n)$ gemeinschaftliche Elemente haben, eben die Durchschnittspunkte der Transversale mit der resultirenden Curve. (Art. 344.)

3. Sind die Curvensysteme nicht Büschel, sondern Reihen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, und gehen von der einen M und von der andern N Curven durch je einen Punkt und denken wir beide projectivisch, d. h. so auf einander bezogen, dass jeder Curve der einen Reihe eine Curve der andern entspricht und umgekehrt, so erzeugen die entsprechenden Curven beider Reihen durch ihren Durchschnitt im Allgemeinen eine Curve von der Ordnung $(mN + nM)$. Für Reihen von Kegelschnitten also insbesondere von der Ordnung $2(M+N)$ und daher für zwei Reihen, welche durch je drei Punkte und eine Gerade bestimmt sind, als für welche $M = N = 2$ ist $= 8$, oder für ein Büschel und eine derartige Reihe $= 6$. Wenn man die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte einer Reihe bildet, so gehen nur diejenigen durch diesen Punkt selbst, welche den durch ihn gehenden Kegelschnitten entsprechen; ist also N die charakteristische Zahl der Reihe, so bilden die bezeichneten Polaren eine Reihe von der Charakteristik N, d. h. sie umhüllen eine Curve N^{ter} Classe. Insbesondere für ein Büschel bilden sie selbst ein Strahlbüschel.

428. Die Bemerkungen dieses Art. gehen zum grossen Theil über Kegelschnitte hinaus auf Curven n^{ter} Ordnung und es ist für die folgenden Entwickelungen nöthig, in dieser Richtung noch zu

bemerken, dass auch die Entwickelungen des Art. 341 auf Curven n^{ter} Ordnung sich unverändert übertragen, d. h. dass das Resultat der Substitution $ly_1 + mz_1$, $ly_2 + mz_2$, $ly_3 + mz_3$ für x_1, x_2, x_3 in die allgemeine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen drei Veränderlichen $U = 0$ in der Form

$$l^n U_y + \frac{n}{1} l^{n-1} m \left\{ \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right) U_y \right\}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} l^{n-2} m^2 \left\{ \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right)^2 U_y \right\} + \text{etc.} \ldots + m^n U_z = 0$$

erhalten wird. So wie a. a. O. die Gleichungen der verschiedenen Polarsysteme oder Gruppen von Punkten und Strahlen, so ergeben sich dann die Gleichungen der verschiedenen **Polarcurven**; nämlich

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right) U_y = 0 \text{ oder} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{n-1} U_z = 0;$$

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right)^2 U_y = 0 \text{ oder} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{n-2} U_z = 0;$$

etc. Für $n = 2$ giebt es nur eine Polare und sie ist identisch mit der geraden Linie, welche früher (Art. 322, etc.) so benannt worden ist. Im allgemeinen Falle sind sie Curven von den verschiedenen Ordnungen $n - 1$, $n - 2$, etc. bis 1, d. h. die $(n - 1)^{te}$ Polare einer Curve n^{ter} Ordnung ist eine gerade Linie.

Die geometrischen Eigenschaften der Polarcurven sind aus diesem Zusammenhang ersichtlich. Für das Verschwinden einer von den drei Veränderlichen kommt die Gleichung der $(n-r)^{ten}$ Polarcurve auf die des $(n-r)^{ten}$ Polarsystems zurück, d. h. jene ist der Ort der Punkte in den durch den Pol gehenden Transversalen, für welche die Summe aller Producte zu r von den Theilungsverhältnissen der auf ihr gelegenen Curvenpunkte verschwindet (Art. 340; Art. 341); man sagt, sie sei der Ort der harmonischen Mittel vom Grade r in Bezug auf die Punkte der Curve für den Pol. Auch die Sätze über Polarsysteme, Art. 341, übertragen sich demnach auf Polarcurven: Ist y ein Punkt der $(n - r)^{ten}$ Polare von x, so ist auch x ein Punkt der r^{ten} Polare von y; da also die ersten Polaren zweier Punkte sich in $(n - 1)^2$ Punkten schneiden, so entspricht jede Gerade einer solchen Anzahl von Punkten als Polare und die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel von Curven $(n - 1)^{ter}$ Ordnung. Wenn insbesondere der Pol auf der Curve selbst liegt, so ist er für jede durch ihn gehende Transversale der harmonische Mittelpunkt ersten Grades; wenn diese aber insbesondere Tangente der Curve ist, so wird der harmonische Mittelpunkt unbestimmt und man erhält den Satz: Die gerade oder die $(n - 1)^{te}$ Polare für einen auf der Curve n^{ter} Ordnung selbst gelegenen Pol ist die Tangente derselben in diesem Punkte. Für jeden beliebigen Pol ist aber auf einer die Curve berührenden Transversale im Berührungspunkt ein harmonischer Mittel-

punkt des $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades und darum schneidet die erste Polare eines beliebigen Punktes die Curve in den Berührungspunkten der vom Pol an sie gehenden Tangenten; somit ist eine Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen von der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Classe. Diese Theorie bildet in ihrer weiteren Entwickelung eine der wichtigsten Grundlagen der allgemeinen Theorie der algebraischen Curven; aber sie muss eben deshalb hier abgebrochen werden. Wir erwähnen nur, dass überall die dualistische Interpretation den Tangentialcoordinaten entsprechend statthaft ist und dass dann an die Stelle der harmonischen Centra Strahlen eintreten, die man als die harmonischen Axen benennen kann.

429. Eine Reihe von Curven n^{ter} Ordnung kann durch zwei Charakteristiken vollkommen bestimmt werden. Wenn zu den gegebenen Bedingungen ein Punkt oder eine Tangente der Curve hinzugefügt wird, so ist die Curve bestimmt und die Anzahl der Lösungen des Problems im ersten Falle sei gleich μ, im zweiten Falle gleich ν; diese Zahlen, die Zahl der Curven der Reihe, welche durch einen Punkt gehen, und die Zahl derer, welche eine Gerade berühren, können als die charakteristischen Zahlen der Reihe bezeichnet werden.

Wir bemerken, dass die Differenzen $(2\nu - \mu)$ und $(2\mu - \nu)$ die Zahl der Paare von Geraden und die Zahl der Paare von Punkten bezeichnen, welche unter den Kegelschnitten einer Reihe auftreten. Denn die Zahl der Kegelschnitte der Reihe, welche eine gegebene Gerade berühren, z. B. ist um die Zahl jener in ein Punktepaar degenerirenden Kegelschnitte kleiner als 2μ, weil die letztern als Ort betrachtet eine doppelt zählende Gerade bilden, die mit jeder Geraden ein Paar zusammenfallende Punkte gemein hat. So sind unter den Kegelschnitten durch vier Punkte drei Paare von Geraden und unter denen an vier Tangenten drei Paare von Punkten, weil μ, ν die Werthe 2, 1 und 1, 2 erhalten.

1. Der Ort der Pole einer festen Geraden in Bezug auf die Curven des Systems ist eine Curve von der Ordnung ν. Denn jeder Punkt des Ortes, welcher in der geraden Linie selbst liegt, ist der Berührungspunkt einer dieselbe berührenden Curve des Systems und es kann solcher Punkte also nach der Voraussetzung nur ν geben, d. h. der fragliche Ort schneidet eine Gerade in ν Punkten, etc. So ist der Ort der Centra für die durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ein Kegelschnitt, dagegen für die durch drei Punkte gehenden und eine Gerade berührenden eine Curve vierter Ordnung.

2. Ebenso gilt der dual entsprechende Satz: Die Enveloppe der Polaren eines festen Punktes in Bezug auf die Curven der Reihe ist eine Curve von der Classe μ.

3. Der Ort der Berührungspunkte der von einem festen Punkte an alle Curven der Reihe gehenden Tangenten ist eine Curve von der Ordnung

$\mu + \nu$. Denn für irgend eine durch den gedachten Punkt gehende Gerade sind die ν Berührungspunkte mit den Curven der Reihe Punkte des Ortes und der Punkt selbst ist für alle jene Curven zu zählen, die durch ihn hindurchgehen, d. h. μ fach. Für das Büschel der durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte ist somit der Ort der Berührungspunkte eine Curve dritter Ordnung; etc. Und: Die Enveloppe der Tangenten der Curven einer Reihe in den Punkten, in welchen eine gegebene Gerade sie schneidet, ist eine Curve von der Classe $(\mu + \nu)$, für welche diese Gerade eine ν fache Tangente ist. Darum ist z. B. die Zahl der Kegelschnitte einer Reihe, welche eine Gerade rechtwinklig schneiden $= \mu + \nu$; und die Asymptoten einer Reihe von Kegelschnitten (μ, ν) umhüllen eine Curve von der Classe $\mu + \nu$, welche die unendlich entfernte Gerade ν mal berührt.

4. Der Ort eines Punktes, dessen gerade Polare in Bezug auf eine feste Curve n^{ter} Ordnung mit seiner Polare in Bezug auf eine Curve der gegebenen Reihe zusammenfällt, ist eine Curve von der Ordnung $\mu(n - 1) + \nu$.

Denn für eine beliebige Gerade seien A und a zwei Punkte in ihr von solcher Lage, dass die gerade Polare von A in Bezug auf die feste Curve mit der geraden Polare von a in Bezug auf eine der Curven der Reihe zusammenfällt; dann hat man zu bestimmen, in wie viel Fällen A und a zusammenfallen können. Diess geschieht aber nach Art. 344. Mit A ist seine Polare in Bezug auf die gedachte Curve gegeben und der Ort ihrer Pole in Bezug auf die Curven der Reihe schneidet nach dem ersten der vorigen Sätze jede Gerade in ν Punkten, d. h. es entsprechen jeder Lage von A eine Gruppe von ν Lagen von a. Nach dem zweiten der vorigen Sätze umhüllen dagegen die geraden Polaren von a in Bezug auf die Curven der Reihe eine Curve μ^{ter} Classe und da die Polaren der Punkte einer Geraden in Bezug auf eine Curve n^{ter} Ordnung nach dem vorigen Art. eine Curve $(n - 1)^{\text{ter}}$ Classe umhüllen, so liefern die $\mu(n - 1)$ gemeinschaftlichen Tangenten der ersteren und der letzteren $\mu(n - 1)$ Punkte A als entsprechend dem gedachten Punkte a. Daher liegen in der angenommenen Geraden $\mu(n - 1) + \nu$ Punkte, in welchen je ein A und ein a sich decken.

Die Punkte, in welchen der betrachtete Ort die feste Curve schneidet, sind Punkte der Berührung dieser Curve mit je einer Curve der Reihe.

5. Die Zahl der Letzteren, welche eine feste Curve n^{ter} Ordnung berühren, ist daher $\mu n(n - 1) + \nu n$ oder $\mu n' + \nu n$, wenn n' die Classe der gegebenen Curve bezeichnet. Für ein Büschel von Kegelschnitten ist insbesondere $\mu = 1$, $\nu = 2$ und daher 6. die Zahl der Kegelschnitte desselben, welche eine Curve der Ordnung n berühren, gleich $n(n + 1)$. Dagegen sind in einer Reihe von Kegelschnitten (μ, ν) solche, die einen festen Kegelschnitt berühren, in der Zahl $2(\mu + \nu)$ enthalten.

430. Vom Schlusssatz des vorigen Art. aus lässt sich die Frage nach der Zahl von Kegelschnitten, welche fünf Bedingungen genügen, umfassender als vorher erledigen.

Denn derselbe sagt, dass die Kegelschnitte durch drei gegebene Punkte, welche eine Curve n^{ter} Ordnung berühren, eine Reihe bilden, für welche die Charakteristiken μ und ν respective die Werthe $n(n+1)$ und $2n(n+1)$ besitzen. Daraus ergiebt sich ebenso wie jener Schlusssatz der neue Satz:

7. Es giebt $nn_1(n+1)(n_1+1)$ Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und zwei Curven von den Ordnungen n und n_1 berühren.

Da ferner für die durch zwei Punkte und zwei Tangenten bestimmte Reihe von Kegelschnitten $\mu = \nu = 4$ ist, so erhält man

8. $4n^2$ Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte, zwei Tangenten und die Berührung mit einer gegebenen Curve n^{ter} Ordnung bestimmt sind.

Nach 7. bilden die durch zwei Punkte, eine Tangente und die Berührung mit einer Curve n^{ter} Ordnung bestimmten Kegelschnitte eine Reihe, für welche μ und ν respective gleich $2n(n+1)$ und $4n^2$ sind; daher folgt aus 5. der Satz

9. Es giebt $2nn_1(nn_1+n+n_1-1)$ Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte gehen, eine Gerade und zwei Curven von den Ordnungen n und n_1 berühren.

Da dann wieder nach 7. und 9. für die Reihe von Kegelschnitten, welche zwei Punkte enthalten und zwei Curven n^{ter} und $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung berühren, μ und ν respective gleich $nn_1(n+1)(n_1+1)$ und $2nn_1(nn_1+n+n_1-1)$ sind, so folgt aus 5. wieder

10. Es giebt

$nn_1n_2\{nn_1n_2+(nn_1+n_1n_2+n_2n)+(n+n_1+n_2)-3\}$ Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte gehen und drei gegebene Curven berühren.

Der Satz 1. giebt ferner für die durch einen Punkt und drei Tangenten bestimmte Reihe, für die $\mu=4$, $\nu=2$ ist,

11. Es giebt $2n(2n-1)$ Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen und drei Gerade sowie eine Curve n^{ter} Ordnung berühren.

Und da nach 8. und 11. für die durch einen Punkt, zwei Gerade und eine Curve bestimmte Reihe $\mu = 4n^2$, $\nu = 2n(2n-1)$ sind, so folgt durch 5. wieder

12. Es giebt $2nn_1(2nn_1-1)$ Kegelschnitte, die durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei Gerade und zwei Curven n^{ter} und $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung berühren.

Aus 9. und 12. folgt

13. Es giebt

$$2nn_1n_2\{nn_1n_2+(nn_1+n_1n_2+n_2n)-(n+n_1+n_2)\}$$

Kegelschnitte, die durch einen Punkt, eine Tangente und die Berührung mit drei Curven von den respectiven Ordnungen n, n_1, n_2 bestimmt sind.

Aus 10. und 13. folgt

14. Es giebt

$$nn_1n_2n_3\{nn_1n_2n_3+(n_1n_2n_3+n_2n_3n+n_3nn_1+nn_1n_2)$$
$$+(nn_1+n_1n_2+n_2n_3+nn_2+n_1n_3+nn_3)-3(n+n_1+n_2+n_3)+3\}$$

Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen und vier Curven von den respectiven Ordnungen n, n_1, n_2, n_3 berühren.

Da endlich die durch vier Tangenten bestimmte Reihe die Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 1$ hat, so liefert 5. noch

15. Es giebt $n(2n-1)$ Kegelschnitte, welche vier Gerade und eine Curve n^{ter} Ordnung berühren.

Dann folgt aus 11. und 15.

16. Es giebt $nn_1\{4nn_1 - 2(n+n_1)+1\}$ Kegelschnitte, welche durch die Berührung mit drei Geraden und zwei Curven n^{ter} und $n_1{}^{ter}$ Ordnung bestimmt sind.

Dann aus 12. und 16. wieder

17. Es giebt $nn_1n_2\{4nn_1n_2 - 2(n+n_1+n_2)+3\}$ Kegelschnitte, welche zwei Gerade und drei Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2 berühren.

Aus 13. und 17. ferner

18. Es giebt
$nn_1n_2n_3\{2nn_1n_2n_3 + 2(n_1n_2n_3 + \ldots) - 2(nn_1 + \ldots) + 3\}$
Kegelschnitte, die eine Gerade und vier Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2, n_3 berühren.

Und aus 14. und 18. endlich

19. Es giebt

$$nn_1n_2n_3n_4\{nn_1n_2n_3n_4 + (n_1n_2n_3n_4 + \ldots) + (nn_1n_2 + \ldots) - 3(nn_1 + \ldots) + 3(n + \ldots)\}$$

Kegelschnitte, welche fünf Curven von den Ordnungen n, n_1, n_2, n_3, n_4 berühren.

Also z. B. 3264, welche fünf gegebene Kegelschnitte berühren; 224, welche durch einen Punkt, eine Tangente und drei berührende Kegelschnitte; 56, welche durch zwei Punkte (Tangenten), eine Tangente (einen Punkt) und zwei berührende Kegelschnitte bestimmt sind; etc.

431. Wir fahren fort in Weiterführung der Sätze des Art. 429.

20. Die Zahl der Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν), welche zwei feste Punkte zu harmonischen Polen haben, ist μ und die Zahl derer, in Bezug auf welche zwei feste Gerade harmonische Polaren sind, ist ν. Denn nach 2. umhüllen die Polaren des einen Punktes eine Curve, an welche vom zweiten aus μ Tangenten gehen; und nach 1. liegen die Pole der ersten Geraden auf einer Curve, die mit der zweiten ν Punkte gemein hat. Darum existiren in einer Reihe μ gleichseitige Hyperbeln.

21. In einer Reihe von Kegelschnitten (μ, ν) umhüllen die geraden Linien, welche den Pol einer festen Geraden L in Bezug auf einen Kegelschnitt des Systems mit den Schnittpunkten dieses Kegelschnitts mit einer andern festen Geraden G verbinden, eine Curve von der Classe $(\mu + 2\nu)$, welche diese letztere Gerade 2ν mal berührt. Denn es gehen durch einen beliebigen Punkt $(\mu + 2\nu)$ Gerade, die einen Punkt a von G mit dem Pol von L in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt verbinden: eine durch diesen Punkt p gehende Gerade schneide G in x, so liegen nach 1. ν Pole auf px und die zugehörigen Kegelschnitte schneiden G in 2ν Punkten u, durch deren jeden μ Kegelschnitte gehen, für welche die von ihren Polen in Bezug auf L nach p gehenden Geraden G in μ Punkten schneiden.

Darum existiren auf G $(\mu + 2\nu)$ Punkte x, von denen jeder mit dem entsprechenden u zusammenfällt. (Art. 344.) Die Gerade G berührt aber 2ν mal, weil auf G ν Pole liegen und die von ihnen nach den 2ν Schnittpunkten von G mit den entsprechenden Kegelschnitten gehenden Geraden 2ν Tangenten der Curve liefern. Wenn G in unendlicher Ferne ist, so sind die betrachteten Geraden die Durchmesser der Kegelschnitte, welche nach den Durchschnitten derselben mit der Geraden L gehen. Setzt man L in unendlicher Ferne voraus, so hat man die Parallelen zu den Asymptoten der Kegelschnitte des Systems, welche durch die bezügliche Pole von G gehen.

22. Wenn man durch die Pole einer Geraden L in Bezug auf die Kegelschnitte der Reihe (μ, ν) gerade Linien nach einem festen Punkte P zieht, so umhüllen die von jenen Polen ausgehenden harmonischen Polaren derselben eine Curve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Classe, welche die feste Gerade ν mal berührt. Denn durch einen beliebigen Punkt p gehen $(\mu + \nu)$ solche harmonische Polaren; auf einer Geraden px, welche L in x schneidet, liegen ν Pole von $L(1)$, durch die man die Geraden nach dem festen Punkt P und ihre conjugirten zieht, die L in ν Punkten y schneiden, welche den x correspondiren; ist aber ein Punkt y willkürlich genommen, so umhüllen seine Polaren eine Curve von der Classe $\mu(2)$ und durch P gehen also μ solche Polaren; die von den Polen der μ zugehörigen Kegelschnitte nach p gezogenen Geraden schneiden L in μ Punkten x und es entsprechen somit einer Geraden px Gerade py in der Zahl ν und einer Geraden py Gerade px in der Zahl μ, d. h. der zu dem citirten Satze des Art. 344 dualistisch entsprechende Satz liefert den Beweis. Ist L unendlich entfernt, so gilt der Satz von den Durchmessern der Reihe (μ, ν), welche den nach einem festen Punkt gehenden conjugirt sind. L ist eine ν fache Tangente, weil sie von ν Kegelschnitten der Reihe berührt wird.

Darum existiren in einer Reihe (μ, ν) eine Zahl $(\mu + \nu)$ Kegelschnitte, von denen zwei conjugirte Durchmesser durch zwei gegebene Punkte gehen.

23. Zieht man durch jeden Punkt a einer Geraden G nach dem Pole einer andern Geraden L in Bezug auf die durch a gehenden Kegelschnitte der Reihe (μ, ν) gerade Linien, so schneiden dieselben die Kegelschnitte in Punkten einer Curve von der Ordnung $(\mu + 2\nu)$, welche μ mal durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht. Der letztere Punkt ist μ fach, weil durch ihn μ Kegelschnitte der Reihe gehen, die von den μ Geraden nach den entsprechenden Polen von L in ihm geschnitten werden. Ausserdem schneidet G ν Kegelschnitte, die ihre Pole auf L haben, in 2ν Punkten. Insbesondere haben die nach den Schnittpunkten der Kegelschnitte der Reihe mit einer festen Geraden gehenden Durchmesser ihre Enden auf einer Curve von der Ordnung $(\mu + 2\nu)$, welche μ mal durch den unendlich fernen Punkt der Geraden geht.

24. Die Geraden, welche von den Berührungspunkten der Kegelschnitte der Reihe (μ, ν) mit den aus einem festen Punkte an sie gehenden Tangenten nach den Polen einer Geraden G gezogen werden, umhüllen eine Curve von der Classe $(2\mu + \nu)$. Denn durch den festen Punkt gehen μ Kegelschnitte und also μ Gerade nach den entsprechenden Polen von G. Da aber die Enveloppe der Tangenten der Kegelschnitte der Reihe (μ, ν)

in Punkten einer Geraden von der Classe $(\mu + \nu)$ ist und diese Gerade in ν Punkten berührt, so gehen von dem festen Punkte aus $(\mu+\nu)$ Tangenten an diese Curve, welche ebenfalls mitzählen. Der Satz gilt insbesondere wieder von den Durchmessern nach den Berührungspunkten.

Man hat auch für die Tangenten der Kegelschnitte der Reihe in ihren Schnittpunkten mit den von einem festen Punkt nach den Polen einer festen Geraden gehenden geraden Linien eine Enveloppe $(2\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Classe und insbesondere für die Tangenten in den Enden der durch einen festen Punkt gehenden Durchmesser eine solche Curve mit ν unendlich fernen Tangenten.

25. Wenn durch den Pol p einer festen Geraden G in jedem Kegelschnitt der Reihe (μ, ν) eine Gerade nach einem festen Punkt P und eine zweite so gezogen wird, dass beide ein festes Segment ef von G nach constantem Doppelverhältniss theilen, so umhüllen die letzteren Geraden eine Curve von der Classe 2ν, welche jede der Geraden Pe, Pf und G νfach berührt.

Denn die einzigen Tangenten durch P sind die Geraden Pe, Pf und jede derselben repräsentirt νmal die umhüllende Gerade, weil sie ν Pole enthält; so auch G, weil sie ν Kegelschnitte der Reihe berührt.

Insbesondere, wenn Durchmesser der Kegelschnitte der Reihe durch einen festen Punkt gehen, so umhüllen die zu ihnen unter gegebenem Winkel geneigten Durchmesser eine Curve $2\nu^{\text{ter}}$ Classe; die νfachen Tangenten sind die unendlich entfernte Gerade und die Asymptoten des Kreises.

26. Wenn in jedem Kegelschnitt der Reihe (μ, ν) durch den Pol der festen Geraden G zwei conjugirte Gerade so gezogen werden, dass sie das Segment ef in G nach gegebenem Doppelverhältniss theilen, so umhüllen dieselben je eine Curve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Classe, welche G νmal berührt. G ist eine ν fache Tangente, weil sie ν Kegelschnitte berührt; und es gehen durch jeden Punkt a von G μ Gerade nach ihrem Pol, weil a auf G einen andern Punkt b durch die Bedingung bestimmt, dass das Doppelverhältniss $\{efab\}$ constant sei und folglich μ Kegelschnitte existiren, die ab harmonisch theilen (20). Speciell gilt der Satz von conjugirten Durchmessern der Kegelschnitte des Systems, welche einen gegebenen Winkel von bestimmtem Sinn einschliessen (also noch specieller von den Axen derselben), wenn man e, f als die imaginären Kreispunkte im Unendlichen voraussetzt. In der Reihe existiren μ Kegelschnitte, deren Axen gegebene Richtung haben. Sind e, f die Richtungen von zwei zu einander rechtwinkligen Geraden, so erhält man die Durchmesser, deren Winkel von bestimmtem Sinn eine Halbirungslinie von fester Richtung haben. (Art. 420.) Dabei umhüllen die Tangenten in den Schnittpunkten der betrachteten conjugirten Geraden Curven von der Classe $(2\mu + \nu)$, welche G zur νfachen Tangente haben.

27. Wenn man durch den Pol p einer Geraden G in jedem Kegelschnitt der Reihe (μ, ν) zwei conjugirte Gerade zieht, die ein festes Segment ef in G nach gegebenem Doppelverhältniss theilen, so schneiden diese die Kegelschnitte in Punkten zweier Curven von der Ordnung $(2\mu+3\nu)$.

Dem Punkte a auf G entspricht ein Punkt b mit dem Doppelverhältniss $\{efab\}$ und zieht man von b Tangenten an die Kegelschnitte, so enthält eine beliebige Gerade L $(\mu+\nu)$ Berührungspunkte und die Geraden, die von ihnen nach den Polen der entsprechenden Kegelschnitte gezogen sind, treffen G in $(\mu+\nu)$ Punkten a', welche dem a entsprechen. Nimmt man umgekehrt a' auf G beliebig an, so gehen durch denselben (21) $\mu+2\nu$ Gerade, deren jede den Pol von G in Bezug auf einen Kegelschnitt der Reihe mit einem Schnittpunkte des Letztern mit L verbindet; die $\mu+2\nu$ Tangenten der Kegelschnitte in diesen letzteren Punkten treffen G in $\mu+2\nu$ Punkten b, denen ebenso viele durch $\{efab\}$ bestimmte Punkte a entsprechen; daher giebt es auf L zusammenfallende entsprechende Punkte in der Zahl $(\mu+\nu)+(\mu+2\nu)$. Sind insbesondere e, f die imaginären unendlich fernen Kreispunkte, so erhält man den Ort der Punkte, deren Durchmesser mit der Tangente einen gegebenen Winkel von gegebenem Sinn machen, speciell also den Ort der Scheitel. Sind sie die Richtungen rectangulärer Geraden, so ist es der Ort der Punkte, deren Durchmesser mit der Tangente einen Winkel bilden, dessen Halbirungslinie eine gegebene Richtung hat.

432. Die Beispiele des vorigen Art. werden genügen, ebenso um den Charakter der Sätze, als die Beweismethode darzulegen, die auf Grund des Satzes von Art. 344, p. 432 ihnen entspricht. Wir fügen ohne Beweis als Aufgaben hinzu:

28. Wenn man in den Schnittpunkten a der Kegelschnitte der Reihe (μ, ν) mit einer festen Geraden L an jene die Tangenten at und zu jeder derselben aus dem nämlichen Punkte eine Gerade at' zieht, welche mit ihr ein festes Segment ef nach gegebenem Doppelverhältniss theilt, so umhüllen die Letzteren eine Curve von der Classe $2\mu+\nu$, welche L $(\mu+\nu)$ mal und ef μ mal berührt. (Vergl. 24, 25.) Sind e, f unendlich entfernt, so sind at, at' respective den entsprechenden Strahlen zweier projectivischen Büschel parallel und diese wieder können insbesondere gegen eine feste Gerade gleich geneigt sein oder durch die Schenkel eines Winkels von constanter Grösse gebildet werden; ist der Letztere ein rechter, so erhält man die Enveloppe der Normalen der Kegelschnitte der Reihe in Punkten einer Geraden. Geht L durch e, so reducirt sich die Classe auf $\mu+\nu$ und L berührt ν mal; und ist e, f im Unendlichen, so sind at, at' zu L und einer Geraden von gegebener Richtung harmonisch conjugirt; ist diese Richtung normal zu L, so machen sie mit L gleiche Winkel.

29. Für die Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν) und einen festen Kegelschnitt S ist der Ort eines Punktes a, für welchen die Tangente at eines durch ihn gehenden Kegelschnitts der Reihe und eine der Tangenten at' von S ein Segment ef nach gegebenem Doppelverhältniss theilen, eine Curve von der Ordnung $2(2\mu+\nu)$, welche 2μ mal durch $e(f)$ geht und S in $2(2\mu+\nu)$ Punkten berührt. Ist ef im Unendlichen, so sind at, at' entsprechenden Strahlen projectivischer Büschel parallel; etc.

30. Wenn man durch jeden Punkt a eines festen Kegelschnittes S die

Tangente at eines durch ihn gehenden Kegelschnitts der Reihe (μ, ν) und eine andere Gerade $a t'$ so zieht, dass beide ein Segment ef nach gegebenem Doppelverhältniss theilen, so umhüllen die letzteren Geraden eine Curve von der Classe $2(2\mu+\nu)$, welche ef 2μ mal und den Kegelschnitt S $2(2\mu+\nu)$ mal berührt. Nach beiden letzten Sätzen ist die Zahl der Kegelschnitte der Reihe (μ, ν), welche einen festen Kegelschnitt S so schneiden, dass die Tangenten im Schnittpunkt ein festes Segment nach gegebenem Doppelverhältniss theilen, gleich $2(2\mu + \nu)$; also insbesondere die der Kegelschnitte, die S unter gegebenem Winkel von bestimmtem Sinne schneiden, oder unter Winkeln von gegebener Richtung der Halbirungslinie.

433. Die vorhergehenden Sätze zeigen den allgemeinen Charakter, dass die Zahl z der Kegelschnitte einer Reihe (μ, ν), welche einer vorgeschriebenen fünften Bedingung genügen, durch ein Binom von der Form $\alpha\mu + \beta\nu$ ausgedrückt wird, für α, β als Zahlen, die von μ, ν unabhängig sind und deren eine auch Null sein kann. Man hat die Zahl $\alpha\mu + \beta\nu$ den Modulus der betrachteten Bedingung genannt. Mit Hilfe dieser Zahlen kann man die Charakteristika einer Reihe berechnen, welche vier gegebenen Bedingungen unterworfen ist. Die Eigenschaften der Reihen, von welchen die beiden vorigen Art. Beispiele gaben, ermöglichen so die Lösung sehr allgemeiner Probleme über die Bestimmung der Kegelschnitte. Die Charaktere der durch Punkte und Gerade bestimmten Reihen sind 1) $(4p) \equiv (1, 2)$; 2) $(4g) \equiv (2, 1)$; 3) $(3p, 1g) \equiv (2, 4)$; 4) $(1p, 3g) \equiv (4, 2)$; 5) $(2p, 2g) \equiv (4, 4)$. Bezeichnet dann B_1 eine gegebene Bedingung, so bestimme man die Charaktere der Reihen $a)$ $(3p, B_1)$, $(2p, 1g, B_1)$, $(1p, 2g, B_1)$, $(3g, B_1)$; die Einführung einer zweiten Bedingung B_2 führt dann zur Berechnung der Charaktere von $b)$ $(2p, B_1, B_2)$, $(1p, 1g, B_1, B_2)$, $(2g, B_1, B_2)$; die der dritten B_3 zu der von $c)$ $(1p, B_1, B_2, B_3)$ und $(1g, B_1, B_2, B_3)$ und endlich die der vierten zur Berechnung der Charakteristiken der durch jene vier Bedingungen bestimmten Reihe (B_1, B_2, B_3, B_4). Die vorigen Sätze dienen dabei als Vermittler, wie folgt: Drückt B z. B. aus, dass zwei conjugirte Durchmesser des Kegelschnittes durch feste Punkte gehen sollen, so hat man nach dem bezüglichen Satze (22.) $z(4p, B) = 3$, $z(3p, 1g, B) = 6$, $z(2p, 2g, B) = 8$, $z(1p, 3g, B) = 6$ und $z(4g, B) = 3$ und somit $(3p, B) \equiv (3, 6)$; $(2p, 1g, B) \equiv (6, 8)$; $(1p, 2g, B) \equiv (8, 6)$; $(3g, B) \equiv (6, 3)$.

Aufg. 1. Wir nehmen als erstes Beispiel die Bestimmung der Charaktere einer Reihe, welche vier feste Kegelschnitte $S_1, \ldots, S_4$ unter gegebenen Winkeln schneidet. Dabei sind nach einander die Charakteristiken von

$a)$ $(3p, S_1)$, $(2p, 1g, S_1)$, $(1p, 2g, S_1)$, $(3g, S_1)$;

b) $(2p, S_1, S_2), (1p, 1g, S_1, S_2), (2g, S_1, S_2)$; *c*)$(1p, S_1, S_2, S_3)$, $(1g, S_1, S_2, S_3)$ zu berechnen und man bedient sich dazu des am Schluss des vorigen Art. gegebenen Satzes oder der Formel $2(2\mu + \nu)$. Nach ihm schneiden in den Reihen $(4p)$ und $(3p, 1g)$ respective 8 und 16 Kegelschnitte S_1 unter gegebenen Winkeln, d. i. man hat $(3p, S_1) \equiv (8, 16)$; denn wenn 8 Kegelschnitte S_1 unter gegebenem Winkel schneiden, so gehen auch 8 Kegelschnitte der Reihe $(3p, S_1)$ durch einen vierten Punkt, etc.; ebenso folgt dann $(2p, 1g, S_1) \equiv (16, 24)$, $(1p, 2g, S_1) \equiv (24, 20)$, $(3g, S_1) \equiv (20, 10)$. Die Charaktere von $(2p, S_1, S_2)$ sind die Zahlen $z(3p, S_1, S_2)$; $z'(2p, 1g, S_1, S_2)$ und daher nach dem letzten Satz des vorigen Artikels angewendet auf $(3p, S_1)$ und $(2p, 1g, S_1)$ ferner $(2p, S_1, S_2) \equiv (64, 112)$; ebenso $(1p, 1g, S_1, S_2) \equiv (112, 136)$, $(2g, S_1, S_2) \equiv (136, 100)$. Nach den drei letzten Reihen erhält man ferner für S_3 die Reihen $(1p, S_1, S_2, S_3) \equiv (480, 720)$, $(1g, S_1, S_2, S_3) \equiv (720, 744)$ und endlich zuletzt $(S_1, S_2, S_3, S_4) \equiv (3360, 4368)$. Es giebt endlich $(2 \cdot 3360 + 4368)\, 2$ oder 22176 Kegelschnitte, welche fünf gegebene Kegelschnitte unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden.

Aufg. 2. Oder ein Kegelschnitt der Reihe genüge den Bedingungen: B_1, er berühre eine Curve von der Ordnung n; B_2, er habe einen Brennpunkt auf einer Curve von der Ordnung p; B_3, sei einem gegebenen Kegelschnitt S ähnlich; B_4, seine Directrix berühre eine Curve q^{ter} Classe.

Für die Charaktere der Reihe $(3p, B_1)$ hat man $z(4p, B_1) = n(n+1)$, (Satz 4); $z'(3p, 1g, B_1) = 2n(n+1)$ und somit $(3p, B_1) \equiv \{n(n+1), 2n(n+1)\}$. Ebenso $(2p, 1g, B_1) \equiv \{2n(n+1), 4n^2\}$, $(1p, 2g, B_1) \equiv \{4n^2, 2n(2n-1)\}$,

$$(3g, B_1) \equiv \{2n(2n-1),\; n(2n-1)\}.$$

Für die Bedingung B_2 hat man den Satz: Die Schnittpunkte der von zwei festen Punkten an jeden Kegelschnitt der Reihe (μ, ν) gehenden Tangenten liegen auf einer Curve $3\nu^{\text{ter}}$ Ordnung, welche νmal durch jeden der zwei Punkte hindurchgeht; derselbe giebt den Ort der Brennpunkte für die imaginären Kreispunkte im Unendlichen als jene festen Punkte. Darnach folgt aus $(3p, B_1)$ und $(2p, 1g, B_1)$ nun $z(3p, B_1, B_2) = 2 \cdot 3n(n+1)p$, $z'(2p, 1g, B_2) = 3 \cdot 4n^2p$; also $(2p, B_1, B_2) \equiv \{2 \cdot 3n(n+1)p,\ 3 \cdot 4n^2p\}$. Ebenso ist $z(2p, 1g, B_1, B_2) = 3 \cdot 4n^2p$, $z'(1p, 2g, B_1, B_2) = 2 \cdot 3n(2n-1)p$ und somit $(1p, 1g, B_1, B_2) \equiv \{3 \cdot 4n^2p,\ 2 \cdot 3n(2n-1)p\}$: endlich $z(1p, 2g, B_1, B_2) = 2 \cdot 3n(2n-1)p$, $z'(3g, B_1, B_2) = 3n(2n-1)p$ und also $(2g, B_1, B_2) \equiv \{2 \cdot 3n(2n-1)p,\ 3n(2n-1)p\}$.

Für die dritte Bedingung dient der Satz: In der Reihe (μ, ν) giebt es 2μ Kegelschnitte, welche einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich sind. Nach $(2p, B_1, B_2)$ und $(1p, 1g, B_1, B_2)$ hat man daher $z(2p, B_1, B_2, B_3) = 2 \cdot 2 \cdot 3n(n+1)p$, $z'(1p, 1g, B_1, B_2, B_3) = 2 \cdot 3 \cdot 4n^2p$ und $(1p, B_1, B_2, B_3) \equiv \{2 \cdot 2 \cdot 3n(n+1)p,\ 2 \cdot 3 \cdot 4n^2p\}$; ebenso nach $(1p, 1g, B_1, B_2)$ und $(2g, B_1, B_2)$ nun $z(1p, 1g, B_1, B_2, B_3) = 2 \cdot 3 \cdot 4n^2p$ und $z'(2g, B_1, B_2, B_3) = 2 \cdot 2 \cdot 3n(2n-1)p$, also

$$(1g, B_1, B_2, B_3) \equiv \{2 \cdot 3 \cdot 4n^2p,\ 2 \cdot 3n(2n-1)p\}.$$

Endlich entspricht der vierten Bedingung der Satz: Die Directricen einer

Reihe (μ,ν) umhüllen eine Curve von der Classe $(2\mu+\nu)$, die die unendlich ferne Gerade ν mal berührt. Man erhält aus $(1p, B_1, B_2, B_3)$ und $(1g, B_1, B_2, B_3)$ hiermit $z(1p, B_1, B_2, B_3, B_4) = [2.2.2.3n(n+1)p + 2.3.4n^2p]q$, $z'(1g, B_1, B_2, B_3, B_4) = [2.2.3.4n^2p + 2.3n(2n-1)p]q$ und hat daher

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) \equiv \{24npq(2n-1),\ 6npq(10n-1)\}.$$

Soll endlich unter den Kegelschnitten der Reihe die Zahl derer bezeichnet werden, deren Centra auf einer gegebenen Curve r^{ter} Ordnung liegen, so ist nach dem Satz 1. diese Zahl $=6npqr(10n-1)$. Diese Zahl bleibt unverändert, wenn die Bedingung von der Directrix dadurch ersetzt wird, dass die Normale des Kegelschnittes im Durchschnitt mit einer gegebenen Geraden eine Curve q^{ter} Ordnung berühre oder dass die Normale in einem der Durchschnittspunkte mit einer Curve q^{ter} Ordnung durch einen gegebenen Punkt gehe; denn in den bezüglichen Sätzen tritt gleichmässig die Zahl $2\mu+\nu$ als Ordnungs- oder Classenzahl auf. Die Zahl der Lösungen ist aber die doppelte der Vorigen, wenn man verlangt, dass der Scheitel auf einer Curve von der Ordnung q liege.

Aufg. 3. Sind allgemein $\alpha_1\mu+\beta_1\nu$, etc., $(\alpha_4\mu+\beta_4\nu)$ die Moduli der vier Bedingungen B_1, B_2, B_3, B_4, so erhält man nach einander $(3p, B_1) \equiv (\alpha_1+2\beta_1,\ 2\alpha_1+4\beta_1)$; $(2p, 1g, B_1) \equiv (2\alpha_1+4\beta_1,\ 4\alpha_1+4\beta_1)$; $(1p, 2g, B_1) \equiv (4\alpha_1+4\beta_1, 4\alpha_1+2\beta_1)$; $(3g, B_1) \equiv \{4\alpha_1+2\beta_1, 2\alpha_1+\beta_1\}$.
Sodann

$$(2p, B_1, B_2) \equiv \{\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 4\beta_1\beta_2,\ 2\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2\beta_1\beta_2\};$$

$$(1p, 1g, B_1, B_2) \equiv \{2\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 4\beta_1\beta_2,\ 4\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \beta_1\beta_2\};$$

$$(2g, B_1, B_2) \equiv \{4\alpha_1\alpha_2 + 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2\beta_1\beta_2,\ 4\alpha_1\alpha_2 + 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \beta_1\beta_2\}.$$

$$(1p, B_1, B_2, B_3) \equiv \{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 4\beta_1\beta_2\beta_3,\ 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2\beta_3\};$$

$$(1g, B_1, B_2, B_3) \equiv \{2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2\beta_3,\ 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\}.$$

Dann folgen die Charakteristiken der Reihe (B_1, B_2, B_3, B_4) mit

$$\mu = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 + 4\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4 + 2\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4,$$
$$\nu = 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 + 2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4.$$

Da der Modul der Bedingung der Berührung mit einer Curve von der Ordnung β_5 und der Classe α_5 genau $\alpha_5\mu+\beta_5\nu$ ist, so ist insbesondere die Zahl der Kegelschnitte, welche fünf Curven von gegebenen Ordnungen β_i und Classen α_i berühren, gleich

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_5 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_4\beta_5 + 4\Sigma\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\beta_5$$
$$2\Sigma\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5.$$

Für die weitere Ausführung dieser Theorie, insbesondere die Behandlung vielfacher Bedingungen, wie die doppelter Berührungen, Berührungen höherer Ordnungen etc. verweisen wir auf die Quellen; denn das Vorige erscheint hinreichend zur Charakteristik der Methode.

Quellen- und Literatur-Nachweisungen.

A. Kap. I—XIV.

Art. 120, p. 152, Zl. 15 v. o. Die Gleichung der Sehne ist von Burnside dem Verfasser angegeben worden. — Art. 134, Aufg. 7. Vergl. „Cambridge Math. Journ." Bd. 1, p. 169. — Art. 138 f. Die Untersuchung der Systeme von Kreisen mit der nämlichen Radicalaxe ist neuestens von Casey mit Ergebnissen bereichert worden. Siehe „Quarterly Journ. of Mathem." Bd. 5, p. 43, 118. Vergl. Art. 397. — Art. 156. Die Gleichung der einem Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitte ward discutirt von Bobillier in Gergonne's „Annal." Bd. 18, p. 320. — Art. 157. Diese Gleichung einer Sehne gab Hermes. Vergl. die Programmschrift: Die Verhältnisscoordinaten in der Ebene. p. 10. (Berlin 1860.) — Art. 158. Vergl. Ferrers, „Quarterly Journal of Mathem." Bd. 2, p. 120. Die zweite Ableitung steht zuerst in „Dublin Exam. Papers." Jan. 1857. — Art. 160. Die Gleichung der Sehne zwischen zwei Punkten der Curve gab Hart. Ebenso die Ableitung der Gleichung des eingeschriebenen Kreises in der Anmerk. des Art. 161. Vergl. über Kreise am Dreieck Greer „Quarterly Journ." Bd. 5, p. 313; Bd. 7, p. 70; Griffiths ibid. Bd. 6, p. 229, 357; Bd. 7, p. 46, 341. — Art. 162, Aufg. 4 der Satz von Feuerbach, zuerst in der Schrift seines Urhebers über die Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks (Nürnberg 1822, p. 55) gegeben, dann von Steiner in Gergonne's „Annal." Bd. 19, und in „Die geometrischen Constructionen" (Berlin 1833; § 12, Anmerk.). Im Jahre 1860 kamen die Geometer von Dublin auf diese Sätze und Salmon theilte im „Quarterly Journ. of Math." Bd. 4, p. 152 Hart's, W. R. Hamilton's und seine Resultate mit. Insbesondere übertrug Hart dieselben auf die Kugel. (Vergl. Art. 398, Aufg. 3.) Hamilton's Beweis und Construction findet man Art. 312, Aufg. 2. — Art. 167. Diese Methode gab Boole im „Cambridge Math. Journ." Bd. 3, p. 106 und 2[te] Serie Bd. 6, p. 87. — Art. 200. Die Sätze in den Aufg. 4 bis 8 gab Sadleir. — Art. 234. Den Satz in Aufg. 6 gab Frost, „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 1, p. 68. Vergl. Hittorf in „Crelle's Journ." Bd. 38, p. 89. Für die Gleichung der Aufg. 7 siehe Davies, „Philosoph. Magazine" 1842, p. 192. Der Beweis in Aufg. 9 rührt von Mac Cullagh her; der in Aufg. 11 von Larrose „Nouvelles Annal." Bd. 19, p. 85. Die Gleichung der Aufg. 15 gab M. Roberts. — Art. 235. Den Satz der Aufg. 4 gab Gregory, „Cambridge Math. Journ." Bd. 2, p. 16. — Art. 236. Für Aufg. 1 siehe Brianchon, Poncelet in Gergonne's „Annal." Bd. 11, p. 205; für Aufg. 4 ibid. p. 210. — Art. 237. Die hier als specieller Fall der Methoden des 17. Kap. vorgetragene Methode ward früher empfohlen von O'Brien, „Cambridge Math. Journ." Bd. 4, p. 99. — Art. 239. Die Formeln der Aufg. 7 gab Mac Cullagh „Dublin Exam. Papers" 1836, p. 22. Das Beispiel 10 Burnside. Ebenso die Aufg. 15, welche wir zu



demselben Art. nachtragen*). — Art. 240. Vergl. Turner „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 1, p. 122. — Art. 253. Für Aufg. 1 vergl. Joachimsthal, „Crelle's Journ." Bd. 36, p. 95. Für Aufg. 2 dasselbe und Steiner, „Crelle's Journ." Bd. 32, p. 300. — Art. 265. Die Betrachtung über die Focalsehne verdankt der Autor Townsend. — Art. 266. Dieser Satz rührt von Graves her; siehe seine Uebersetzung von Chasles' Mém. „On Cones and spherical Conics" p. 77. — Art. 267. Dieser erweiterte Satz ward zuerst von Mac Cullagh, „Dublin Exam. Papers" 1841, p. 41; 1842, p. 68, 83; dann von Chasles „Comptes rendus" Bd. 17, p. 838 gegeben. — Art. 268. Diesen Beweis gab Hart, „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 4, p. 193. — Art. 269. Die Kegelschnitte am Viereck behandelte Freyer und bewies die von Steiner („System. Entwickel." p. 159; „Crelle's Journ." Bd. 45, p. 189) aufgestellten Sätze. (Art. 292, 313, 317.) Vergl. seine Dissertation „de quadrilateri et quadranguli inter se polarum connexu". Breslau 1862.

B. Kap. XV—XXV.

Art. 281. Der Satz von Brianchon steht im 13. Heft des „Journ. de l'école polyt." p. 301. — Art. 284, Aufg. 2. Der Beweis ward dem Verfasser unabhängig von de Morgan und Burnside mitgetheilt. Für fünf Gerade bewies Miquel (Catalan's „Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire" p. 93), dass die Brennpunkte der fünf Parabeln, welche sie zu vieren berühren, auf einem Kreise liegen. Der Beweis in Aufg. 3 ist von Moore. Der Pascal'sche Satz steht in der Schrift von 1640: „Essais pour les Coniques." — Art. 286. Steiner lenkte die Aufmerksamkeit der Geometer auf die vollständige Figur des Pascal'schen Sechseck's in Gergonne's „Annal." Bd. 18, p. 319. 1827. Seine Sätze ergänzte Plücker „Crelle's Journ." Bd. 5, p. 268 (vergl. Steiner „System. Entwickel." p. 311); später haben Hesse ibid. Bd. 24, p. 40, Bd. 41, p. 269; Cayley Bd. 41, p. 66; Kirkmann „Cambridge and Dublin Math. Journ." Bd. 5, p. 185 das System untersucht; zuletzt Grossmann „Crelle's Journ." Bd. 58, p. 174 und v. Staudt, ibid. Bd. 62, p. 142 neue Beiträge dazu gegeben. Siehe Hesse's „Vorlesungen a. d. analyt. Geom. d. Kreises u. d. g. Linie". Leipzig 1865. Vorl. 10. — Art. 291. Der Satz Aufg. 3 ist von Burnside und der Aufg. 4 von Roberts. — Art. 295. Die Ausdrucksweise des Satzes der Aufg. 1 gab Townsend in dem Werke: „Chapters on the modern geometry" Dublin 1865. Bd. 2, p. 165. Vergl. die elegante Behandlung eines allgemeinen Problems über projectivische Büschel von

---

*) Aufg. 15. Die Länge der Sehne einer Ellipse, welche eine confocale Ellipse von den Halbaxenquadraten a^2-h^2, b^2-h^2 berührt, ist $=2hb'^2:ab$.

Die Bedingung, unter welcher die Sehne zwischen den Punkten α, β den confocalen Kegelschnitt berührt, ist
$b^2(a^2-h^2)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+a^2(b^2-h^2)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=a^2b^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,
und (Aufg. 4) $a^2b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=h^2\left\{b^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+a^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\}=h^2b'^2$.
Die Länge der Sehne ist $2b'\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=2hb'^2:ab$. Mit Hilfe dieses Satzes können verschiedene auf Focalsehnen bezügliche Sätze auf Sehnen ausgedehnt werden, welche confocale Kegelschnitte berühren.

Hesse in „Crelle's Journ." Bd. 62, p. 188 und im Allgemeinen für diesen Gegenstand desselben Autors schon genannte „Vorlesungen". (3. bis 7.) — Art. 302. Der Hauptsatz von Sturm; Gergonne's „Annal." Bd. 17, p. 180. — Art. 303. Die Methode und die Beispiele dieses Art. gab P. Serret in „Nouv. Annal." Bd. 24, p. 145. Dass die conjugirten zu den Punkten einer Geraden in den Diagonalen eines Vierecks in einer Geraden liegen, gab Steiner an: „Crelle's Journ." Bd. 3, p. 212. Den allgemeineren Satz, dass drei Paare harmonischer Theilpunkte der Diagonalen in einem Kegelschnitt liegen, verdankt man Hesse. „De Curvis et Superficiebus secundi ordinis." „Crelle's Journ." Bd. 20, p. 301. Ebenda findet man zuerst den Begriff harmonischer Pole oder conjugirter Punkte. — Art. 307, Aufg. 6; Art. 308, 6; Art. 329, 7. Die Aufgabe ward zuerst für das Dreieck und den Kreis von Cramer an Castillion vorgelegt und fand in den Berliner Memoiren von 1776 Lösungen von diesem und Lagrange; des letzteren Formel construirte Euler. (Petersburger Mém. IV.) Die Ausdehnung auf Polygone gaben Oltajano und Malfatti; zu Kegelschnitten gingen für das Dreieck Brianchon und Gergonne über; die Lösung von Poncelet steht in seinem „Traité des propriétés proj." p. 352. Der Art. 308, Aufg. 6 gegebene Beweis ist von Townsend. — Art. 311. Lösung der Aufg. 1 von Burnside. — Art. 313. Vergl. Whitworth „Messenger of Math." Heft 10, p. 71. Aufg. 4 entspricht einer von Cremona gestellten Aufg. („Giornale di Matem." Bd. 2, p. 30). Siehe Art. 356, Aufg. 4, 6, wo der Kegelschnitt dieser vierzehn Punkte als Covariante zweier Kegelschnitte nachgewiesen ist. Vergl. Ferrers „Messenger of Math." Heft 10, p. 68. — Art. 321. Man verdankt diese Methode Joachimsthal. — Art. 323, Aufgabe. Vergl. Cayley „Philosoph. Magaz." Bd. 25, p. 181. — Art. 324, Aufg. 2. Vergl. Hearn's „Researches on conic sections." — Art. 327. Das Theorem von Carnot findet sich in „Géométrie de position" p. 437. Vergl. Chasles, „Traité des sections coniques." Den Specialfall des Satzes in Aufg. 3 bewies Steiner, Gergonne's „Annal." Bd. 19, p. 3. — Art. 329. Der Satz von dem Polarenbüschel eines Punktes ist von Lamé. „Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie." Paris 1818. Der Satz in Aufg. 5 ist von Burnside, der in Aufg. 6 von Williamson. — Art. 330. Die Methode dieses Art. gab Aronhold gelegentlich in „Crelle's Journ." Bd. 61, p. 102. — Art. 337, 338. Vergl. Cayley's „Fifth Memoir upon Quantics" in „Philosoph. Transactions" Bd. 148, p. 434, und meine „Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen." Leipzig 1862. I. Kap. Für Art. 342, 343 ibid. III. Kap. Auch Clebsch hatte dieselbe Theorie bearbeitet und theilte mir nach Erscheinen meiner Schrift sein Manuscript freundschaftlich mit. Ich verdanke demselben Mehreres in der hier gegebenen Darstellung, namentlich in Art. 341. Neuestens hat Battaglini in „Giornale di Matem." Bd. 2, p. 170 etc. und Bd. 3, p. 24 etc. dieselbe Theorie ausführlich dargestellt. — Art. 342. Das Beispiel ist von Cremona. — Art. 344. Für die Theorie der Involution erscheint wichtig die Abhandlung von Cayley „Transact. of the Cambridge Philos. Soc." Bd. 11, p. 21. (1865.) — Art. 346. Die Gleichung $k^3\Delta + 3k^2\Theta + 3k\Theta' + \Delta' = 0$ findet sich

zuerst in Lamé: „Examen des différentes méthodes". — Art. 348, Aufg. 2. Vergl. meine Abhandlung in Grunert's „Archiv d. Math." Bd. 37, p. 20. — Art. 349. Vergl. Beltrami „Giornale di Matem." Bd. 3, p. 76. — Art. 351, Aufg. 2. Satz von Faure: „Nouvelles Annal." Bd. 19, p. 234. Der Satz Aufg. 5 ist von Hart, der Aufg. 6 von Burnside. Vergl. „Zeitschrift f. Math." Bd. 6, p. 140. — Art. 352. Die Bedingung für das ein- und umgeschriebene Dreieck ward von Cayley in „Philosoph. Magaz." Bd. 6, p. 99 mit Hilfe der Theorie der elliptischen Functionen gegeben — wie vorher Jacobi „Crelle's Journ." Bd. 3, p. 376 für den Kreis gethan. Er beweist auch, dass wenn die Quadratwurzel aus $k^3 \Delta + k^2 \Theta + k \Theta' + \Delta'$ nach Potenzen von k entwickelt durch $A + Bk + Ck^2 +$ etc. dargestellt wird, die Bedingungen für die Möglichkeit eines dem Kegelschnitt $S = 0$ umgeschriebenen und dem Kegelschnitt $S' = 0$ eingeschriebenen nEcks für $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ durch die Ausdrücke $C = 0$, $D = 0$, $CE - D^2 = 0$, $DF - E^2 = 0$, $CEG + 2DEF - CF^2 - D^2G - E^3 = 0$, $DFH + 2EFG - DG^2 - E^2H - F^3 = 0$, etc. — sämmtlich Determinanten der Coefficienten der Entwickelung — gegeben sind. Man vergleiche Rosanes und Pasch in „Crelle's Journ." Bd. 64, p. 126 und Moutard im Anhange zu Poncelet's „Applications d'analyse et de géométrie". Bd. 1, p. 535. — Art. 356. Für Aufg. 4, 6 vergl. oben Art. 313 und Ferrers „Quarterly Journ." Bd. 7, p. 20. Der Satz der Aufg. 14 rührt von Faure her. — Art. 357. Die specielle Transformation der Aufgabe ward von Trudi untersucht; vergl. Brioschi in „Giornale di Matem." Bd. 1, p. 26. — Art. 358. Die allgemeine Bestimmung der Substitutionscoefficienten in entwickelter Form im Texte, die Gleichungen der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte in Aufg. 6, sowie die Darstellung der Transformation auf das gemeinsame System harmonischer Pole in Aufg. 7 hat Aronhold gegeben; „Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie", „Crelle's Journ." Bd. 62, p. 281; siehe p. 317 f., p. 328 f. — Art. 359, Aufg. 1. Cayley gab im Wesentlichen diese allgemeine Auflösung des Problems der Berührungen; „Crelle's Journ." Bd. 39, p. 4. Vergl. „Philosoph. Magazin", Bd. 27, p. 42. — Art. 362. Für die Transformation auf die Hauptaxen studire man die Abhandlung von Jacobi, „Crelle's Journ." Bd. 12, p. 50; vergl. Bd. 19, p. 309 und Hesse „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes". Leipzig 1861. 237 f.; Weierstrass „Bericht der k. Preuss. Akad. d. Wissensch." 1858. p. 207. Vergl. Art. 392, Aufg. 4. — Art. 364. Der Satz der Aufg. 2 ist von Ferrers. — Art. 365. Vergl. Hensley „Quarterly Journ." Bd. 5, p. 177, p. 273 und Cayley über die durch die Brennpunkte eines Kegelschnitts gehenden Kegelschnitte, ibid. p. 275. Ueber die Behandlung des Problems der Brennpunkte als der Algebra binärer Formen angehörig gab neuestens Siebeck eine interessante Abhandlung in „Crelle's Journ." Bd. 64, p. 175. Der Satz in Aufg. 8 ist von Faure; vergl. Brisse „Nouvelles Annal." Bd. 23, p. 253, 257; p. 393. — Art. 366 bis 370. Die hier entwickelte Theorie gab zuerst Cayley in seinem „Sixth Memoir upon Quantics" in „Philosoph. Transactions" Bd. 149. — Art. 372. Vergl. Cremona „Giornale di Matem." Bd. 1, p. 360. Die Formel der Aufg. 2 stammt von Syl-

vester. — Art. 373. Der Satz über den Zusammenhang der vier von einem Punkte ausgehenden Normalen rührt von Joachimsthal her (siehe „Crelle's Journ." Bd. 26, p. 172; Bd. 38); seine allgemeine Form gab ihm Cayley in „Crelle's Journ." Bd. 56, p. 182. — Art. 374. Zum Studium ist zu empfehlen die Abhandlung von Clebsch „Crelle's Journ." Bd. 62, p. 64. — Art. 375. Für die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften ist das grundlegende Werk von Möbius „Der barycentrische Calcul" 1827 zu nennen, wo im 2. Abschnitt (p. 179—368) von der Collineation und den speciellen Arten derselben, im 4. und 5. Kap. des 3. Abschnitts von der Polarreciprocität und von dem allgemeinen Entsprechen zwischen Punkten und geraden Linien gehandelt wird. — Art. 381. Die Methode der reciproken Polaren gab Poncelet; „Crelle's Journ." Bd. 4, p. 1 f. — Art. 396. Die Parabel als Directrix der Reciprocität hat besonders Chasles empfohlen. „Correspond. mathém." von Quetelet, Bd. 5, 6. — Art. 397. Die Methode der reciproken Radien vectoren ward als „Princip des images" gegeben von W. Thomson in „Liouville's Journ." Bd. 10, p. 364. Vergl. Liouville Bd. 12., p. 365. Schon Jacobi hatte sich mit solchen Betrachtungen beschäftigt, siehe „Crelle's Journ." Bd. 15, p. 309. Neuestens ist diese Methode auf elementarem Wege als Circular-Inversion von Townsend (siehe „Chapters on the modern Geometry" Bd. 2, p. 363) entwickelt worden. Hart wendete sie auf das System des Feuerbach'schen Kreises an und gab eine Gruppentheilung des Systems der Berührungskreise von drei Kreisen („Quarterly Journ." Bd. 4, p. 260). Casey gelang ein einfacher Beweis derselben (ibid. Bd. 5, p. 318). Zum besonderen Studium ist zu empfehlen: Möbius „Die Theorie der Kreisverwandschaft", in „Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wissensch." Bd. 4, p. 531. — Art. 398. Die Constante der Circularinversion und ihre Anwendungen gab Casey und ich verdanke sie der brieflichen Mittheilung Salmon's. — Art. 400. Die Methode des Entsprechens von Geraden in Bezug auf ein Vierseit begründete Steiner („Systematische Entwickelung" p. 277); die Anwendung auf das Problem der Normalen verdanke ich Cremona. — Art. 401. Das Entsprechen von Punkten in Bezug auf das Büschel von Kegelschnitten entwickelten Steiner (ibid. p. 266) und Magnus „Crelle's Journ." Bd. 8, p. 51. Dem speciellen Fall der Aufg. 1 entspricht die Kreisverwandschaft; vergl. in der citirten Abhandlung von Möbius p. 556 f. — Art. Die Methode der Projection verdankt man Poncelet; „Traité des propriétés projectives des figures". 1822. Man kann diess Werk als grundlegend für die neuere Geometrie (in einem weiteren als dem üblichen Sinne des Wortes) bezeichnen. — Art. 414, Anmerk. Vergl. Mulcaky „Principles of modern Geometry." 2. Aufl. Dublin 1862. — Art. 416. Das Princip der Continuität stellte Poncelet in seinem vorgenannten Hauptwerk auf. Vergl. über seine Begründung desselben Chasles (Schuke) „Geschichte der Geometrie" p. 193 f. — Art. 423. Dieser Beweis des Satzes von Mac Cullagh ist von Graves gegeben worden. — Art. 427. Für den Begriff der Curvenreihe siehe de Jonquières „Théorèmes généraux" etc. „Liouville's Journ." Bd. 26, p. 113. Ueber die gemeinschaftlichen Elemente der Curven eines Büschels vergl. Plücker „Analyt.-geom.

Entwickelungen", Bd. 1, p. 229. Der Satz von den Involutionen, die ein Büschel von Curven auf einer Transversale bestimmt, ward allgemein von Poncelet ausgesprochen „Comptes rendus" 1843, p. 953. — Art. 428. Die Polarentheorie geht zurück auf einen Satz von Cotes; siehe Maclaurin's Abhandlung von den Curven dritter Ordnung in de Jonquières' „Mélanges de Géométrie pure" (Paris 1856), p. 205; für die allgemeine Entwickelung vergl. Bobillier in Gergonne's „Annal." Bd. 19, p. 305; Grassmann „Theorie der Centralen", „Crelle's Journ." Bd. 24, p. 262 und namentlich Salmon „A treatise on the higher plane curves", 1852, oder meine Abhandlung „Zeitschrift f. Mathem." Bd. 4, p. 91. — Art. 429. Die Anwendung von zwei Charakteristiken zur Definition einer Reihe ist die glückliche Idee von Chasles; an ihrer Entwickelung haben de Jonquières und Cremona fördernden Antheil genommen. Chasles' Veröffentlichungen begannen im Febr. 1864, „Comptes rendus" Bd. 58, p. 222 und setzen sich fort p. 297, 425, 1176; Bd. 59, p. 7, 93, 209, 345; sie erscheinen noch nicht abgeschlossen. de Jonquières' Beiträge findet man in „Liouvilles' Journ." Bd. 29 und 30 (1864, 1865); die von Cremona in „Comptes rendus" Bd. 59, p. 776. Eine Darstellung der Theorie gab der Letztere in „Annali di Matem." Bd. 6; er hat sie der deutschen Ausgabe seines Werkes: „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven". Greifswald 1865, — beigefügt. In unserer Darstellung rührt der Beweis im Art. 430 und die kurze Form mancher Beweise in Art. 431 von ihm her.

und es ist damit jedenfalls eine fühlbare Lücke der Litteratur zum Besten der Studierenden ausgefüllt worden. — — Das Werk bietet genug, ja hie und da vielleicht mehr als genug für das erste Studium der genialen Schöpfungen von Legendre, Abel und Jacobi. Die Darstellung muss als sehr deutlich bezeichnet werden u. s. w." [Schlömilch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1862, 1. Heft.]

Durège, Dr. H., ordentlicher Professor am Polytechnicum zu Prag, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's. gr. 8. 1864. geh. n. 1 Thlr. 18 Ngr.

„Ich möchte, nach allen diesen Ueberlegungen, das Werk von Durège allen Anfängern empfehlen, welche sich eine erste Kenntniss der modernen mathematischen Anschauungsweisen erwerben wollen. Ich halte dafür, es sei sehr zweckmässig, dass der Lernende ziemlich bald sich an die Betrachtung der Eigenschaften der Functionen gewöhnt. Das gewöhnliche mathematische, mehr rechnende Verfahren, wird durchaus nicht überflüssig durch diese neuere Betrachtungsweise; es lassen sich aber oftmals doch sehr grosse Rechnungen ersparen; ferner, was sowohl für das Studium, als auch für selbstständige Arbeiten von grösstem Werthe ist, die Möglichkeit gewisser Darstellungen (als z. B. der elliptischen Functionen durch die ϑ) lässt sich sofort übersehen; es wird dadurch leichter, den Faden einer gegebenen Rechnung, welche man nachstudirt, zu behalten, und es kann viel zielloses Rechnen bei selbstständigen Arbeiten vermieden werden. Ich empfehle daher das Werk nochmals einem Jeden, welcher sich mit Riemann'schen Arbeiten vertraut machen will, zum Vorstudium." [G. Roch, in der Zeitschrift f. Mathematik, 1865, 4. Heft.]

Fiedler, Dr. Wilhelm, Professor am Polytechnikum zu Prag, die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen. Ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. gr. 8. 1862. geh. n. 1 Thlr. 14 Ngr.

Diese Arbeit des rühmlichst bekannten Verfassers ist aus dem Wunsche entsprungen, zur allgemeineren Verbreitung der Kenntnis der von der „neueren Algebra" benutzten Methode beizutragen, und durch ausführlichere Darlegung der betreffenden Theorien für binäre Formen auf **Salmon's Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen** vorzubereiten.

Fort, O., und O. Schlömilch, Professoren an der Königl. polytechnischen Schule in Dresden, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zwei Theile. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite Auflage. gr. 8. 1863. geh. 2 Thlr. 22½ Ngr.

Einzeln:

I. Theil. **Analytische Geometrie der Ebene**, von O. Fort. 1 Thlr. 7½ Ngr.
II. » **Analytische Geometrie des Raumes** von O. Schlömilch. 1 Thlr. 15 Ngr.

Das vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie ist vorzugsweise für den Unterricht an technischen und anderen höheren Schulen bestimmt. Der ungetheilte Beifall, den dasselbe gefunden, hat bereits eine zweite Auflage nöthig gemacht. Wo die fernere Einführung beabsichtigt wird, stellt die Verlagshandlung dem betreffenden Lehrer gern ein Freiexemplar behufs vorheriger Prüfung zur Verfügung.

Hesse, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Heidelberg, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. gr. 8. 1861. geh. n. 2 Thlr. 12 Ngr.

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Coordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Functionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor Kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disciplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedler'schen Uebertragung des Salmon'schen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Literatur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dass der Verfasser desselben vor Allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Theile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelle's Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft muss Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] Für Leser, welche mit den nöthigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorien erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w." [O. Fort, in der Zeitschrift für Mathematik, 1862, 2. Heft.]

——— Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

„Man kann ohne Uebertreibung behaupten, dass es sehr wenige Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 182 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten u. s. w." [Schlömilch, in d. Zeitschr. f. Mathem. 1866. 2. Hft.]

Kahl, Dr. **E.**, Lehrer der Physik an der Kriegsschule in Dresden, mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen. Zum Gebrauche höherer Schulanstalten und zum Selbstunterricht bearbeitet. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 2 Theile. gr. 8. 1857. geh. n. 1 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil. **Aufgaben.** n. 24 Ngr. . II. Theil. **Auflösungen.** n. 20 Ngr.

„Je zahlreicher und umfänglicher man Aufgaben-Sammlungen aus dem Gebiete der reinen Mathematik besitzt, desto seltener und verhältnismässig weniger ausführlich hat man sie für angewandte Mathematik und für Physik. Insofern ist daher schon jeder Beitrag für die specielle Literatur letzteren Gegenstandes als eine ebenso erwünschte wie dankenswerthe Erscheinung auf dem Büchermarkte zu betrachten, wie auch übrigens der Verfasser bei Bearbeitung einer selbstständigen Sammlung dieser Art zu Werke gegangen sein mag. Wir brauchen indessen bezüglich vorliegender Sammlung bei diesem einfachen und allgemeinen Urtheile nicht stehen zu bleiben vielmehr wird Jeder nach Einsicht in dieselbe darin mit uns übereinstimmen, dass dieselbe für den Schul- und Privatgebrauch ein recht instructives Hilfsmittel zur Aneignung und zum klaren Verständnis der Hauptlehren der Physik darbietet. Sie unterscheidet sich zunächst von anderen derartigen Sammlungen, z. B. von der Fliedner'schen, auch darin, dass der Gebrauch der Differentialund Integralrechnung für einzelne Beispiele nicht ausgeschlossen ist, ohne jedoch die Kenntnis dieses Theiles der Mathematik durchgängig vorauszusetzen, indem die Mehrzahl der Beispiele davon unabhängig gestellt ist." [Witzschel, in d. Zeitschr. f. Mathem. 1858, 6. Heft.]

Kohl, Friedrich, Elemente von Maschinen zunächst als ein Leitfaden für Gewerbschüler. I. und II. Abtheilung in einem Bande. Mit 31 lithographierten Tafeln und 157 in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite Ausgabe. 4. 1858. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

Kröhnke, H., Civilingenieur und bestallter Landmesser, Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs Sorgfältigste berechnet und herausgegeben. Vierte durchgesehene Auflage. Mit einer Figurentafel. 8. 1863. gebunden 18 Ngr.

„Vorstehendes Taschenbuch, welches sich durch concise Form und Bequemlichkeit für den Gebrauch jedem praktischen Geometer und Ingenieur empfiehlt, enthält alle diejenigen Daten, welche erforderlich sind, um nach der Methode, von den Tangenten und Hülfstangenten aus den Bogen zu bestimmen, Curven für Strassen- und Eisenbahnanlagen abzustecken. Die Einleitung enthält eine kurze, dabei aber sehr klare und bündige Instruction für die Ausführung der beim Abstecken der Curven vorkommenden geometrischen Operationen, für die Behandlung der zu diesem Zwecke erforderlichen Instrumente und für den Gebrauch der den Hauptinhalt des Taschenbuchs bildenden beiden Tabellen. Von diesen Tabellen enthält die erste die Werthe der Tangente, Bogenlänge, halben Sehne, der Coordinaten des Mittelpunktes und dessen Abstandes vom Winkelpunkt der Curve für den Radius 1000 und die Grösse des Centriwinkels von 0 bis 120 Grad, um 2 Minuten jedesmal wachsend. Die zweite Tabelle enthält die Abscissen und Ordinaten zur Absetzung äquidistanter Bogenpunkte für alle vorkommenden Radien von 10 bis 10,000. Mehrfache Revisionen berechtigen den Herrn Verfasser, wie er in der Vorrede sagt, beide Tabellen als vollkommen fehlerfrei und zuverlässig zu bezeichnen." [Eisenbahnzeitung 1852, Nr. 26.]

Lindelöf, Dr. **L.**, Professeur de Mathematiques à Helsingfors, leçons de calcul des variations. Redigées en collaboration avec M. L'abbé Moigno. Paris 1861. gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 20 Ngr.

Matthiesen, Ludwig, Dr., Subrector und Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Husum, die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Nach ihren Principien und ihrem inneren Zusammenhange dargestellt. Erste Serie, enthaltend: Substitutions-Methoden. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Mittheilungen der K. Sächs. Polytechnischen Schule zu Dresden. Heft I. A. u. d. T.: Versuche über den Kraftbedarf der Maschinen in der Streichgarnspinnerei und Tuchfabrikation, ausgeführt von Dr. Ernst Hartig, Lehrer der mechan. Technologie an der Kgl. Polytechn. Schule. Unter Mitwirkung der

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, ord. Professor der descriptiven Geometrie am Polytechnicum zu Prag. 2 Theile. gr. 8. 1863. 1865. geh. 5 Thlr. 14 Ngr.

Einzeln:

I. Theil: A. u. d. T.: Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Ein Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten. gr. 8. geh. 1 Thlr. 24 Ngr.

II. Theil: A. u. d. T.: Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen. gr. 8. geh. n. 3 Thlr. 20 Ngr.

„Die ausgezeichnete Begabung des Verfassers für die Darstellung analytisch-geometrischer Untersuchungen, als auch die Tüchtigkeit des Herrn Uebersetzers sind so anerkannt, dass es unnöthig erscheint, irgend etwas zur Empfehlung des vorliegenden Werkes hinzuzufügen."
[Literar. Centralblatt, 1864, Nr. 38.]

Scheffler, Dr. Hermann, Herzogl. Braunschweig. Baurath, imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft, mit Anwendungen auf die Theorie des Kreisels, des rollenden Rades, des Polytrops, des rotirenden Geschosses und des Tischrückens. Mit 23 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1866. geh. 15 Ngr.

Schell, Dr. W., Professor der Mathematik in Marburg, allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Mit Holzschnitten. gr. 8. 1859. geh. n. 24 Ngr.

„Das vorliegende Werkchen kann allen denen, die sich mit der geometrischen Betrachtungsweise der wichtigen Theorie der doppelt gekrümmten Curven, sowie vieler anderer dazu gehöriger geometrischer Gebilde vertraut machen wollen, nur bestens empfohlen werden. Sie werden darin ein reiches Material für die Uebung in der geometrischen Anschauung und Verbindung vorfinden, dass der Verfasser ihnen in klarer und gedrängter Darstellung vor Augen geführt. Wir können nur wünschen, dass derselbe dem wissenschaftlichen Publikum seine weiteren Untersuchungen über die hier behandelten Gegenstände in nicht ferner Zeit zur Kenntnis bringen möge."
[Heidelberger Jahrbücher 1859, Nr. 38.]

Schmidt, Carl Heinrich, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart, Lehrbuch der Spinnereimechanik. Mit einem Atlas von 13 lithograph. Tafeln. gr. 8. 1857. (Der Atlas quer-Folio). n. 3 Thlr.

Dieses Lehrbuch der Spinnereimechanik beschäftigt sich vorzugsweise mit dem theoretischen Theile des Spinnereifaches. Es zerfällt in vier Abtheilungen: **I. Flachs- und Wergspinnerei. II. Baumwollspinnerei. III. Schafwollspinnerei. IV. Bewegungsgesetze und Bewegungsmechanismen für die Aufwindung des Vorgarnes** — und hat ebensowohl in Gewerb- und anderen technischen Schulen, als auch unter den Praktikern des Spinnereifaches allgemeine Anerkennung und weite Verbreitung gefunden.

Schneitler, Dr. C. F., Civilingenieur, die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Meßkunst, sowie der geometrischen Zeichenkunst, ihre Theorie, Construction, Gebrauch und Prüfung. Mit 236 in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte sehr verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. 1861. geh. 1 Thlr. 15 Ngr.

——— Lehrbuch der gesammten Meßkunst oder Darstellung der Theorie und Praxis des Feldmessens, Nivellirens und Höhenmessens, der militärischen Aufnahmen ganzer Länder, sowie der geometrischen Zeichenkunst. Zum Selbststudium und Unterrichte bearbeitet. Dritte verbesserte Auflage. Mit 225 Holzschnitten. gr. 8. 1861. geh. 2 Thlr.

Die geodätischen Werke Schneitler's entsprechen so sehr einem praktischen Bedürfnisse, dass ihre Verbreitung in fortwährendem Steigen begriffen ist. Die vorliegende dritte Auflage des „Lehrbuchs der Messkunst", welches mit dem gleichzeitig in vierter Auflage erschienenen Werke: **„die Instrumente und Werkzeuge der Messkunst"** ein Ganzes bildet, ist eine wesentlich verbesserte. Insbesondere ist der ganze Abschnitt „Nivelliren" durch Herrn Regierungsconducteur Stocken in Breslau vollständig neu bearbeitet und damit das Buch gerade in einer Partie erweitert worden, deren genaue Kenntnis in unserer Zeit von besonderer Bedeutung für die grossartigen Landes-Meliorationen (Bruch- und Moorbauten, Drain-Anlagen) ist. Der Preis ist ausserordentlich billig.

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andrée, Civilingenieurs, Sammlung von Werkzeichnungen landwirthschaftlicher

Maschinen und Geräthe nebst ausführlichen Beschreibungen. 7 Hefte. Mit 42 Tafeln in gr. Royal-Fol. Text in 4. 1853—1857. geh. n. 38 Thlr.

Einzeln:

I. Heft, die Drainröhren- und Ziegelpressen auf 7 Foliotafeln: 1) Randell und Sanders Thonröhrenpresse mit mechanischer Abschneide-Vorrichtung; 2) Drainröhrenpresse von Egells in Berlin; 3) Doppeltwirkende Drainröhrenpresse von J. Whitehead in Preston; 4) Drainröhrenpresse von J. Williams in Bedford; 5) Doppelwirkende Drainröhrenpresse von Borie Frères in Paris; 6) Drainröhrenpresse von Mundscheid in Malapane; 7) einfache englische Röhrenpresse. 1853. n. 6 Thlr.

II. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Verbesserte Flachs-Brechmaschine von Kuthe; 2) Flachsschwinge-Maschine von J. Bücklers; 3) Patentirter Apparat und Verfahren der Flachs-Dampfröste von Watt in Irland; 4) E. Kaemmerer's Universal-Säe-Maschine. 1853. n. 6 Thlr.

III. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Transportabler Cylindergöpel von Barret, Exall u. Andrews in Reading; 2) transportables deutsches Rosswerk; 3) Häckselschneide-Maschine nach Gillet; Schrotmühle mit Stahlwalzen. 1854. n. 6 Thlr.

IV. Heft oder II. Serie 1. Heft, mit 6 Tafeln: 1) Englische Dreschmaschine; 2) Salmon's Häckselschneide-Maschine; 3) Bedford-Eggen. 1855. n. 6 Thlr.

V. Heft, oder II. Serie 2. Heft, mit 6 Tafeln: Thonschlemmerei zu Joachimsthal; Göpel von Pinet; Romaine's Dampfgrabe-Maschine. 1856. n. 6 Thlr.

VI. u. VII. (Doppel)Heft, oder II. Serie 3. u. 4. Heft, a. u. d. T.: Die neueren Dampfcultur-Geräthe und Dampfpflüge Englands. Von Dr. C. F. Schneitler. Mit 11 Tafeln. 1857. n. 8 Thlr.

Heft 1—3 herausgegeben von C. F. Schneitler, Heft 4—7 oder II. Serie 1—4. Heft von C. F. Schneitler und J. Andrée.

Schneitler, Dr. C. F., und Julius Andree, Civil-Ingenieurs, die neueren und wichtigeren landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthe, ihre Theorie, Construction, Wirkungsweise und Anwendung. Ein Handbuch der landwirthschaftlichen Maschinen- und Geräthekunde zum Selbststudium und Unterricht. Mit 350 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1862. geh. 3 Thlr.

„Das neueste und vollständigste Buch über landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe, welches durch seine vozüglich klaren und anschaulichen Abbildungen wie durch seinen gediegenen beschreibenden Text die vollste Anerkennung bei allen gefunden hat, die als Landwirthe oder Techniker mit den landwirthschaftlichen Maschinen und Geräthen sich näher bekannt zu machen Veranlassung haben. Wir können nur wiederholen, dass wir es hier mit einem gediegenen, der wärmsten Empfehlung werthen Werke zu thun haben. Alle Landwirthe, welche den Fortschritt in ihrem ehrenwerthen Berufe mit Freuden begrüssen, können „diese" Maschinen- und Geräthe-Kunde gar nicht entbehren, und legen wir besonders auch allen Mitgliedern unseres Vereins die Anschaffung desselben ans Herz."

[Landwirthschaftliche Mittheilungen (Neuhaldensleben) 1859, Nr. 4.]

Schröter, J. G., faßliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra. Nach Beispielen aus den in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. gr. 8. 1850. geh. 1 Thlr. 9 Ngr.

Neben einer sehr klaren Darstellung der algebraischen Lehrsätze enthält das Buch ausführliche Auflösungen aller in Meyer Hirsch's Sammlung enthaltenen algebraischen Aufgaben, welche dasselbe vorzugsweise zum Selbstunterricht in der Algebra geeignet machen.

Stamm, Ernst, theoretische und praktische Studien über den Selfactor oder die selbstthätige Mule-Feinspinnmaschine. Aus dem Französischen übersetzt von Ernst Hartig. Mit einem Vorwort von Dr. J. A. Hülsse, Director der polytechnischen Schule in Dresden. Mit 10 Kupfertafeln (in qu.-Fol. u. Imp.-Fol.) I. Heft: Text. II. Heft: Kupfertafeln. gr. 4. 1862. geh. n. 4 Thlr.

Der Herr Verfasser vorliegender Schrift sprach gegen mich den Wunsch aus, dieselbe in Deutschland einzuführen; ich konnte diesem Wunsche um so bereitwilliger entsprechen, als die Schrift selbst für eine wesentliche Bereicherung der im Fache der Spinnereimechanik ohnehin nicht sehr zahlreichen Literatur zu erachten ist, und sich auf eine mechanische Vorrichtung erstreckt, welche mit jedem Tage grössere Bedeutung erhält und an deren Vervollkommnung und Nutzbarmachung für andere Spinnstoffe als Baumwolle auch deutsche Werkstätten sich wesentlich betheiligen, den Gegenstand selbst aber in einer Art behandelt, welche auch für den der höheren Mathematik nicht Kundigen ein Verständnis zulässt. Ich erlaube mir daher Alle, welche sich für das Spinnereifach interessieren, auf die in dieser Schrift enthaltenen neuen und eingehenden Betrachtungen über die Wirksamkeit der einzelnen Mechanismen des Selfactors und über die Mittel, durch welche einzelnen Fehlern in dem Producte des Selfactors abgeholfen werden kann, hinzuweisen.

Dr. J. A. Hülsse in Dresden.